

УДК 621.317

В.А. Антипов

## СИНТЕЗ САМОНАСТРАИВАЮЩЕГОСЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО КАНАЛА С ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ КОРРЕКЦИЕЙ ПОГРЕШНОСТИ

*Рассмотрен оригинальный метод повышения точности средств измерения, названный последовательной коррекцией погрешности. Предложен метод преобразования структурных схем измерительных устройств с последовательной коррекцией, позволяющий применить аппарат теории идентификации к синтезу измерительного канала.*

**Введение.** Системный анализ методов коррекции погрешности позволил найти путь совершенствования метода самонастройки, названный *методом последовательной коррекции* [1].

На основании сочетания признаков, характеризующих метод с последовательной коррекцией, изобразим базовые структурные схемы измерительного канала (ИК) (рисунки 1, 2) [1,2].

Под устройством управления подразумевается устройство, которое в соответствии с принятым алгоритмом осуществляет настройку параметров последовательного корректора, в общем случае минимизируя принятый показатель качества, характеризующий меру отклонения *реальной статической функции преобразования (РСФП) от номинальной статической функции преобразования (НСФП)*.

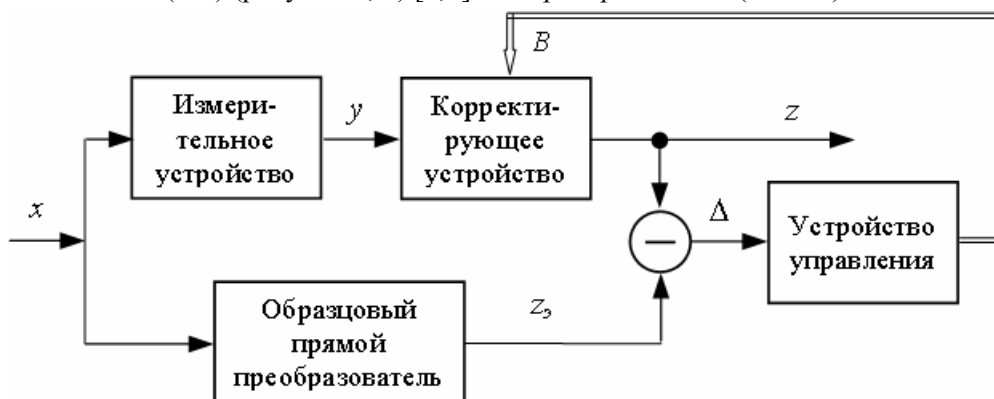


Рисунок 1 – Базовая структурная схема "1" систем последовательной коррекции

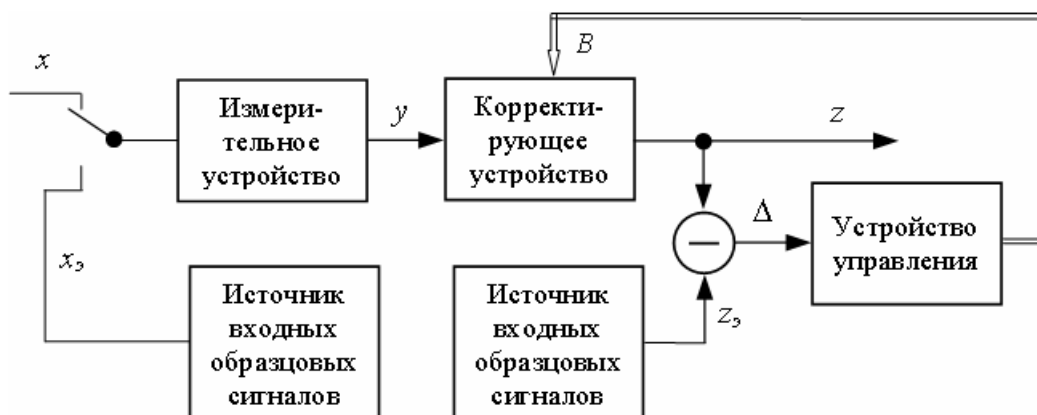


Рисунок 2 – Базовая структурная схема "2" систем последовательной коррекции

Структуры, использующие последовательную коррекцию, отличаются тем, что в структурной схеме 1 с прямой моделью нет режима

прерывания процесса преобразования на время коррекции погрешности. Кроме того, в процессе настройки корректора необходимое разнообра-

зие входной координаты корректора либо организуется заранее, либо зависит от преобразуемого сигнала.

