

УДК 621.391

К.А. Батенков

МОДЕЛЬ ДИСКРЕТИЗИРОВАННОГО КАНАЛА СВЯЗИ С ЛИНЕЙНО-НЕЗАВИСИМЫМИ ПОДКАНАЛАМИ

Предложена математическая модель дискретизированного канала связи, на основе которой установлены требования к ее параметрам. Поставлена задача формирования базисных функций. Доказано утверждение о способе формирования систем базисных функций входа и выхода канала связи. Получено решение задачи формирования несущих колебаний, образующих линейно-независимые друг относительно друга подканалы, численным методом.

Введение. Тенденции развития современных систем передачи информации обуславливают переход к цифровым методам ее обработки. Это вызвано рядом причин. Основным преимуществом такого подхода является легкость восстановления точной копии передаваемого сигнала вследствие ограниченности его ансамбля реализаций. Цифровое программное обеспечение допускает более гибкую реализацию по сравнению с аналоговым [1]. Кроме того, наиболее разработанной частью общей теории связи является теория передачи дискретных сообщений [2].

Тем не менее, основой является аналоговый канал связи, содержащий бесконечное число измерений. После дискретизации его размерность снижается, и он может быть представлен как параллельное соединение нескольких подканалов.

В целях передачи максимально возможного количества информации каждый такой подканал должен быть линейно независим от других. Это связано с необходимостью увеличения размерности передаваемых сигналов [3]. Кроме того, задачи оценивания решаются точнее, если рассматриваются в координатной системе, где случайные величины слабо коррелированы [4].

Целью настоящей работы является доказательство существования такой математической модели дискретизированного канала связи, несущие которого образуют линейно-независимые друг относительно друга подканалы.

1. Модель дискретизированного канала связи с ограниченным временем использования. Наиболее удобным для применения классом линейно независимых сигналов являются ортонормированные функции, получить которые возможно с помощью процесса ортогонализации Грама-Шмидта из линейно независимых сигналов [5]. Представление сигналов посредством обобщенного ряда Фурье в выбранном базисе позволяет с необходимой точностью воспроиз-

водить исходные сигналы посредством относительно несложных преобразований. Предпочтительность ортонормированных функций объясняется независимостью вычисления коэффициентов обобщенного ряда Фурье [6].

Рассмотрим модель дискретизированного непрерывного канала связи. Согласно аппаратной реализации ортогонального разложения сигналов [6] его типовая схема изображена на рисунке 1.

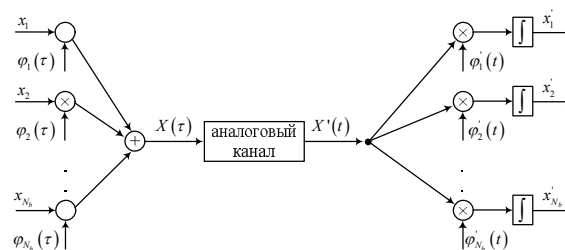


Рисунок 1 – Модель дискретизированного канала связи

Сигнал на входе аналогового канала представляется обобщенным рядом Фурье:

$$X(\tau) = \sum_{i=1}^{N_b} x_i \cdot \varphi_i(\tau), \quad (1)$$

где N_b – число подканалов; x_i , $i = \overline{1, N_b}$ – коэффициент разложения информационного сигнала в выбранной системе ортогональных базисных функций; $\varphi_i(\tau)$ – i -я базисная функция на входе канала.

Коэффициенты разложения на выходе канала связи определяются как скалярное произведение сигнала на выходе аналогового канала $X'(t)$ и i -й базисной функции на выходе канала $\varphi'_i(t)$:

$$x'_i = \int_t X'(t) \cdot \varphi'_i(t) dt, \quad i = \overline{1, N_b}. \quad (2)$$

Рассмотрим канал связи с аддитивным белым гауссовским шумом. Сигнал на его выходе задается выражением [3]:

$$X'(t) = \int_{\tau} X(\tau)h(t, \tau)d\tau + n(t), \quad (3)$$

где $h(t, \tau)$ – импульсная характеристика аналогового канала (в общем случае нестационарного); $n(t)$ – белый гауссовский шум.

