

УДК 621.376.9

В.А. Белокуров**ОЦЕНКА АМПЛИТУДЫ И КООРДИНАТ ДВИЖУЩЕГОСЯ ОБЪЕКТА
ГАУССОВСКИМ ПАРЦИАЛЬНЫМ ФИЛЬТРОМ С РАЗДЕЛЕНИЕМ
ВЕКТОРА СОСТОЯНИЙ**

Рассмотрен модифицированный гауссовский парциальный фильтр с разделением вектора состояний на две составляющие — линейную и нелинейную. При этом по линейным элементам вектора состояния формируется оценка на основе линейного фильтра Калмана. Нелинейные элементы вектора состояния оцениваются при помощи гауссовского парциального фильтра. Показано, что применение предлагаемого фильтра позволяет оценивать амплитуду сигнала и повысить точность оценки координат движущегося объекта в два раза по сравнению с известным при равном количестве парциальных фильтров.

Ключевые слова: оценка координат движущегося объекта, гауссовский парциальный фильтр.

Введение. Проблема обнаружения движущихся объектов с малым отношением сигнал-шум является одной из ключевых при построении систем слежения как в оптическом, так и в радиодиапазонах. При этом использование стандартных алгоритмов сопровождения в условиях помех (фильтр многогипотезного сопровождения, фильтр вероятностного объединения данных и др.) приводит к экспоненциальному росту вычислительных затрат, что при ограниченных возможностях бортовых вычислителей может привести к сбросу с захвата и с сопровождения траекторий истинных объектов. Это связано с необходимостью уменьшения порога обнаружения на этапе первичной обработки и сортировки траекторий сопровождаемых объектов по каким-либо критериям, к примеру по степени опасности [1]. Кроме того, данные алгоритмы предполагают работу в реальном времени.

В настоящее время наблюдается тенденция к объединению первичной и вторичной обработки радиолокационной информации [2]. Обнаружение объекта и оценка параметров движения осуществляются на основе алгоритмов нелинейной фильтрации.

Известно [3], что нелинейная фильтрация заключается в рекурсивном вычислении апостериорной плотности распределения вероятностей $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k)$ вектора состояний для дискретной модели, учитывающей наблюдаемые измерения:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k) = \frac{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{k-1})}{p(\mathbf{z}_k | \mathbf{Z}_{k-1})},$$

где \mathbf{x}_k — вектор состояния; \mathbf{z}_k — вектор измерений; \mathbf{Z}_k — массив входных отсчётов. Аналитическое вычисление $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k)$ возможно для ограниченного набора ситуаций: шумы измерений и шумы состояния должны иметь гауссовский закон распределения вероятностей и связь между измерениями и вектором состояния должна быть линейной [4]. В радиолокационных приложениях в качестве измерений используются отсчёты амплитудного спектра в стробах по дальности [5]. Темп поступления данных определяется периодом обзора T . Вектор измерений при этом состоит из пикселей. Под пикселем подразумевается значение амплитудного спектра в одном канале по скорости и одном стробе по дальности.

На практике широкое распространение получили методы численного вычисления [6,7] $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k)$. Среди них наибольшей эффективностью обладают методы парциальной фильтрации [7]. Основной проблемой реализации парциальной фильтрации является большое число вычислительных операций, зависящее от числа парциальных фильтров, число которых на практике доходит до сотен тысяч [8]. При стремлении числа фильтров к бесконечности точность оценки элементов вектора состояния стремится к границе Рао – Крамера.

Другой проблемой является увеличение размерности вектора состояний. Поэтому на практике размер вектора состояния ограничива-

ют величиной 8..10 [9]. Перспективным методом решения данных проблем является разделение вектора состояния на два, один вектор состояния условно линейный, а второй – нелинейный.

Цель работы состоит в модификации известного гауссовского парциального фильтра путём разделения вектора состояний на линейную и нелинейную части, позволяющую оценить амплитуду сигнала без пересортировки парциальных фильтров.

Постановка задачи

Пусть вектор \mathbf{x}_k состояния в k -й момент времени определяется соотношением:

$$\mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{v}_{k-1}),$$

где $f(\bullet)$ — нелинейная функция, связывающая вектор состояния на k -м и $(k-1)$ -м шагах; \mathbf{v} — вектор шумов процесса на $(k-1)$ -м шаге.