В качестве образцового прямого преобразователя в схеме 1 можно использовать схему 2 (рисунок 2). Полученная комбинированная структура изображена на рисунке 3. В этой структуре модель НСФП представляет собой образцовый прямой преобразователь, но в силу его узкополосности, обусловленной режимом коммутации, не заменяет основной канал преобразования.

Вследствие этого РСФП можно представить гладкой функцией, а квантование по уровню учесть как одну из составляющих погрешности с верхней границей, определяемой из выражения  $\sup |\lambda| = \frac{|q|}{2}$ . По этим же соображениям в классе гладких функций рассматривается и статическая функция преобразования (СФП) последовательного корректора.

Математическая модель РСФП широкого класса СИ описывается выражением

$$y = \sum_{i=0}^m a_i(t)x^i [1].$$

Априорно неизвестны вектор коэффициентов  $A = \{a_0, \dots, a_m\}$  и число компонентов вектора  $l=m+1$ . Поэтому для дальнейших рассуждений под  $l$  будем понимать необходимое число компонентов вектора  $A$ , которое достаточно для точной аппроксимации РСФП. Зная возможный характер реальной функции преобразования измерительного устройства (ИУ), можно задаться значением  $m$ , заведомо превышающим степень реального полинома.

В базовых структурных схемах имеют место модели НСФП, представляющие собой физически реализуемые системы, которые отражают функциональную связь  $F_M$  между преобразуемой  $x_\Omega$  и преобразованной  $z_\Omega$  величинами

$$F_M : X_\Omega \rightarrow Z_\Omega \quad (1)$$

и представляют собой множество, элементами которого являются пары образцовых сигналов  $(x_\Omega, z_\Omega)$ .

