УДК 517. 938

Н.М. Турусикова

О РАЗРЕШИМОСТИ ДВУХТОЧЕЧНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЯЕМОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассматривается задача нахождения управления, при котором объект, описываемый системой дифференциальных уравнений, переходит из начала координат в конечное состояние за заданный промежуток времени. Установлены достаточные условия разрешимости двухточечной краевой задачи в предположении, что импульсная переходная матрица объекта является неособенной.

1. Введение. Реальные процессы окружающего мира зачастую являются управляемыми, то есть протекают в зависимости от конкретного воздействия на них управляющей стороны. В последнее время интерес к задаче управления особенно возрос, что связано, в частности, с ограниченностью природных ресурсов, развитием техники, ростом возможностей ЭВМ, благодаря которым стали осуществимы расчет и реализация сложных законов управления. При исследовании математических моделей часто возникает задача о построении управляющего воздействия, которое переводит объект из начального состояния в некоторое конечное.

В данной работе описан процесс построения управления при разбиении исходного промежутка времени на части, конечное состояние не является заранее заданным.

2. Постановка задачи. В качестве математической модели объекта управления выбран процесс, удовлетворяющий нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + f(t,x,u), \qquad (1)$$

в которой $x \in E_n$, $u \in E_n$, u – управление, $t \in [0,T]$, T – некоторое положительное число, E_k – k-мерное векторное пространство.

Введем следующие обозначения: $|s| = \max_i \{|s_i|\}$, $\|y(\cdot)\| = \sup_{t\in[0,T]} |y(t)|$, $\|B(t)\| = \sup_{|s|\le 1} |B(t)s|$, $\|B(.)\| = \sup_{t\in[0,T]} \|B(t)\|$, $s \in E_k$, $y(t)$ – вектор-функция, $B(t)$ – матрица, $D(\delta_0) = \{(t,x,u): t\in[0,T], x\in E_n, u \in E_n, |x| \le \delta_0, |u| \le \delta_0\}$, $\delta_0 > 0$ – некоторое число.

Предположим, что выполняются условия:

1) $A(t), B(t)$ – непрерывные на сегменте $[0,T]$ матрицы, $B(t)$ – неособенная матрица;

2) $f(t,x,u)$ – n-мерная вектор-функция, непрерывная на множестве $D(\delta_0)$;

3) $\dfrac{f(t,x,u)}{|u|} \to \mathbf{0}, u \to \mathbf{0}$, равномерно относительно $t \in [0,T]$ и x $(|x| \le \delta_0)$.

Здесь $\mathbf{0}$ – n-мерный нулевой вектор.

В качестве допустимых управлений будем рассматривать кусочно-непрерывные на сегменте $[0,T]$ n-мерные вектор-функции $u(t)$, удовлетворяющие условию $\|u(.)\| \le \delta_0$. Множество всех допустимых управлений обозначим $U(\delta_0)$.

Ставится задача – найти управление $u(\cdot) \in U(\delta_0)$, при котором система (1) имеет решение, удовлетворяющее равенствам

$$x(0) = \mathbf{0}, x(T) = \beta. \qquad (2)$$

Пусть $U_0 = \{u(\cdot) \in U(\delta_0): u(t) = H^T(T,t)l = \sum_{i=1}^{n} l_i \bar{h}^{(i)}(T,t), l \in Y(\delta_0), t\in[0,T]\}$, где $\bar{h}^{(i)}(T,t)$, $i=\overline{1,n}$, – вектор-столбец матрицы $H^{\mathrm{T}}(T,t)$, $H(t,\tau) = X(t)X^{-1}(\tau)B(\tau)$ – импульсная переходная матрица, $X(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$, $X(0) = E$, E – единичная матрица, $Y(\delta_0) = \{l \in E_n : |l| \le \delta_0\}$, $(^{\mathrm{T}})$ – знак транспонирования.