Вектор \mathbf{x}_k состояния содержит следующие компоненты:

$$\mathbf{x}_k = [x \quad \dot{x} \quad y \quad \dot{y} \quad A]^T,$$

где x, y — двумерные координаты объекта в пикселах; \dot{x}, \dot{y} — скорости объекта в пиксел/секунда; A — амплитуда сигнала. Использование классических алгоритмов парциальной фильтрации для оценки вектора состояния \mathbf{x}_k предполагает формирование выборок по всем составляющим вектора, что на практике [2] приводит к существенному возрастанию вычислительных затрат либо уменьшению точности оценки вектора \mathbf{x}_k при ограниченном количестве парциальных фильтров. В статье ставится задача повышения точности оценки амплитуды сигнала и точности оценки координат движущегося объекта при фиксированном объеме вычислительных затрат.

Решение задачи

Для решения поставленной задачи разделим вектор состояния на два:

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k^{lin} \\ \mathbf{x}_k^{nlin} \end{bmatrix},$$

где подвекторы \mathbf{x}_k^{lin} , \mathbf{x}_k^{nlin} имеют следующий вид:

$$\mathbf{x}_k^{lin} = [x_k^{lin}]; \quad \mathbf{x}_k^{nlin} = \begin{bmatrix} x_k^{nlin} \\ \dot{x}_k^{nlin} \\ y_k^{nlin} \\ \dot{y}_k^{nlin} \end{bmatrix}.$$

Изменение подвекторов вектора состояния системы определяется переходными матрицами \mathbf{F}^{lin} и \mathbf{F}^{nlin} , имеющими следующий вид:

$$\mathbf{F}^{nlin} = \begin{bmatrix} 1 & T & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^{lin} = [1].$$

Изменение во времени подвекторов вектора состояния определяется выражениями:

$$\mathbf{x}_k^{lin} = \mathbf{F}^{lin} \mathbf{x}_{k-1}^{lin} + \mathbf{w}_k^{lin},$$

$$\mathbf{x}_k^{nlin} = \mathbf{F}^{nlin} \mathbf{x}_{k-1}^{nlin} + \mathbf{w}_k^{nlin},$$

где \mathbf{w}_k^{lin} , \mathbf{w}_k^{nlin} — шумы процесса. В работе предполагается, что данные элементы распределены в соответствии с гауссовским законом распределения.

Компоненты вектора \mathbf{z}_k представляют собой массив $\mathbf{z}_k = \{z_{i,j}\}_k$ размером $N_x \times N_y$ пикселей.

Массив \mathbf{z}_k измерений на k -м шаге связан с вектором состояния соотношением:

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k) + \mathbf{n}_k,$$

где $h(\bullet)$ — функция, связывающая вектор \mathbf{x}_k состояния с массивом \mathbf{z}_k измерений; \mathbf{n} — массив отсчетов шума измерений с дисперсией σ_n^2 . Элементы функции $h(\bullet)$ имеют следующий вид [8]:

$$h(\mathbf{x}_k) = \left\{ h(\mathbf{x}_k)_{i,j} \right\}_{i=0}^{N_x-1} \left\{_{j=0}^{N_y-1} = \frac{A \Delta_x \Delta_y}{2\pi \Sigma^2} \exp\left(-\frac{(i\Delta_x - x_k)^2}{2\Sigma^2}\right) \times \exp\left(-\frac{(j\Delta_y - y_k)^2}{2\Sigma^2}\right), \right.$$

где Δ_x, Δ_y — размер объекта в пикселах; Σ — параметр, характеризующий степень размытия объекта. С учётом разделения вектора состояния на два подвектора функция $h(\bullet)$ имеет вид:

$$h(\mathbf{x}_k) = \left\{ \mathbf{x}_k^{lin} \times h(\mathbf{x}_k^{nlin})_{i,j} \right\}_{i=0}^{N_x-1} \left\{_{j=0}^{N_y-1}, \right.$$

$$h(\mathbf{x}_k^{nlin})_{i,j} = \exp\left(-\frac{(i\Delta_x - x_k^{nlin})^2}{2\Sigma^2}\right) \exp\left(-\frac{(j\Delta_y - y_k^{nlin})^2}{2\Sigma^2}\right).$$

Из выражения для $h(\mathbf{x}_k)$ видно, что амплитуда сигнала A линейно связана с измерениями и массив измерений связан с вектором состояния следующим образом:

