

УДК 537.612.2

Д.Е. Корытчинков, А.А. Трубицын, А.А. Дягилев

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ СОЛЕНОИДА

Разработаны алгоритм и программа численного моделирования магнитного поля соленоида, содержащего произвольное количество витков и слоев намотки. Проведено тестирование предложенной методики на задачах с известными аналитическими решениями.

В основе работы большого класса приборов для научных исследований и промышленных установок разного назначения лежат процессы взаимодействия потоков заряженных частиц с веществом в различных агрегатных состояниях. При этом важной самостоятельной научной и технической задачей является задача управления параметрами таких потоков, которое осуществляется воздействием на них магнитных или электрических полей определенной конфигурации.

Известный способ возбуждения магнитного поля в пространстве основывается на пропускании электрического тока через проводники. При этом наиболее общим законом, устанавливающим связь между индукцией \vec{B} магнитного поля и величиной I и формой (l) тока, является закон Био-Савара-Лапласа [1]

$$\vec{B} = \int \frac{I d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3(x_0, y_0, z_0, x, y, z)}, \quad (1)$$

где $d\vec{l}(x_0, y_0, z_0)$ - элемент контура, сонаправленный с током; \vec{r} - расстояние между данным элементом и точкой наблюдения $P(x, y, z)$ (рисунок 1). Здесь $I = I_{СИ} \cdot 10^{-7}$, где $I_{СИ}$ - ток, измеряемый в амперах.

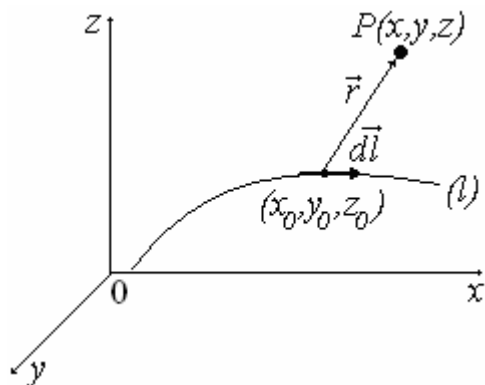


Рисунок 1 – К расчету магнитного поля на основании закона Био-Савара-Лапласа

Одним из основных технических источников магнитного поля в отсутствие ферромагне-

тиков является соленоид как совокупность простейших круговых токов. Однако непосредственное применение закона Био-Савара-Лапласа даже к расчету поля кругового витка во всем пространстве затруднено вследствие проблем с аналитическим интегрированием в формуле (1).

Далее будет представлен алгоритм численного решения задачи вычисления поля кругового витка, а полученные результаты обобщены на методику определения поля произвольного соленоида.

Суть алгоритма в следующем. Плоский проводник, расположенный в плоскости xOy , разбивается на N одинаковых сегментов длиной Δl (рисунок 2). Расстояние r считается постоянным при интегрировании по элементу Δl_i и равным расстоянию между средней точкой сегмента с координатами (x_i, y_i, z_i) и точкой P . В таком приближении интеграл (1) записывается в следующем виде:

$$\vec{B} \approx I \sum_{i=1}^N \int \frac{d\vec{l} \times \vec{r}_i}{r_i^3} \approx I \sum_{i=1}^N \frac{1}{r_i^3} \int d\vec{l} \times \vec{r}_i. \quad (2)$$

Далее учитывается, что $d\vec{l} = d\vec{l}(dx, dy, 0)$ и $\vec{r}_i = \vec{r}_i(x - x_i, y - y_i, z)$, а также записывается векторное произведение через определитель

$$d\vec{l} \times \vec{r}_i = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ dx & dy & 0 \\ x - x_i & y - y_i & z \end{vmatrix} =$$

$$= zdy \cdot \vec{i} - zdx \cdot \vec{j} + [(y - y_i)dx - (x - x_i)dy] \cdot \vec{k}.$$

В таком случае интеграл по отрезку Δl_i элементарно выражается как

$$\int_{(\Delta l_i)} d\vec{l} \times \vec{r}_i = z\Delta y_i \cdot \vec{i} - z\Delta x_i \cdot \vec{j} + [(y - y_i)\Delta x_i - (x - x_i)\Delta y_i] \cdot \vec{k}. \quad (3)$$

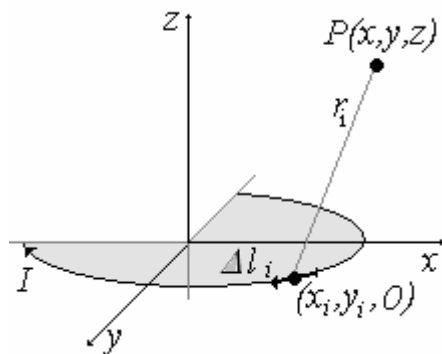


Рисунок 2 – К численному определению магнитного поля плоского тока

Поскольку в координатной форме вектор магнитной индукции $\vec{B} = B_x \cdot \vec{i} + B_y \cdot \vec{j} + B_z \cdot \vec{k}$, то на основании формул (2) и (3) составляющие вектора \vec{B} по осям координат формализуются следующим образом:

$$B_x = I \sum_{i=1}^N \frac{z \cdot \Delta y_i}{r_i^3}, \quad B_y = -I \sum_{i=1}^N \frac{z \cdot \Delta x_i}{r_i^3},$$

$$B_z = I \sum_{i=1}^N \frac{(y - y_i) \cdot \Delta x_i - (x - x_i) \cdot \Delta y_i}{r_i^3}, \quad (4)$$