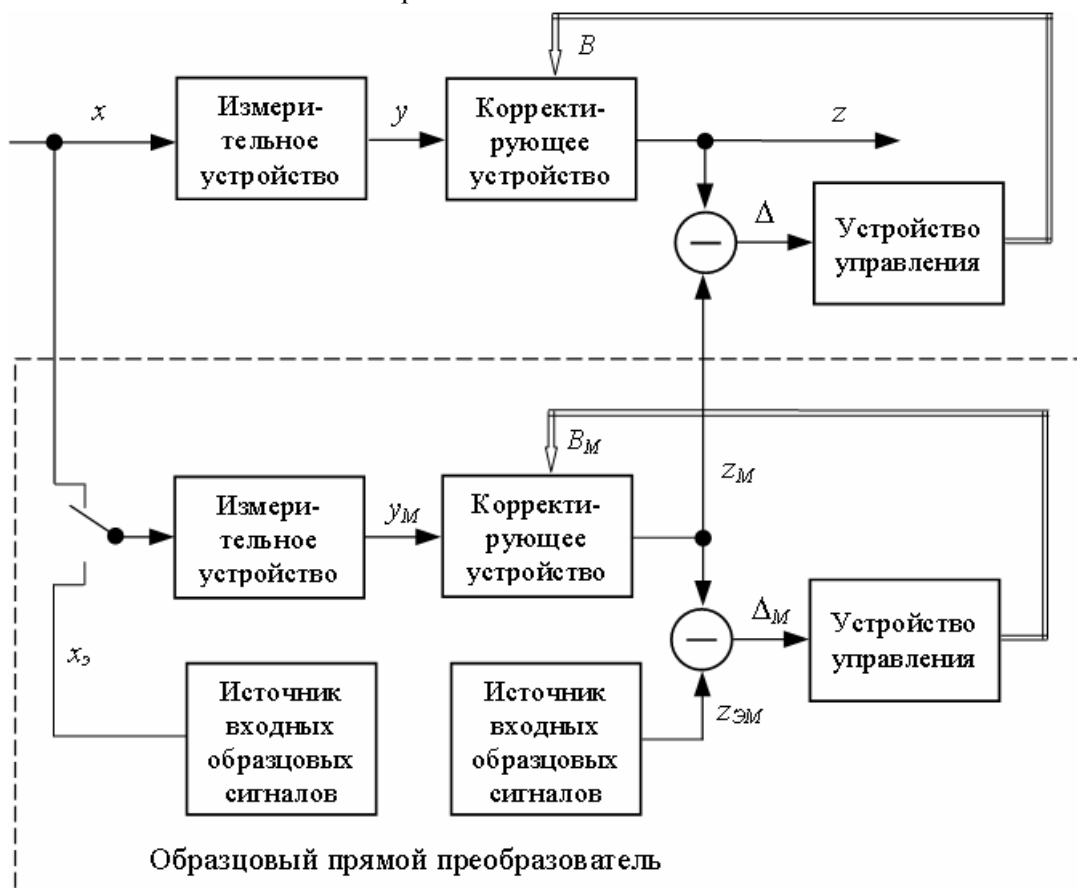


Рисунок 3 – Структурная схема систем последовательной коррекции с образцовым прямым преобразователем

В структурной схеме (рисунок 3) число пар эталонов  $S$  должно быть определено на этапе

проектирования. Естественно предположить, что  $S$  будет определяться как числом  $m+1$  компонен-

тов вектора  $A$ , так и степенью  $k$  полинома, которым аппроксимируется НСФП. Исходя из теории аппроксимации и учитывая, что  $k$  может быть как больше, так и меньше  $m$ , можно утверждать, что число пар эталонов

$$S \geq \begin{cases} m+1, & \text{если } m \geq k; \\ k+1, & \text{если } m < k. \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим структурную схему рисунка 3. Пусть

$F_p : X \rightarrow Y$  – реальная статическая функция преобразования ИУ;

$F_k : Y \rightarrow Z$  – статическая функция преобразования корректирующего устройства;

$F_M : X_{\mathcal{O}} \rightarrow Z_{\mathcal{O}}$  – номинальная статическая функция преобразования;

$D_{F_p} \subset X$  – область определения  $F_p$ , или диапазон преобразуемого сигнала;

$R_{F_p} \subset Y$  – область значений  $F_p$ , или диапазон сигнала ИУ;

$D_{F_k} \subset Y$  – область определения  $F_k$ ;

$R_{F_k} \subset Z$  – область значений  $F_k$  (диапазон выходного сигнала корректируемого ИУ);

$D_{F_M} \subset X_{\mathcal{O}}, R_{F_M} \subset Z_{\mathcal{O}}$  – область определений и область значений НСФП.

Рассмотрим такие каналы преобразования информации, НСФП которых имеют обратное отображение, т. е.

$$F_M^{-1} : Z_{\mathcal{O}} \rightarrow X_{\mathcal{O}}.$$

Обратное отображение присуще функциям, которые одновременно сюръективны и биективны, а все встречающиеся на практике НСФП обладают отмеченными свойствами.

Модель можно задать таким образом, чтобы

$$D_{F_M} \subset D_{F_p},$$

а значит, можно найти композицию

$$F_M^{-1} F_p : Z_{\mathcal{O}} \rightarrow Y.$$

Если указанная композиция (новая функция) взаимно однозначна, то для неё можно определить обратное отображение:

$$(F_M^{-1} F_p)^{-1} : Y \rightarrow Z_{\mathcal{O}} \quad \text{или} \quad \Phi^{-1} : Y \rightarrow Z_{\mathcal{O}}.$$

Следовательно, структурную схему рисунка 3 можно представить как схему (рисунок 4) идентификации нелинейного статического объекта  $\Phi^{-1}$  путём настраиваемой модели [2]. В качестве настраиваемой модели выступает последовательное корректирующее устройство с изменяемой статической функцией преобразования.