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k^{lin}) h(\mathbf{x}_k^{nlin}) + \mathbf{n}_k.$$

При разбиении вектора состояния на подвекторы выражение для апостериорной плотности распределения вероятностей $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k)$ примет вид:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_k) = p(\mathbf{x}_k^{lin}, \mathbf{x}_k^{nlin} | \mathbf{Z}_k).$$

Применяя к последнему выражению формулу Байеса, получаем:

$$p(\mathbf{x}_k^{\text{lin}}, \mathbf{x}_k^{\text{nl}} | \mathbf{Z}_k) = p(\mathbf{x}_k^{\text{lin}} | \mathbf{x}_k^{\text{nl}}, \mathbf{Z}_k) p(\mathbf{x}_k^{\text{nl}} | \mathbf{Z}_k).$$

Плотность распределения вероятностей $p(\mathbf{x}_k^{\text{lin}} | \mathbf{x}_k^{\text{nl}}, \mathbf{Z}_k)$ определяется с помощью фильтра Калмана:

$$p(\mathbf{x}_k^{\text{lin}} | \mathbf{x}_k^{\text{nl}}, \mathbf{Z}_k) = N(\mathbf{x}_k^{\text{lin}}, \mathbf{D}_k),$$

где $\mathbf{x}_k^{\text{lin}}$ — оценка линейного подвектора вектора состояния на k -м шаге; \mathbf{D}_k — дисперсия ошибок фильтрации линейного подвектора вектора состояния на k -м шаге; $N()$ — функция плотности распределения вероятностей гауссовского случайного процесса.

Для вычисления плотности распределения вероятностей $p(\mathbf{x}_k^{\text{nl}} | \mathbf{Z}_k)$ используется метод парциальной фильтрации. Один из возможных подходов к ее вычислению заключается в аппроксимации плотности гауссовской кривой. Фильтр, реализующий подобный подход, в литературе называется гауссовским парциальным фильтром [10]. В данном фильтре отсутствует операция пересортировки парциальных фильтров [11], что существенно сокращает вычислительные ресурсы, необходимые для реализации.

Применяя правило Байеса, плотность распределения $p(\mathbf{x}_k^{\text{nl}} | \mathbf{Z}_k)$ приведем к виду:

$$p(\mathbf{x}_k^{\text{nl}} | \mathbf{Z}_k) = C_k p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^{\text{nl}}) p(\mathbf{x}_k^{\text{nl}} | \mathbf{Z}_{k-1}),$$

где C_k — нормировочная константа.

Апостериорная плотность распределения вероятностей $p(\mathbf{x}_{k+1}^{\text{nl}} | \mathbf{Z}_k)$ имеет вид:

$$p(\mathbf{x}_{k+1}^{\text{nl}} | \mathbf{Z}_k) = \int p(\mathbf{x}_{k+1}^{\text{nl}} | \mathbf{x}_k^{\text{nl}}) p(\mathbf{x}_k^{\text{nl}} | \mathbf{Z}_k) d\mathbf{x}_k^{\text{nl}}.$$

Классический гауссовский парциальный фильтр аппроксимирует плотности $p(\mathbf{x}_k^{\text{nl}} | \mathbf{Z}_k)$ и $p(\mathbf{x}_{k+1}^{\text{nl}} | \mathbf{Z}_k)$ многомерным гауссовским законом распределения. При этом плотности имеют вид:

$$p(\mathbf{x}_k^{\text{nl}} | \mathbf{Z}_k) \approx N(\boldsymbol{\mu}_k, \mathbf{D}_k^{\text{nl}}),$$

$$p(\mathbf{x}_{k+1}^{\text{nl}} | \mathbf{Z}_k) \approx N(\boldsymbol{\mu}_{k+1}, \mathbf{D}_{k+1}^{\text{nl}}),$$