где расстояние r имеет очевидное выражение через координаты середин сегментов разбиения проводника с током и точки наблюдения

$$r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + z^2}.$$

Таким образом, вычисление магнитного поля, создаваемого плоском контуром с током, по сути, сводится к вычислению координат середин сегментов $\Delta l_i, i=1 \dots N$, и их проекций на оси Ox и Oy .

Для кругового витка с током, расположенного перпендикулярно к оси Oz с центром в начале координат, достаточно простой алгоритм вычисления этих параметров заключается в разбиении окружности (рисунок 3) на равные дуги с малым угловым размером $\Delta\alpha$, в последующем определении угловой координаты центра сегмента

$$\alpha_i = (i - 1)\Delta\alpha + \frac{\Delta\alpha}{2},$$

в нахождении координат его центра

$$x_i = R \cos \alpha_i, \quad y_i = R \sin \alpha_i, \quad (5)$$

и установлении величин проекций сегмента на оси

$$\Delta x_i = x_{2i} - x_{1i}, \quad \text{где } x_{1i} = R \cos[(i - 1)\Delta\alpha],$$

$$x_{2i} = R \cos(i\Delta\alpha),$$

$$\Delta y_i = y_{2i} - y_{1i}, \quad \text{где } y_{1i} = R \sin[(i - 1)\Delta\alpha],$$

$$y_{2i} = R \sin(i\Delta\alpha). \quad (6)$$

Аналитическое выражение для поля кругового тока на оси симметрии [1]

$$B_0 = \frac{I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}},$$

где z – расстояние от центра витка до рассчитываемой точки, позволяет протестировать предложенную методику численного определения магнитной индукции.

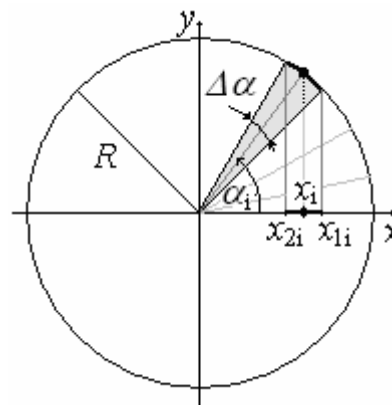


Рисунок 3 – Разбиение кругового контура на сегменты

На рисунке 4 представлена зависимость величины относительной погрешности расчета индукции $B = B_z$ в центре ($z=0$) витка от числа N сегментов разбиения образующей окружности.

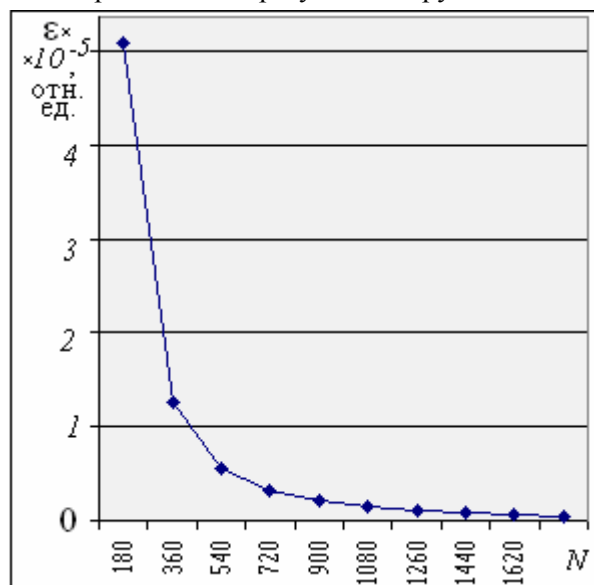


Рисунок 4 – Изменение относительной погрешности расчета индукции в центре витка от числа N сегментов разбиения образующей окружности

На рисунке 5 представлена зависимость абсолютной погрешности вычисления индукции магнитного поля $|B_0 - B_z|$ на оси витка радиу-

сом $R=1$ для $N=180$, откуда следует заключение о достаточно быстром затухании ошибки по мере удаления от плоскости витка.