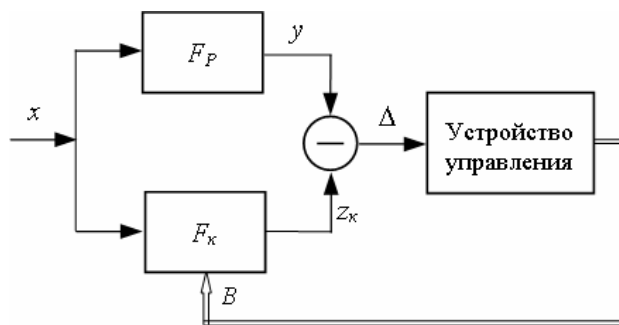


Рисунок 4 – Структурная схема идентификации нелинейного статического объекта

Если в процессе идентификации с точностью до  $\varepsilon$  удастся осуществить равенство

$$F_k \cong \Phi^{-1},$$

то статическая функция преобразования последовательно включенных ИУ и корректора будет равна с точностью до  $\varepsilon$  НСФП ИУ. Структурная схема скорректированного ИУ в режиме преобразования показана на рисунке 5.

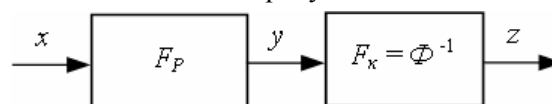
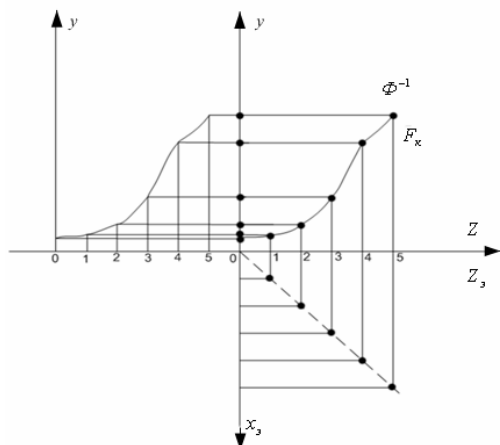


Рисунок 5 – Структурная схема скорректированного ИУ в режиме преобразования

В поставленной задаче идентификации необходимо выбрать класс функций для представления настраиваемого корректора.

**Выбор интерполянтов математической модели СФП корректирующего устройства.** Пусть в рассматриваемой базовой структурной схеме НСФП представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат. Этот случай наиболее часто встречается на практике, когда необходимо, чтобы НСФП канала преобразования была линейной и несмещённой. В данной ситуации число пар эталонов модели будет определяться степенью полинома, который аппроксимирует РСФП. Функция  $\Phi^{-1}$  будет задана тем же числом пар, что и НСФП. В процессе коррекции необходимо обеспечить, чтобы аппроксимирующая функция корректора  $F_k$  проходила через узлы интерполяции, обусловленные  $\Phi^{-1}$ , и была гладкой (рисунок 6). В этом случае имеет место интерполяция с неравноотстоящими значениями аргумента, так как РСФП, порождающая узлы интерполяции (сетку), точно не определена и к тому же изменяется.



**Рисунок 6 – Аппроксимирующая функция корректора**

Интерполяция гладких функций по точным данным, определённым на дискретном множестве точек, как правило, основана на использовании интерполяционных многочленов Лагранжа и Ньютона. Отметим особенности упомянутых разложений. При интерполяционных вычислениях выбирают число и расположение узлов таким образом, чтобы обеспечить принятую точность, стараясь обойтись возможно малым их числом. Для получения нужной точности чаще всего к взятым ранее узлам добавляют один или несколько новых. В формуле Лагранжа это не только повлечёт за собой добавление нового слагаемого в интерполяционную формулу, но потребует также исправления всех ранее найденных параметров. В формуле Ньютона при переходе от одного количества узлов к другому все уже найденные члены сохраняются, требуется лишь добавление нового члена, имеющего смысл поправки к уже вычисленному значению, т. е. формула Ньютона обуславливает квазинезависимость определения компонентов вектора коэффициентов  $B$ . Этот факт является важным в случае создания системы настройки по замкнутому контуру и делает целесообразным использование формулы Ньютона для синтеза СФП корректора. На практике встречаются случаи, когда РСФП ИУ не обладает большой гладкостью. Тогда использование формулы Ньютона для синтеза СФП корректора может не дать желаемого результата. Основным недостатком упомянутого интерполянта состоит в том, что его поведение в окрестности какой-либо точки определяет его поведение в целом. В последнее время усиленно разрабатываются другие методы приближения, свободные от этого недостатка. Такими методами, хорошо зарекомендовавшими себя как в теоретических исследованиях, так и на практике, являются так называемые сплайны

и гладкое восполнение. При аппроксимации подобными интерполянтами СФП корректора предлагается использовать два интерполянта — гладкое восполнение на базе формулы Ньютона и трёхточечный кубический сплайн, которые позволяют обеспечить сепарабельность настройки параметров.