где $\boldsymbol{\mu}_k, \boldsymbol{\mu}_{k+1}, \mathbf{D}_k^{\text{nl}}, \mathbf{D}_{k+1}^{\text{nl}}$ — векторы с математическими ожиданиями и матрицы ковариаций вектора состояния (x, y, \dot{x}, \dot{y}) , которые вычисляются следующим образом:

$$\boldsymbol{\mu}_k = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \mathbf{x}_k^{\text{nl}(m)}, \boldsymbol{\mu}_{k+1} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \mathbf{x}_{k+1}^{\text{nl}(m)},$$

$$\mathbf{D}_k^{\text{nl}} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} (\boldsymbol{\mu}_k - \mathbf{x}_k^{\text{nl}(m)})(\boldsymbol{\mu}_k - \mathbf{x}_k^{\text{nl}(m)})^T,$$

$$\mathbf{D}_{k+1}^{\text{nl}} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} (\boldsymbol{\mu}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1}^{\text{nl}(m)})(\boldsymbol{\mu}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1}^{\text{nl}(m)})^T,$$

где M — число парциальных фильтров.

Вычисление $p(\mathbf{x}_k^{\text{nl}} | \mathbf{Z}_k)$ начинается с формирования выборки случайных величин $\{x_i^{\text{nl}}\}_{i=0}^{M-1}$, распределённых по гауссовскому закону $N(\boldsymbol{\mu}_0, \mathbf{D}_0^{\text{nl}})$. Для формирования случайных величин с заданным законом распределения используем метод формирующего фильтра [12].

На следующих этапах периодически повторяются процедуры экстраполяции и фильтрации, включающие:

этап экстраполяции:

- формируются выборки случайных величин $\mathbf{x}_k^{\text{nl}(j)}$ с законом распределения $N(\boldsymbol{\mu}_{k-1}, \mathbf{D}_{k-1}^{\text{nl}})$, $j=0..M-1$;

- для каждого элемента вектора состояния $\mathbf{x}_k^{\text{nl}(j)}$ формируются экстраполированные значения в соответствии с переходными матрицами \mathbf{F}^{lin} и \mathbf{F}^{nl} ;

- вычисляются математическое ожидание и ковариации экстраполированных значений $\boldsymbol{\mu}_k, \mathbf{D}_k^{\text{nl}}$;

этап фильтрации:

- формируются выборки случайных величин с законом $\mathbf{x}_k^{\text{nl}(j)}$ распределения $N(\boldsymbol{\mu}_k, \mathbf{D}_k^{\text{nl}})$, $j=0..M-1$;

- формируется оценка линейного подвектора вектора состояния на основе уравнений дискретного фильтра Калмана в j -м парциальном фильтре:

$$\mathbf{x}_k^{\text{lin}(j)} = \mathbf{x}_{k-1}^{\text{lin}(j)} + \mathbf{K}(z - \mathbf{H}\mathbf{x}_k^{\text{lin}(j)} h(\mathbf{x}_k^{\text{nl}(j)})),$$

$$\mathbf{D}_f = \mathbf{D}_e - \mathbf{K}\mathbf{H} h(\mathbf{x}_k^{\text{nl}(j)}),$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{H}\mathbf{D}_e\mathbf{H}^T + \mathbf{R}_n,$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{D}_e\mathbf{H}\mathbf{S}^{-1},$$

где $\mathbf{D}_f, \mathbf{D}_e$ — матрицы дисперсий ошибок фильтрации и экстраполяции; \mathbf{K} — коэффициент усиления фильтра Калмана; \mathbf{R}_n — матрица с дисперсиями шума измерений; \mathbf{S} — матрица дисперсий невязок измерений и экстраполированных измерений; z — измерение, которое формируется следующим образом: на основе координат x_j^{nl} и y_j^{nl} определяются координаты пиксела в масиве \mathbf{z}_k измерений:

$$i^x = \left\lfloor \frac{x_j^{\text{nl}}}{\Delta_x} \right\rfloor, j^y = \left\lfloor \frac{y_j^{\text{nl}}}{\Delta_y} \right\rfloor,$$

где $\lfloor \cdot \rfloor$ — операция взятия целой части числа;

- вычисляются веса $\{w_j\}_{j=0}^{M-1}$ парциальных фильтров на основе функции правдоподобия. Функция правдоподобия $p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^{\text{nl}(j)})$ с учётом

статистической независимости свойств шума в пикселах имеет вид:

$$w_j = p(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^{\text{nl}(j)}) = \prod_{i=0}^{N_x-1} \prod_{j=0}^{N_y-1} p(z_k^{(i,j)} | \mathbf{x}_k^{\text{nl}(j)}),$$