Наряду с ограничениями на энергетический и частотный ресурсы необходимо учитывать и временные затраты, которые не отражены в требованиях к свойствам линейного непрерывного канала связи. С этой целью импульсная характеристика аналогового канала представляется в виде:

$$h(t, \tau) = q(\tau)h_a(t, \tau)q'(t), \quad (4)$$

где $q(\tau)$ – оконная функция на входе канала; $h_a(t, \tau)$ – импульсная характеристика линейной системы модели канала; $q'(t)$ – оконная функция на выходе канала.

Необходимо отметить, что даже если исходный аналоговый канал является стационарным, в результате преобразования (4) он становится нестационарным.

2. Анализ величины внутрисистемных шумов неортогональности. Рассмотрим характеристики подканалов дискретизированного канала связи в зависимости от вида базисных функций. С этой целью определим величину взаимной энергии между сигналами подканалов на выходе канала связи как ковариационную матрицу коэффициентов разложения выходного информационного сигнала:

$$E_{i,j} = M \{x'_i \cdot x'_j\}, \quad i, j = \overline{1, N_b},$$

где $M \{x\}$ – математическое ожидание случайной величины x .

Для однозначной взаимосвязи между базисными функциями входа и выхода будем формировать выходные в виде реакции аналогового канала на входные:

$$\varphi'_i(t) = \alpha_i \int_{\tau} h(t, \tau)\varphi_i(\tau)d\tau, \quad i = \overline{1, N_b}, \quad (5)$$

где α_i – коэффициент нормирования базисных функций выхода.

Подставляя (1) в (3) и используя (5), коэффициенты разложения на выходе канала связи (2) выражаем в виде:

$$x'_i = \sum_{j=1}^{N_b} \frac{x_j}{\alpha_j} \int \varphi'_j(t)\varphi'_i(t)dt + \int n(t)\varphi'_i(t)dt, \quad i = \overline{1, N_b}.$$

Если статистические свойства информационного сигнала x_i и белого гауссовского шума независимы, то взаимная энергия определяется формулой:

$$E'_{i,j} = M \left\{ \sum_{k=1}^{N_b} \frac{x_k}{\alpha_k} \int \varphi'_k(t)\varphi'_i(t)dt \times \right. \\ \left. \times \sum_{p=1}^{N_b} \frac{x_p}{\alpha_p} \int \varphi'_p(t_1)\varphi'_j(t_1)dt_1 \right\} + \sigma^2 \int \varphi'_i(t)\varphi'_j(t)dt, \quad (6)$$

где σ^2 – дисперсия белого гауссовского шума.

В условиях независимости информационных сигналов различных подканалов x_i (6) преобразуется к виду:

$$E'_{i,j} = \sum_{k=1}^{N_b} \frac{M \{x_k^2\}}{\alpha_k^2} \int \varphi'_k(t)\varphi'_i(t)dt \int \varphi'_k(t_1)\varphi'_j(t_1)dt_1 + \\ + \sigma^2 \int \varphi'_i(t)\varphi'_j(t)dt. \quad (7)$$

Таким образом, вид базисных функций определяет степень статистической взаимосвязи между подканалами дискретизированного канала связи, что отражается взаимной энергией (7) сигналов на выходе каждого из подканалов. В случае, когда базисные функции выхода ортонормированны, сигналы на выходе подканалов являются некоррелированными и матрица взаимных энергий (7) диагональная.

Однако в современных системах передачи информации это условие зачастую не выполняется, что определяет актуальность исследований.

Рассмотрим выполнение условия некоррелированности при передаче информации по каналу связи тональной частоты, остаточное затухание которого изображено на рисунке 2, а импульсная характеристика – на рисунке 3.

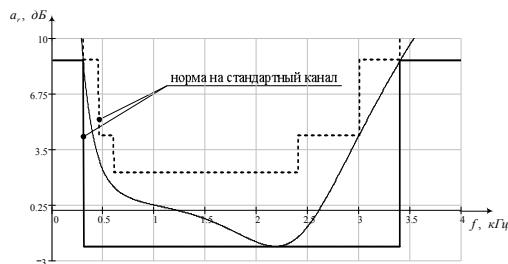


Рисунок 2 – Зависимость остаточного затухания α_r исследуемых каналов от частоты f

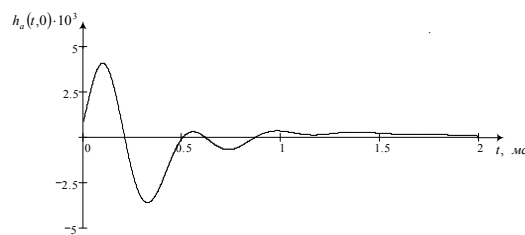


Рисунок 3 – Импульсные характеристики $h_a(t, 0)$ исследуемых каналов

При этом покажем, что даже в отсутствие аддитивного шума возникают внутрисистемные

шумы неортогональности между подканалами [7].