**Синтез СФП корректора на основе интерполяционной формулы Ньютона.** Запишем интерполяционную формулу Ньютона для неравноотстоящих значений

$$Z(y) = \sum_{j=0}^k b_j f_j(y), \quad (3)$$

где

$$\begin{aligned} f_0(y) &= 1; \\ f_1(y) &= (y - y_0); \\ f_2(y) &= (y - y_0)(y - y_1); \end{aligned} \quad (4)$$

$$\dots \dots \dots f_k(y) = (y - y_0)(y - y_1) \dots (y - y_{k-1}),$$

причём число пар эталонов  $S = m + 1 = k + 1$ .

Полином Ньютона в задаче интерполирования порождает функцию невязки вида

$$\Delta = \delta(B) = Z_j - Z_{эj}, \quad (5)$$

коэффициенты  $b \in B$  определяются путём вычисления конечных разностей различного порядка. В данном случае предлагается коэффициенты  $b \in B$  определять с помощью итерационной процедуры по следующей рекуррентной формуле:

$$b_j[n+1] = b_j[n] + \Delta_j[n] \mu_j, \quad (6)$$

где  $n=1, 2, 3, \dots$  – номер итерации;  $\mu_j$  – весовой коэффициент.

Подавая значения образцовых сигналов ( $x_{э0}, x_{э1}, \dots, x_{эk-1}$ ) на вход канала преобразования, получаем значения узлов интерполяции ( $y_0, y_1, \dots, y_{k-1}$ ) на входе корректора. Предварительно запомнив их, можно приступить к процедуре настройки коэффициентов по формуле (6), принимая во внимание особенность разложения по Ньютону (3), (4). Настройку необходимо начинать с коэффициента  $b_0$  и затем строго по порядку настраивать  $b_1, b_2, \dots, b_{k-1}$ . Особенность настройки заключается в том, что если на корректор подать  $y=y_0$ , то все  $f_j$  (кроме  $f_0$ ) обращаются в нуль, а выходная координата корректора будет определяться коэффициентом  $b_0$  полинома (3). Если связать функцию невязки (5) с коэффициентом  $b_0$  согласно (6), то сепарабельно можно определить компонент  $b_0$  вектора  $B$ . Затем с учётом найденного  $b_0$ , подав на вход корректора  $y=y_1$ , аналогичным образом можно определить следующую составляющую вектора  $B$  и так далее, пока все компоненты вектора не будут найдены. Критерием остановки процедуры настрой-

ки компонентов вектора  $B$  будет неравенство  $\delta(b_j) \leq |\varepsilon|$ , где  $\varepsilon$  – зона нечувствительности устройства сравнения.

Получается простая система идентификации, где коэффициенты разложения находятся по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} b_0[n+1] &= b_0[n] + \Delta_0[n]\mu_0; \\ b_1[n+1] &= b_1[n] + \Delta_1[n]\mu_1; \\ \dots & \dots \dots \\ b_k[n+1] &= b_k[n] + \Delta_k[n]\mu_k. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

На основании сказанного можно изобразить структурную схему системы идентификации (рисунок 7) для цепей автоматической коррекции погрешности измерительных преобразователей и структурную схему корректора (рисунок 8), СФП которого реализует интерполяционную формулу Ньютона.

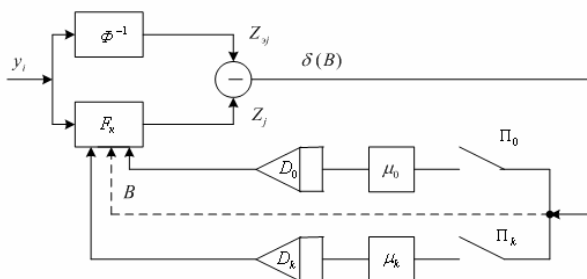


Рисунок 7 – Структурная схема системы идентификации

Рассмотрим сходимость процедуры настройки. Процедура настройки коэффициента  $b \in B$  представлена в виде структурной схемы рисунок 9.