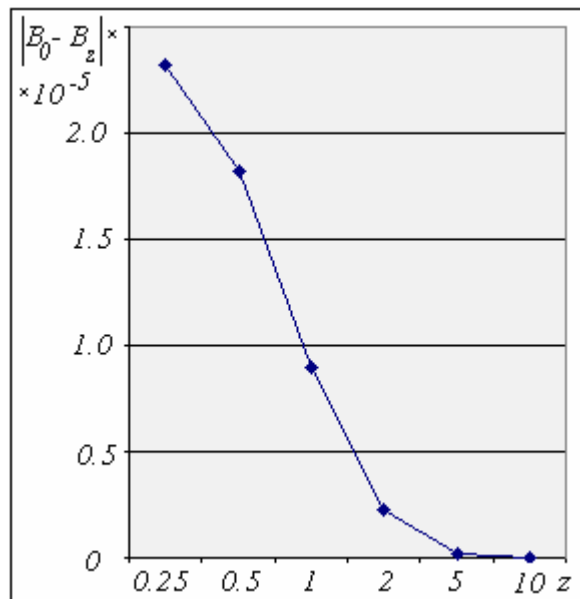


Рисунок 5 – Зависимость абсолютной погрешности вычисления индукции магнитного поля на оси кругового тока от координаты z

Анализ данных рисунке 4 и рисунке 5 позволяет сделать вывод о достаточно высоких аналитических возможностях предложенного алгоритма.

Предложенная методика расчета поля витка легко распространяется на проблему вычисления магнитного поля соленоида, содержащего K слоев и J витков в каждом слое (рисунок 6).

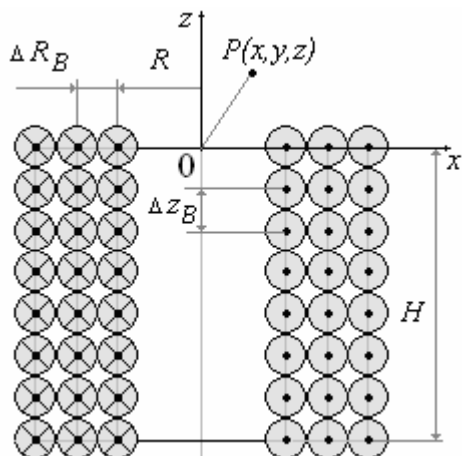


Рисунок 6 – Сечение соленоида

Поле соленоида, верхнее основание которого лежит в плоскости xOy , а ось совпадает с координатной осью Oz , может быть вычислено как двойная сумма по количеству слоев и витков в каждом слое

$$\vec{B}(x, y, z) = \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J \vec{B}_{kj}(x, y, z_j),$$

где составляющие магнитного поля \vec{B}_{kj} каждого витка по осям определяются по формулам (4) с учетом величины радиуса витка k -го слоя $R_k=R+(k-1)\Delta R_B$ для использования в формулах (5, 6), $k=1 \dots K$, и $z_j=z+(j-1)\Delta z_B, j=1 \dots J$. Здесь ΔR_B и Δz_B – разница радиусов витков и расстояние между соседними витками вдоль оси Oz соответственно.

На базе разработанного алгоритма создано программное обеспечение по моделированию магнитного поля соленоида. На рисунке 7 представлена картина линий уровня поля в плоскости симметрии соленоида с внутренним радиусом $R=1$ и длиной $H=10$, содержащего 5 слоев витков и 1000 витков в каждом слое. При разбиении образующей окружности на $N=360$ элементов относительная погрешность расчета поля в центре соленоида составила 0.1 %.

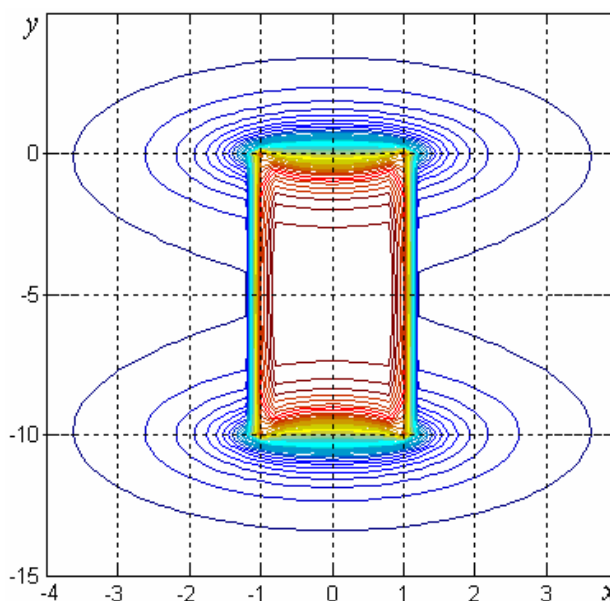


Рисунок 7 – Картина линий уровня магнитного поля соленоида

Заключение. Разработаны алгоритм и программа расчета магнитного поля соленоида в любой точке рабочего пространства. Проведено тестирование методики расчета на системах с аналитическими решениями, позволившее сделать вывод о достижимости практически любого уровня точности, ограниченного лишь ошибками округления и временными ресурсами пользователя.

Библиографический список

1. Яворский Б.М., Детлаф А.А. Справочник по физике для инженеров и студентов вузов.– М.: Наука, 1971. – 940 с.