Пусть входы подканалов независимы и $M\{x_i^2\} = 1, i = \overline{1, N_b}$, а оконные функции определяются скоростью модуляции V_k и имеют форму видеоимпульсов:

$$q(t) = q'(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0, V_k^{-1}] \\ 0, & t \notin [0, V_k^{-1}] \end{cases}$$

При этом в качестве базиса (базисных функций) используются несущие колебания протоколов модуляции для коммутируемых линий [8].

Так как величина шумов неортогональности зависит от суммарной энергии сигналов в подканалах, возникает необходимость рассмотрения относительной величины этих шумов:

$$E_m = \frac{\sum_{i=1}^{N_b} \sum_{j=1, j \neq i}^{N_b} |E_{i,j}|}{\sum_{i=1}^{N_b} \sum_{j=1}^{N_b} |E_{i,j}|}. \quad (8)$$

Результаты вычислений согласно (7) и (8) приведены на рисунке 4.

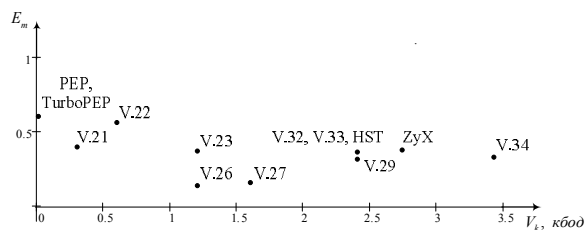


Рисунок 4 – Относительная величина шумов неортогональности для различных протоколов модуляции

Протоколы, использующие частотную модуляцию (V.21, V.22, V.23, PEP, TurboPEP), имеют значительную величину шумов неортогональности. Это вызвано большим числом используемых подканалов, разнесенных по частоте.

Взаимная энергия между подканалами при фазовой модуляции (V.26, V.27) имеет меньшее значение, поскольку используется всего два подканала при малой скорости модуляции.

Переход к квадратурной амплитудной модуляции (V.29, V.32, V.33, V.34, HST, ZyX) не изменяет числа и формы базисных функций, но увеличивает скорость модуляции.

Таким образом, в существующих протоколах модуляции присутствуют внутрисистемные шумы неортогональности. Причинами их возникновения являются:

- 1) несогласованность скорости модуляции с частотами несущих гармонических колебаний;
- 2) отсутствие ортогональности между откликами на входные базисные функции и базис-

ными функциями на выходе канала.

Поэтому при обработке сигналов на приеме (даже в отсутствие канальных помех) будут присутствовать шумы неортогональности, существенно снижающие характеристики приемника.

Согласование формы входных и выходных базисных функций со статистическими и частотными характеристиками канала связи может уменьшить негативное воздействие переходных помех между подканалами. С этой целью формально рассмотрим условия и критерии, определяющие шумы неортогональности.

3. Постановка задачи формирования базисных функций. Как было сказано выше, отсутствие шумов неортогональности выражается в виде условия диагональности матрицы взаимных энергий (7):

$$E'_{i,j} = \beta_i \delta_{i,j}, \quad i, j = \overline{1, N_b}, \quad (9)$$

где β_i – энергия смеси сигнала и аддитивного шума i -го подканала на выходе; $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера [5].

Представление (7) в форме (9) возможно в случае ортогональности функций $\phi'_i(t), i = \overline{1, N_b}$:

$$\int_t \phi'_i(t) \phi'_j(t) dt = \delta_{i,j}, \quad i, j = \overline{1, N_b}. \quad (10)$$

Тогда:

$$\beta_i = \frac{M\{x_i^2\}}{\alpha_i^2} + \sigma^2.$$

Принято оценивать помехоустойчивость системы передачи информации, использующей непрерывные по уровню сигналы, отношением средних мощностей (энергий) полезного сигнала и шума [3]. Поэтому система должна удовлетворять критерию максимума отношения энергии полезного сигнала к энергии аддитивного шума на выходе каждого подканала и условию отсутствия шумов неортогональности (10), что выражается с помощью следующих оптимизационных задач:

$$\frac{M\{x_i^2\}}{\alpha_i^2 \sigma^2} \rightarrow \max_{\alpha_i, \phi_i(t), \phi'_i(t)}, \quad i = \overline{1, N_b}, \quad (11)$$

при ограничениях (10) и (5).