$Z(B)$  – статическое звено с функцией, зависящей от вектора параметров  $B$  (рисунок 8). Поясним более подробно.

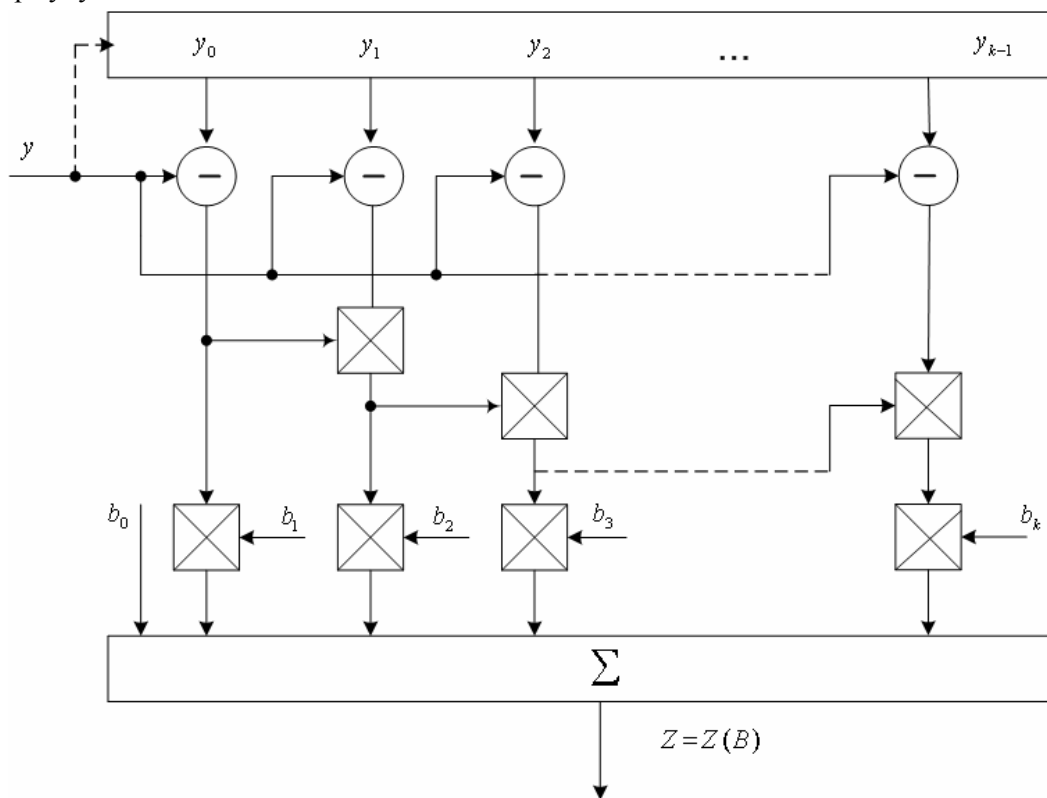


Рисунок 8 – Структурная схема корректора, реализующего формулу Ньютона

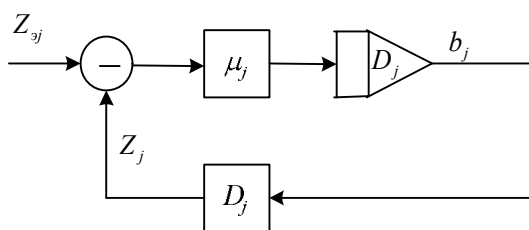


Рисунок 9 – Схема настройки коэффициента  $b_j$

Пусть происходит настройка коэффициента  $b_1$ . В этом случае на вход звена  $\mu_j$  (рисунок 9) подаётся значение  $Z_{\partial 1} - Z_j$ , аналитически связанное с узлами интерполяции  $y_0$  и  $y_1$ . Функции  $f_2, f_3, \dots, f_k$  обращаются в нуль. Значение  $Z_1$  будет зависеть от  $b_1$ , см. формулу (2), следующим образом:

$$Z_1(b_1) = A_1 + D_1 b_1, \quad (8)$$

где  $A_1 = b_0^*$  – ранее настроенный коэффициент;  
 $D_1 = y_1 - y_0$ .