Заметим, что в силу условия 1) матрица $H(t,\tau)$ является неособенной на сегменте $[0,T]$. Это значит, что вектор-функции $\bar{h}^{(i)}(t,\tau)$, $i=\overline{1,n}$, линейно независимы на сегменте $[0,T]$, то есть не существует такой системы чисел $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$, $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^2 \ne 0$, что при любых значениях $t, \tau \in [0,T]$

выполнялось бы равенство $\gamma_1\overline{h}^{(1)}(t,\tau)+$ $+\gamma_2\overline{h}^{(2)}(t,\tau)+\ldots+\gamma_n\overline{h}^{(n)}(t,\tau)=\mathbf{0}$.

3. Преобразование системы, разбиение промежутка времени. Положим $y=x-\dfrac{\beta t}{T}$. Тогда систему (1) можно свести к системе

$$\dot{y}=A(t)y+B(t)u+c(t)+f(t,y+\frac{\beta t}{T},u), \quad (3)$$

где $c(t)=A(t)\dfrac{\beta t}{T}-\dfrac{\beta}{T}$, $f(t,y+\dfrac{\beta t}{T},u)\Big/|u|\to\mathbf{0}$ при $u\to\mathbf{0}$ равномерно по $t\in[0,T]$ и $\xi=y+\dfrac{\beta t}{T}$ таких, что $|\xi|\le 2\delta_0$.

Условия (2) для переменной y будут иметь вид

$$y(0)=\mathbf{0},\ y(T)=\mathbf{0}. \quad (4)$$

Под решением системы (3) будем понимать непрерывную, кусочно-дифференцируемую на сегменте $[0,T]$ вектор-функцию $y(t)$, удовлетворяющую всюду в точках дифференцируемости на этом сегменте системе (3).

Лемма. Пусть при любом $t\in[0,T]$ $\left|\det B(t)B^T(t)\right|\ge d,\ d>0$ – некоторое число. Тогда найдется такое число $\delta>0$, что для любых значений $t',t''\in[0,T]$ выполняется неравенство $\left|\det H(t',t'')H^T(t',t'')\right|>\dfrac{d}{2}$, как только $|t'-t''|<\delta$.

Доказательство леммы проводится методом от противного.

Следствие. Существует такое число $\overline{\delta}>0$, что для любого разбиения сегмента $[0,T]$ на части точками $t_i\in[0,T]$, $i=\overline{0,s}$, выполняется неравенство $\left|\det H(t_i,t_{i-1})H^T(t_i,t_{i-1})\right|>\dfrac{d}{2}$, как только длина частей $|t_i-t_{i-1}|\le\overline{\delta}$, $i=\overline{1,s}$.

4. Доказательство теоремы о разрешимости задачи управления. Пусть $M_i(\delta_0)$ – множество определенных и непрерывных на сегменте $[t_{i-1},t_i]$, $i=\overline{1,s}$, n-мерных вектор-функций $y_i(t)$, удовлетворяющих условиям $y_i(t_{i-1})=\mathbf{0}$, $y_i(t_i)=\mathbf{0}$, $\|y_i(\cdot)\|\le\delta_0$.

Рассмотрим произвольный промежуток $[t_{i-1},t_i]$, $i\in\{1,2,\ldots,s\}$, разбиения сегмента $[0,T]$ на части. Пусть вектор $l_i^0\in Y(\delta_0)$, вектор-функция $y_i^0(\cdot)\in M_i(\delta_0)$, управление $u_i^0(t)=H^T(t_i,t)l_i^0=$ $=\sum\limits_{j=1}^{n}l_{ij}^0\overline{h}^{(j)}(t_i,t)$, $t\in[t_{i-1},t_i]$.

Решение системы $\dot{\overline{y}}=A(t)\overline{y}+B(t)u_i^0+$ $+c(t)+f(t,y_i^0+\dfrac{\beta t}{T},u_i^0)$, определенное на сегменте $[t_{i-1},t_i]$, запишем в виде

$$y_i^1(t)=\int\limits_{t_{i-1}}^{t}H(t,\tau)u_i^0(\tau)d\tau+\int\limits_{t_{i-1}}^{t}X(t,\tau)\times$$
$$\times f\left(\tau,y_i^0(\tau)+\frac{\beta\tau}{T},u_i^0(\tau)\right)d\tau+\int\limits_{t_{i-1}}^{t}X(t,\tau)c(\tau)d\tau, \quad (5)$$

где $X(t,\tau)=X(t)X^{-1}(\tau)$.