Ограничения (5) определяют взаимосвязь между входными и выходными базисными функциями.

Исследуем множество допустимых решений поставленных задач с целью выявления зависимостей между искомыми переменными, при которых (зависимостях) достигаются оптимальные решения. Для этого рассмотрим выражение (7). Перестановка операций интегрирования и сум-

мирования приводит к равенству:

$$E'_{i,j} = \int_t \varphi'_i(t) \times \left\{ \sum_{k=1}^{N_b} \frac{M\{x_k^2\}}{\alpha_k^2} \varphi'_k(t) \int_{t_1} \varphi'_k(t_1) \varphi'_j(t_1) dt_1 + \sigma^2 \varphi'_j(t) \right\} dt. \quad (12)$$

Ограничения на входные и выходные базисные функции (10), (5) позволяют преобразовать (12) к выражению:

$$E'_{i,j} = \int_t \alpha_i \left\{ \frac{M\{x_j^2\}}{\alpha_j} \int_{\tau_1} h(t, \tau_1) \varphi_j(\tau_1) d\tau_1 + \sigma^2 \alpha_j \int_{\tau_1} h(t, \tau_1) \varphi_j(\tau_1) d\tau_1 \right\} \int_{\tau} h(t, \tau) \varphi_i(\tau) d\tau dt.$$

Группировка сомножителей и замена местами операций интегрирования приводит к следующему:

$$E'_{i,j} = \alpha_i \left\{ \frac{M\{x_j^2\}}{\alpha_j} + \sigma^2 \alpha_j \right\} \times \int_{\tau} \varphi_i(\tau) \int_{\tau_1} h(t, \tau) h(t, \tau_1) dt \cdot \varphi_j(\tau_1) d\tau_1 d\tau.$$

Обозначим:

$$R(t, \tau) = \int_{\tau'} h(\tau', t) h(\tau', \tau) d\tau'. \quad (13)$$

В результате:

$$E'_{i,j} = \alpha_i \left\{ \frac{M\{x_j^2\}}{\alpha_j} + \sigma^2 \alpha_j \right\} \times \int_{\tau} \varphi_i(\tau) \int_{\tau_1} R(\tau, \tau_1) \cdot \varphi_j(\tau_1) d\tau_1 d\tau. \quad (14)$$

Приравнивая (9) к (14), получаем:

$$\int_{\tau} \varphi_i(\tau) \int_{\tau_1} R(\tau, \tau_1) \cdot \varphi_j(\tau_1) d\tau_1 d\tau = \left\{ \frac{M\{x_i^2\}}{\alpha_i^2} + \sigma^2 \right\} \delta_{i,j} / \left\{ \frac{M\{x_j^2\}}{\alpha_j} + \sigma^2 \alpha_j \right\}. \quad (15)$$

Правая часть (15) отлична от нуля только в случае $i = j$. Тогда упрощение (15) и обозначение:

$$\lambda_i = \alpha_i^{-2}$$

приводят к равенству:

$$\lambda_i \delta_{i,j} = \int_{\tau} \varphi_i(\tau) \int_{\tau_1} R(\tau, \tau_1) \cdot \varphi_j(\tau_1) d\tau_1 d\tau. \quad (16)$$

Таким образом, максимизация целевых функций (11) при ограничениях (10) и (5) для любого i эквивалентна по решению следующим задачам максимизации функционалов (16) при $i = j$:

$$\int_{\tau} \varphi_i(t) \int_{\tau} R(t, \tau) \cdot \varphi_i(\tau) d\tau dt \rightarrow \max_{\varphi_i(x)}, \quad i = \overline{1, N_b}, \quad (17)$$

$$\int_{\tau} \varphi_i(t) \int_{\tau} R(t, \tau) \cdot \varphi_j(\tau) d\tau dt = 0, \quad i \neq j, \quad (18)$$

$$\int_t \varphi_i(t) \varphi_j(t) dt = \delta_{i,j}, \quad i, j = \overline{1, N_b}. \quad (19)$$

Дополнительное ограничение (19) на ортонормированность входных базисных функций определяется моделью дискретизированного канала связи и стремлением к снижению энергетических затрат при передаче информационных сигналов.