где функция правдоподобия в каждом пикселе имеет вид распределения Релея – Райса [13]:

$$p(z_k^{(i,j)} | \mathbf{x}_k^{\text{nl}(j)}) = \frac{z_k^{(i,j)}}{\sigma_n^2} \exp\left(-\frac{((z_k^{(i,j)})^2 + h(\mathbf{x}_k^{\text{lin}}, \mathbf{x}_k^{\text{nl}(j)})^2)}{2\sigma_n^2}\right) \times I_0\left(\frac{z_k^{(i,j)} h(\mathbf{x}_k^{\text{lin}}, \mathbf{x}_k^{\text{nl}(j)})}{\sigma_n^2}\right),$$

где $I_0(\bullet)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка;

- нормализуются веса парциальных фильтров:

$$w_j = \frac{w_j}{\sum_{i=0}^{M-1} w_i};$$

- оценка вектора математических ожиданий и ковариаций вектора состояний:

$$\mu_k = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} w_m \mathbf{x}_k^{\text{nl}(m)},$$

$$D_k^{\text{nl}} = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} (\mu_k - \mathbf{x}_k^{\text{nl}(m)})(\mu_k - \mathbf{x}_k^{\text{nl}(m)})^T.$$

Результаты моделирования. Для проверки работоспособности предлагаемого алгоритма проведено имитационное моделирование. Сравнение проведено с алгоритмом, представленным в [14].

Параметры моделирования: число парциальных фильтров 1000; $N_x = N_y = 10$; скорость объекта $\dot{x} = \dot{y} = 0.1$ пиксел/с; отношение сигнал-шум меняется в диапазоне от 5 дБ до 11 дБ; шум процесса 0.01; $\Delta_x = \Delta_y = 1$; $\Sigma = 0.7$; число обзоров 50; элементы переходной матрицы вероятностей имеют вид: 0.9 и 0.1. На рисунке 1 показана СКО оценки координат движущегося объекта при разных отношениях сигнал-шум. Жирная сплошная линия соответствует отношению сигнал-шум 5 дБ, пунктирная линия соответствует 6.7 дБ, штрихпунктирная соответствует 9.2 дБ, тонкая сплошная соответствует 11 дБ.

Как видно из рисунка, при увеличении отношения сигнал-шум СКО измерения координат объекта уменьшается. Кроме того, при увеличении числа обзоров k точность оценки увеличивается.

На рисунке 2 показана СКО оценки координат предлагаемым алгоритмом и алгоритмом, представленным в [14] при одинаковом количестве парциальных фильтров.

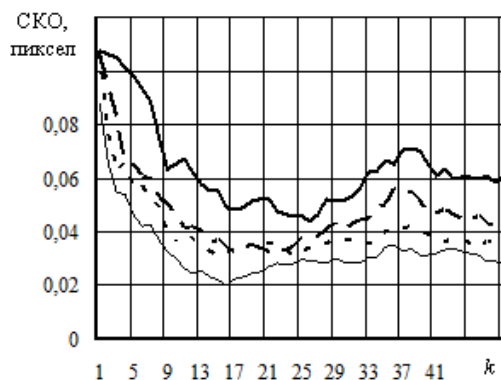


Рисунок 1 — СКО оценки координат движущегося объекта от номера обзора

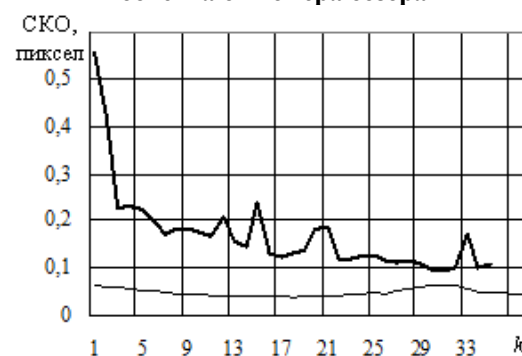


Рисунок 2 — Сравнение СКО оценок координат движущегося объекта предлагаемым алгоритмом и известным

На рисунке 2 жирная сплошная линия соответствует СКО оценки координат алгоритмом [14], тонкая — предлагаемым алгоритмом. Как видно из рисунка, предлагаемый алгоритм обеспечивает меньшую СКО оценки. Это связано с тем, что в алгоритме [14] общее число парциальных фильтров также используется для формирования выборок из априорного диапазона значений амплитуды сигнала.