При настройке  $b_2$  имеем  

$$Z_2(b_2) = A_2 + D_2 b_2, \quad (9)$$

где  $A_2 = b_0^* + b_1^*(y_2 - y_0)$ ;  $D_2 = (y_2 - y_0)(y_2 - y_1)$ .

Методом математической индукции получим

$$Z_j(b_j) = A_j + D_j b_j, \quad (10)$$

где

$$A_j = \sum_{i=0}^k b_{j-1} f_j(y_i); \quad D_j = \prod_{r=0}^{j-1} (y_j - y_r).$$

Из выражения (10) видно, что коэффициенты усиления цепи обратной связи  $D_j$  зависят только от произведений разностей узлов интерполяции. Структурные схемы, подобные рисунку 9, относятся к классу линейных цифровых систем.

Проведём анализ устойчивости данной системы.

Из выражений (5) и (6) имеем:

$$b_j[n+1] - b_j[n] = \mu_j (Z_{\alpha_j}[n] - Z[n]).$$

Учитывая связь между  $Z[n]$  и  $b_j[n+1]$  и используя  $z$ -преобразование, получаем передаточную функцию замкнутой системы, изображённой на рисунке 9:

$$W(z) = \frac{Z_j(z)}{Z_{\alpha_j}(z)} = \frac{\mu_j D_j}{z - 1 + \mu_j D_j}.$$

Известно, что линейная цифровая система будет устойчива, если корни характеристического уравнения замкнутой системы лежат внутри круга единичного радиуса, т. е.  $|z| < 1$ . В данном случае  $|z| = |1 - \mu_j D_j| < 1$ . Отсюда следует, что должно быть выполнено следующее неравенство:

$$\mu_j D_j < 2. \quad (11)$$

Если  $\mu_j D_j = 1$ , то из передаточной функции системы имеем  $Z_j(z) = Z_{\alpha_j}(z) z^{-1}$ , т. е. система обладает максимальным быстродействием.

Так как  $D_j$  есть функция произведений узлов интерполяции, которые, в свою очередь, зависят от измерения РСФП ИУ (рисунок 8), то необходимо определить максимально возможные значения для конкретного класса РСФП и внешних возмущений. Только после этого можно выбрать значения  $\mu_j$  таким образом, чтобы, с одной стороны, выполнялось условие (11), а с другой — произведение  $\mu_j D_j$  было бы как можно ближе к 1. В этом случае при гарантированной устойчивости обеспечивается максимальное быстродействие.

Рассмотрим следующий случай. Как и раньше, пусть РСФП описывается полиномом степени  $m$ :

$$y = \sum_{i=0}^m a_i x^i \quad \text{или} \quad F_P: X \rightarrow Y. \quad (12)$$

Модель НСФП задана равномерным набором эталонов с шагом  $\Delta x_j$  и числом шагов  $m$ .

Сделаем следующее допущение. Под воздействием внешних факторов вектор параметров полинома (12) не увеличивает размерность, а график полинома находится внутри зоны, ограниченной сверху и снизу прямыми

$$y = L_0 + L_1 x,$$

$$y = P_0 + P_1 x.$$

Область определения  $F_P$   $D_{F_P} \subset x$  представляет собой замкнутый отрезок  $[0; (m+1)\Delta x_j]$ .

Первая производная РСФП всегда больше нуля. Рассматриваемая ситуация иллюстрируется рисунком 10. Штриховкой выделена замкнутая область существования графика полинома. Из выражения (9) запишем формулы для определения коэффициентов усиления  $D_j$ :