Поставленные задачи имеют нелинейные целевые функции и нелинейные ограничения в виде равенств. Целевой функционал (17) определяет энергию полезного сигнала на выходе i -го подканала. Ограничения (18) обеспечивают ортогональность выходного, а (19) – ортонормированность входного базиса.

Эти задачи полностью определяют линейный дискретизированный канал связи с аддитивным белым гауссовским шумом.

4. Решение задачи методом множителей Лагранжа. Рассмотрим случай, когда все подканалы равноценны. Поэтому оптимизационные задачи (17), (18), (19) решаются последовательно. Так как ограничения (18), (19) – равенства, то целесообразно использовать на каждом этапе метод множителей Лагранжа [9].

Тогда формируется последовательность функций Лагранжа:

$$\begin{aligned} f_1^L(\varphi) &= \int_t \varphi_1(t) \int_{\tau} R(t, \tau) \varphi_1(\tau) d\tau dt + \\ &+ a_1^L \int_t \varphi_1^2(t) dt, \quad i = 1, \\ f_2^L(\varphi) &= \int_t \varphi_2(t) \int_{\tau} R(t, \tau) \varphi_2(\tau) d\tau dt + \\ &+ a_2^L \int_t \varphi_2^2(t) dt + b_{2,1}^L \int_t \varphi_1(t) \varphi_2(t) dt + \\ &+ c_{2,1}^L \int_t \varphi_2(t) \int_{\tau} R(t, \tau) \varphi_1(\tau) d\tau dt, \quad i = 2, \\ f_i^L(\varphi) &= \int_t \varphi_i(t) \int_{\tau} R(t, \tau) \varphi_i(\tau) d\tau dt + \\ &+ a_i^L \int_t \varphi_i^2(t) dt + \sum_{k=1}^{i-1} b_{i,k}^L \int_t \varphi_k(t) \varphi_i(t) dt + \\ &+ \sum_{k=1}^{i-1} c_{i,k}^L \int_t \varphi_i(t) \int_{\tau} R(t, \tau) \varphi_k(\tau) d\tau dt, \quad i = \overline{3, N_b - 1}, \\ f_{N_b}^L(\varphi) &= \int_t \varphi_{N_b}(t) \int_{\tau} R(t, \tau) \varphi_{N_b}(\tau) d\tau dt + \\ &+ a_{N_b}^L \int_t \varphi_{N_b}^2(t) dt + \sum_{k=1}^{N_b-1} b_{N_b,k}^L \int_t \varphi_k(t) \varphi_{N_b}(t) dt + \\ &+ \sum_{k=1}^{N_b-1} c_{N_b,k}^L \int_t \varphi_{N_b}(t) \int_{\tau} R(t, \tau) \varphi_k(\tau) d\tau dt, \quad i = N_b. \end{aligned}$$

Первые производные от этих функций по входным базисным функциям [10] представляют собой:

$$\frac{d[f_1^L(\varphi)]}{d\varphi_1(t)} = 2 \int_{\tau} R(t, \tau) \varphi_1(\tau) d\tau + 2a_1^L \varphi_1(t), \quad (20)$$

$$\frac{d[f_2^L(\varphi)]}{d\varphi_2(t)} = 2 \int_{\tau} R(t, \tau) \varphi_2(\tau) d\tau + 2a_2^L \varphi_2(t) + b_{2,1}^L \varphi_1(t) + c_{2,1}^L \int_{\tau} R(t, \tau) \varphi_1(\tau) d\tau, \quad (21)$$

$$\frac{d[f_i^L(\varphi)]}{d\varphi_i(t)} = 2 \int_{\tau} R(t, \tau) \varphi_i(\tau) d\tau + 2a_i^L \varphi_i(t) + \sum_{k=1}^{i-1} b_{i,k}^L \varphi_k(t) + \sum_{k=1}^{i-1} c_{i,k}^L \int_{\tau} R(t, \tau) \varphi_k(\tau) d\tau,$$

$$\frac{d[f_{N_b}^L(\varphi)]}{d\varphi_{N_b}(t)} = 2 \int_{\tau} R(t, \tau) \varphi_{N_b}(\tau) d\tau + 2a_{N_b}^L \varphi_{N_b}(t) + \sum_{k=1}^{N_b-1} b_{N_b,k}^L \varphi_k(t) + \sum_{k=1}^{N_b-1} c_{N_b,k}^L \int_{\tau} R(t, \tau) \varphi_k(\tau) d\tau.$$