На рисунке 3 показана СКО оценки амплитуды сигнала при разных отношениях сигнал-шум.

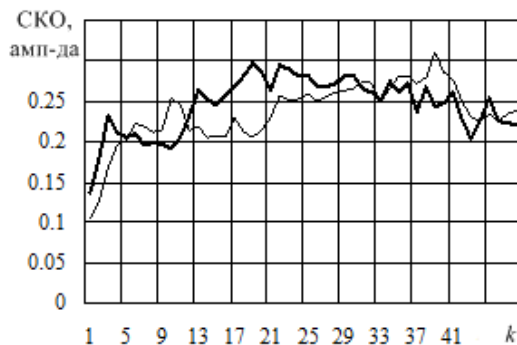


Рисунок 3 — СКО оценки амплитуды сигнала от номера обзора

Жирная сплошная линия соответствует отношению сигнал-шум 5 дБ, сплошная тонкая соответствует отношению сигнал-шум 3 дБ. Как

видно из рисунка, зависимости практически совпадают. Это объясняется тем, что в качестве измерений выступают отсчёты амплитудного спектра в пикселах, определяемые дискретными значениями параметров движения. Т.е. на точность оценки амплитуды сигнала оказывает влияние точность оценки координат объекта.

Выводы. Таким образом, в работе синтезирован алгоритм совместной оценки амплитуды сигнала и параметров движения на основе разбиения вектора состояния на два подвектора. Данный алгоритм обеспечивает возможность оценивания параметров движения объекта, причем СКО оценки координат уменьшается примерно в 2 раза по сравнению с классическим алгоритмом [14] при одинаковом количестве парциальных фильтров. Кроме того, в отличие от алгоритма "сопровождение до обнаружения" на основе гауссовского парциального фильтра, в котором требуется априорное знание амплитуды сигнала, в предлагаемом алгоритме производится оценка амплитуды сигнала.

Работа поддержана грантом (государственный регистрационный номер 01201461760) Министерства образования и науки Российской Федерации, задача № 2014/178 (код проекта 881).

Библиографический список

1. Blackman S., Papoli R. Design and Analysis of Modern Tracking System. MA: Artech House, 1999. P. 1046.
2. Ristic B., Arulampalam S., Gordon N.J. Beyond the Kalman Filter: Particle Filters for Tracking Applications. N.-Y.: Artech House, 2004. P. 318.
3. Bar-Shalom Y. Estimation with Applications to Tracking and Navigation. MA: Artech House, 2003. P. 895.
4. Gustafsson F. Adaptive filtering and change detection. N.-Y.: John Wiley & Sons, 2011. P. 456.
5. Белокуров В.А. Обнаружение объекта при низком отношении сигнал-шум // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2014. № 48. С. 146-149.
6. Arulampalam S., Maskell S., Gordon N. and Clapp T. A tutorial on particle filters for on-line nonlinear/non-Gaussian Bayesian tracking // IEEE Transactions on Signal Processing. 2002. № 2. P. 174–188.
7. Gordon N., Salmond D. and Smith A. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation // IEEE Transactions on Signal Processing. 1993. №2. P. 107–113.
8. Rollason M., Salmond D. A particle filter for track-before-detect of a target with unknown amplitude // IEE Target Tracking: Algorithm and Applications. 2001. Volume 1. P. 141–144.
9. Thomas S., Gustafsson F. Marginalized particle filters for mixed linear/nonlinear state-space models // IEEE Transactions on Signal Processing. 2005. № 6. P. 2279-2289.
10. Kotecha J., Djuric P. Gaussian Particle Filtering // IEEE Transactions on Signal Processing. 2003. №10. P. 2592-2601.
11. Doucet A., Frietas N. Sequential Monte Carlo Methods in Practice. N.-Y.: Springer, 2001. P. 357.
12. David B. Multivariate Gaussian Random Number Generation Targeting Reconfigurable Hardware // ACM Transactions on Reconfigurable Technology and Systems. 2008. № 6. P.10-23.
13. Информационные технологии в радиотехнических системах: учеб. пособие / под ред. И.Б. Фёдорова. М.: Изд-во им. Н.Э. Баумана, 2004. 768 с.
14. Rutten M., Gordon N. Recursive track-before-detect with target amplitude fluctuations // IET Proceedings on Radar, Sonar and Navigation. 2005. №10. P. 345–352.