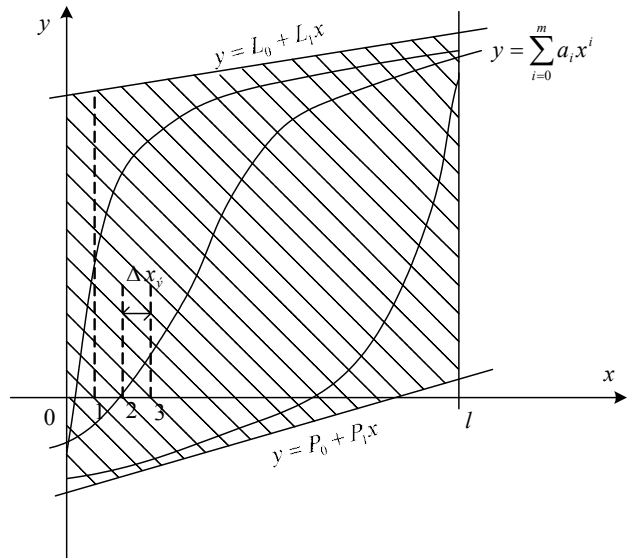


Рисунок 10 – Область существования полинома

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= 1; \\ D_1 &= y_1 - y_0; \\ D_2 &= (y_2 - y_0)(y_2 - y_1); \\ D_3 &= (y_3 - y_0)(y_3 - y_1)(y_3 - y_2); \\ &\dots \dots \dots \\ D_k &= (y_k - y_0)(y_k - y_1) \dots (y_k - y_{k-1}). \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Из анализа рисунка 10 нетрудно определить максимальные значения коэффициентов усиления обратной связи:

$$\left. \begin{aligned} D_{0,\max} &= 1; \\ D_{1,\max} &= \max\{y_1 - y_0\}; \\ D_{2,\max} &= \max\{|y_2 - y_0| |y_2 - y_1|\}; \\ &\dots \dots \dots \\ D_{k,\max} &= \max\{|y_k - y_0| |y_k - y_1| \dots |y_k - y_{k-1}|\}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Учитывая верхнюю и нижнюю границы существования функции (12), получаем:

$$\left. \begin{aligned}
 D_{0,\max} &= 1; \\
 D_{1,\max} &= L_0 + L_1 \Delta x_3 - P_0; \\
 D_{2,\max} &= (L_0 + L_1 2\Delta x_3 - P_0) \times \\
 &\times (L_0 + L_1 \Delta x_3 - P_0 - P_1 \Delta x_3); \\
 D_{3,\max} &= (L_0 + L_1 3\Delta x_3 - P_0) \times \\
 &\times (L_0 + L_1 2\Delta x_3 - P_0 - P_1 \Delta x_3) \times \\
 &\times (L_0 + L_1 \Delta x_3 - P_0 - P_1 2\Delta x_3); \\
 &\dots \quad \dots \quad \dots \\
 D_{k,\max} &= (L_0 + L_1 k \Delta x_3 - P_0) \times \\
 &\times (L_0 + L_1 k \Delta x_3 - P_0 - P_1 \Delta x_3) \dots \\
 &[L_0 + L_1 k \Delta x_3 - P_0 - P_1 (k-1) \Delta x_3].
 \end{aligned} \right\} (15)$$

Введя обозначение  $\vartheta = L_0 + L_1 k \Delta x_3 - P_0$ , последнюю строчку выражения (15) можно преобразовать:

$$D_{k,\max} = \vartheta(\vartheta - P_1 \Delta x_3)(\vartheta - P_1 2\Delta x_3) \dots [ \vartheta - P_1 (k-1) \Delta x_3 ]. \quad (16)$$

Зная конкретные значения коэффициентов верхней и нижней границ изменения РСФП, а также расстояние между узлами модели НСФП

из (15), нетрудно определить максимальные коэффициенты усиления  $D_j$ , а следовательно, правильно выбрать веса  $\mu_j$ .

**Выводы.** Предложен метод преобразования структурных схем измерительных устройств с последовательной коррекцией, позволяющий применить аппарат теории идентификации. Решена задача синтеза сепарабельных систем самонастройки характеристик измерительных устройств с последовательным корректором, реализующим полином Ньютона.

#### Библиографический список

1. Антипов В.А. Системный анализ методов автоматической коррекции погрешностей измерительных устройств // Вестник РГРТА. Вып. 18. – Рязань, 2006. – С. 51-58.
2. Антипов В.А., Мелёхин В.П. Повышение точности средств измерений. – М.: Радиотехника, 2007. – 262 с.