Для нахождения экстремумов приравняем к нулю выражение (20). После упрощения получается:

$$a_1^L \varphi_1(t) = - \int_{\tau} R(t, \tau) \varphi_1(\tau) d\tau. \quad (22)$$

Подставим (22) вместо последнего слагаемого в (21) и приравняем полученное выражение к нулю:

$$2 \int_{\tau} R(t, \tau) \varphi_2(\tau) d\tau + 2a_2^L \varphi_2(t) + (b_{2,1}^L - c_{2,1}^L a_1^L) \varphi_1(t) = 0. \quad (23)$$

В силу ортогональности последнего слагаемого (23) к первым двум, что следует из (18), (19), коэффициент при $\varphi_1(t)$ должен быть равен нулю, т.е. $b_{2,1}^L = c_{2,1}^L a_1^L$. Тогда из (23) следует уравнение:

$$a_2^L \varphi_2(t) = - \int_{\tau} R(t, \tau) \varphi_2(\tau) d\tau.$$

Аналогичные рассуждения приводят к выводу, что решение задач (17), (18), (19) сводится к решению однородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно входных базисных функций и собственных чисел, которое часто встречается в математике и физике [11]:

$$\lambda_i \varphi_i(t) = \int_{\tau} R(t, \tau) \varphi_i(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1, N_b}, \quad (24)$$

где:

$$a_i^L = -\lambda_i.$$

5. Применение метода сведения ядра к вырожденному для решения интегрального уравнения. В общем виде решения уравнения (24) не существует [12]. Есть лишь частные случаи при задании определенной формы ядра $R(t, \tau)$ [4, 11]. В связи с этим при поиске множества ортонормированных функций целесообразно использовать приближенные методы. Анализ многочисленных источников показал, что наиболее предпочтительным является метод сведения

ядра к вырожденному [13]. При этом задача (24) сводится к решению системы алгебраических уравнений, причем с увеличением ее размерности растет точность решения исходного интегрального уравнения.

При этом если в качестве вырожденного ядра использовать частичную функциональную сумму ряда Фурье ядра $R(t, \tau)$ по некоторой системе ортонормированных функций $\psi_i(t)$, $i = \overline{1, N_y}$, то с помощью следующего утверждения обосновывается, что приближенное решение уравнения (24) удовлетворяет ограничениям (18), (19).

Утверждение. *Существуют ортонормированные входные базисные функции, являющиеся ортогональными на выходе линейного канала связи с аддитивным белым гауссовским шумом. Каждая входная базисная функция представляет собой линейную комбинацию произвольной системы функций, ортонормированной на выделенном интервале.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную систему ортонормированных функций $\Psi_{N_y}(t) = (\psi_1(t) \ \psi_2(t) \ \dots \ \psi_{N_y}(t))^T$, для которой:

$$\int_t \psi_{N_y}(t) \psi_{N_y}(t)^T dt = I_{N_y}, \quad (25)$$

где T – оператор транспонирования; N_y – общее число функций в системе; I_{N_y} – единичная матрица размером $N \times N$.

Вектор коэффициентов $\mathbf{M}_{N_y}(\tau) = (M_1(\tau) \ M_2(\tau) \ \dots \ M_{N_y}(\tau))^T$ обобщенного ряда Фурье разложения ядра $R(t, \tau)$, определяемого импульсной характеристикой канала связи согласно (13), по системе ортонормированных функций (25) выражается в виде [5]:

$$\mathbf{M}_{N_y}(\tau) = \int_t R(t, \tau) \psi_{N_y}(t) dt.$$

Необходимо отметить, что наименьший интервал ортогональности функций (25) определяется обобщенной импульсной характеристикой канала (4), исходя из условия наличия реакции от воздействия.

В этом случае ядро можно представить как сумму бесконечного числа произведений коэффициентов разложения и выбранных функций (для общности обозначений введен символ ∞):

$$R(t, \tau) = R_{\infty}(t, \tau) = \mathbf{M}_{\infty}(\tau)^T \Psi_{\infty}(t). \quad (26)$$

Тогда усеченное ядро $R_{N_y}(t, \tau)$ будет конечной суммой N_y слагаемых выражения (26). Система собственных функций $\tilde{\varphi}_i(\tau)$, $i = \overline{1, N_y}$ для

этого ядра определяется решением интегрального уравнения Фредгольма второго рода [12]:

$$\tilde{\lambda}_i \tilde{\varphi}_i(t) = \int_{\tau} R(t, \tau) \tilde{\varphi}_i(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1, N_y}, \quad (27)$$

где $\tilde{\lambda}_i$ – собственные числа интегрального уравнения, и к тому же является приближенным решением (24), т.к. $\lim_{N \rightarrow \infty} R_N(t, \tau) = R(t, \tau)$.

Подстановка вырожденного [12] (усеченного по числу слагаемых) ядра (26) преобразует (27) к виду:

$$\tilde{\lambda}_i \tilde{\varphi}_i(t) = \Psi_{N_y}(t) \int_{\tau} \mathbf{M}_{N_y}(\tau) \tilde{\varphi}_i(\tau) d\tau.$$

Обозначим вектор в подынтегральном выражении как:

$$\mathbf{C}_i = \int_{\tau} \mathbf{M}_{N_y}(\tau) \tilde{\varphi}_i(\tau) d\tau. \quad (28)$$

Тогда приближенная система собственных функций ядра $R(t, \tau)$ задается в виде:

$$\tilde{\varphi}_i(t) = \frac{1}{\tilde{\lambda}_i} \Psi_{N_y}(t)^T \mathbf{C}_i. \quad (29)$$

Замена в (28) последнего множителя выражением (29) приводит к уравнению:

$$\tilde{\lambda}_i \mathbf{C}_i = \int_{\tau} \mathbf{M}_{N_y}(\tau) \Psi_{N_y}(\tau)^T d\tau \cdot \mathbf{C}_i, \quad (30)$$

которое является формулировкой задачи [14] на поиск собственных чисел $\tilde{\lambda}_i$ и векторов \mathbf{C}_i матрицы приближения:

$$\mathbf{P} = \int_{\tau} \mathbf{M}_{N_y}(\tau) \Psi_{N_y}(\tau)^T d\tau, \quad (31)$$

После нормировки собственных функций (29) ортонормированный базис представляется как линейная комбинация:

$$\tilde{\varphi}_i^N(t) = \Psi_{N_y}(t)^T \cdot \mathbf{C}_i. \quad (32)$$

Теперь рассмотрим реакцию канала связи с заданной импульсной характеристикой $h(t, \tau)$ на приближенную систему ортонормированных функций (32).

Реакция определяется выражением:

$$\tilde{\varphi}_i^*(t) = \int_t h(t, \tau) \tilde{\varphi}_i^N(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1, N_y}. \quad (33)$$

Тогда взаимная энергия системы функций $\tilde{\varphi}_i^*(t)$:

$$E_{i,j}^* = \int_t \tilde{\varphi}_i^*(t) \tilde{\varphi}_j^*(t) dt, \quad i, j = \overline{1, N_y}. \quad (34)$$

Подстановкой в (34) выражений (33) и (32) получается:

$$E_{i,j}^* = \int_t \tilde{\varphi}_i^N(t) \int_t R(t, \tau) \tilde{\varphi}_j^N(\tau) d\tau dt. \quad (35)$$

На основании (32) и (26) (35) преобразуется к виду:

$$E_{i,j}^* = \int_{\tau} \mathbf{C}_j^T \Psi_{N_y}(\tau) \cdot \mathbf{C}_i^T \times \\ \times \int_t \Psi_{N_y}(t) \Psi_{N_y}(t)^T dt \cdot \mathbf{M}_{N_y}(\tau) d\tau.$$

Условие ортогональности (25) и перегруппировка множителей позволяет перейти к следующему уравнению:

$$E_{i,j}^* = \mathbf{C}_j^T \int_{\tau} \Psi_{N_y}(\tau) \mathbf{M}_{N_y}(\tau)^T d\tau \cdot \mathbf{C}_i.$$

В этом выражении матричный интеграл представляет собой матрицу (31). Тогда согласно (30) взаимная энергия определяется скалярным произведением соответствующих собственных векторов этой матрицы:

$$E_{i,j}^* = \tilde{\lambda}_j \mathbf{C}_j^T \mathbf{C}_i.$$

Так как собственные векторы ортонормированны [15], то базисные функции, представляющие собой линейную комбинацию (32) произвольной системы ортонормированных функций (25), ортогональны на выходе канала связи:

$$E_{i,j}^* = \tilde{\lambda}_j \delta_{i,j}.$$

Таким образом, утверждение доказано.

Следовательно, выбор такого вырожденного ядра позволит найти приближенное решение интегрального уравнения (24), а значит, и задач (17), (18), (19). При этом согласно доказанному утверждению шумы неортогональности отсутствуют при любой точности решения, так как решения удовлетворяют ограничениям (18), (19).

Однако приближенный характер получаемого решения не достигает оптимального значения функционала (17). Это приводит к неполному использованию энергетических свойств канала связи.

Выводы. Таким образом, в работе предложена модель дискретизированного канала связи с ограниченным временем использования. Переход к дискретизированному каналу производится путем проецирования пространств бесконечной размерности входа и выхода, соответствующих аналоговому каналу, на подпространства с конечным числом измерений. При этом базисы подпространств проекций представляют собой системы входных и выходных базисных функций. В качестве системной характеристики аналогового канала выбрана импульсная характеристика, ограниченная входными и выходными временными окнами. Показано, что выходные базисные функции связаны с входными посредством этой характеристики.

Исследование предложенной модели в условиях современных протоколов модуляции для коммутируемых линий выявило наличие внутрисистемных шумов неортогональности. Установлены причины их возникновения: несогласо-

ванность скорости модуляции с частотами несущих гармонических колебаний и отсутствие ортогональности между откликами на входные базисные функции и базисными функциями на выходе канала.

При формулировке задачи формирования систем базисных функций в виде совокупности оптимизационных подзадач определены требования к этим функциям: ортонормированность ансамбля входных базисных функций и ортонормированность ансамбля выходных базисных функций. Первое требование обеспечивает снижение энергетических затрат при передаче сигналов по каналу связи. Второе – отсутствие внутрисистемных шумов неортогональности.

Анализ поставленной задачи показал целесообразность применения метода множителей Лагранжа. Использование этого метода позволило свести решение к определению собственных чисел и собственных функций однородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Решение этого уравнения предлагается искать численным методом сведения ядра к вырожденному, поскольку общее решение для произвольного ядра неизвестно. Доказано отсутствие внутрисистемных шумов неортогональности при любой точности решения, если использовать при некоторых ограничениях в качестве базисных функций входа определенную линейную комбинацию произвольной системы ортонормированных функций разложения ядра уравнения.

Библиографический список

1. *Скляр Б.* Цифровая связь. Теоретические основы и практическое применение. Изд. 2-е испр.: Пер. с англ.– М.: Вильямс, 2003.– 1104 с.
2. *Финк Л.М.* Теория передачи дискретных сообщений.– М.: Советское радио, 1970.– 533 с.
3. Теория электрической связи: Учебник для вузов/ Под ред. Д.Д. Кловского – М.: Радио и связь, 1999. – 432 с.
4. *Ван Трис Г.* Теория обнаружения, оценок и модуляции. Т.1 – М.: Сов. радио, 1972. - 744 с.
5. *Корн Г., Корн К.* Справочник по математике для научных работников и инженеров.– М. 1970.– 720 с.
6. *Баскаков С.И.* Радиотехнические цепи и сигналы: Учебник. – М.: Высш. школа., 1983.– 536 с.
7. *Варакин Л.Е.* Системы связи с шумоподобными сигналами.– М.: Радио и связь, 1985.– 384 с.
8. *Григорьев В.А., Григорьев С.В.* Передача сообщений.– СПб.: ВУС, 2002.– 224 с.
9. *Таха Х.* Введение в исследование операций: в 2-х книгах: Пер. с англ. – М.: Мир, 1985.– 479 с.
10. *Френкс Л.* Теория сигналов: Пер. с англ.– М.: Сов. радио, 1974.– 344 с.
11. *Галлагер Р.* Теория информации и надежная связь Пер. с англ.; под ред. М.С. Пинскера и Б.С. Цыбакова. – М.: Советское радио, 1974. – 720 с.
12. *Васильева А.Б., Тихонов Н.А.* Интегральные уравнения.– 2-е изд. стереот.– М.: Физматлит, 2002.– 160 с.
13. *Краснов М.Л. и др.* Интегральные уравнения.– М.: Наука, 1968.– 192 с.
14. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ: Пер. с англ.– М.: Мир, 1989.– 655 с.
15. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц.– М.: Наука, 1966.– 576 с.