Равенство (5) определяет преобразование вектор-функции $y_i^0(t)$ в вектор-функцию $y_i^1(t)$. Запишем равенство (5) при $t=t_i$, $y_i^1(t_i)=\mathbf{0}$. Согласно теореме о среднем и виду управления $u_i^0(t)=H^T(t_i,t)l_i^0$, сократив на t_i-t_{i-1}, получим систему линейных уравнений $\Lambda_i l_i^0=\psi(T,y_i^0,l_i^0)$, в которой матрица $\Lambda_i=H(t_i,\overline{t})H^T(t_i,\overline{t})$, $\overline{t}\in(t_{i-1},t_i)$, вектор $\psi(T,y_i^0,l_i^0)=-X(t_i,\overline{t})c(\overline{t})-$ $-X(t_i,\overline{t})f\left(\overline{t},y_i^0(\overline{t})+\dfrac{\beta\overline{t}}{T},u_i^0(\overline{t})\right)$.

Матрица Λ_i является неособенной как произведение двух неособенных матриц $H(t_i,\overline{t})$ и $H^T(t_i,\overline{t})$. Следовательно, существует Λ_i^{-1}.

Заметим, что $\left\|\Lambda_i^{-1}\right\|=\left\|\dfrac{\widetilde{\Lambda}_i^T}{\det\Lambda_i}\right\|=\dfrac{\left\|\widetilde{\Lambda}_i\right\|}{|\det\Lambda_i|}$, где $\widetilde{\Lambda}_i$– матрица из алгебраических дополнений к элементам матрицы Λ_i. В силу непрерывности элементов матрицы Λ_i на сегменте $[t_{i-1},t_i]$ норма $\left\|\widetilde{\Lambda}_i\right\|$ ограничена сверху. По лемме $\left|\det H(t_i,\overline{t})H^T(t_i,\overline{t})\right|>\dfrac{d}{2}$, как только $|t_i-\overline{t}|\le\overline{\delta}$. Следовательно, существует такое число $K>0$, что $\left\|\Lambda_i^{-1}\right\|\le K$.

На множестве $\overline{Z}_i(\delta_0)=\{z_i(\cdot)=(y_i(\cdot),l_i):$ $y_i(\cdot)\in M_i(\delta_0),l_i\in Y(\delta_0),\|z_i(\cdot)\|\le\delta_0\}$ определим оператор $F_iz_i(\cdot)=\begin{pmatrix}F_{1i}y_i(\cdot)\\F_{2i}l_i\end{pmatrix}$ согласно равенствам

$$F_{1i}y_i(t)=\int_{t_{i-1}}^{t}H(t,\tau)u_i(\tau)d\tau+\int_{t_{i-1}}^{t}X(t,\tau)\times$$

$$\times f\left(\tau,y_i(\tau)+\frac{\beta\tau}{T},u_i(\tau)\right)d\tau+\int_{t_{i-1}}^{t}X(t,\tau)c(\tau)d\tau, \quad (6)$$

$$F_{2i}l_i=\Lambda_i^{-1}\psi(T,y_i,l_i). \quad (7)$$

Обозначим $M=\|H(\cdot,\cdot)\|^2|l_i|+\|X(\cdot,\cdot)\|\|c(\cdot)\|+$ $+\|X(\cdot,\cdot)\|\|f\|$, где $\|f\|=\sup\left\|f(t,y_i(t)+\frac{\beta t}{T},u_i(t))\right\|$ на множестве $[0,T]\times\left\{(t,y):\left|y+\frac{\beta t}{T}\right|\le 2\delta_0\right\}\times U_0$.

Теорема. Пусть выполняются условия 1), 2), 3). Тогда существует вектор β, при котором задача (3), (4) имеет решение.

Доказательство. Воспользуемся принципом неподвижной точки и убедимся, что оператор F_i имеет неподвижную точку на множестве $\overline{Z}_i(\delta_0)$.

Из равенств (6), (7) следует, что оператор F_i вполне непрерывный на множестве $\overline{Z}_i(\delta_0)$.

Докажем, что существует $\widetilde{\delta}>0$ такое, что оператор F_i отображает множество $\overline{Z}_i(\widetilde{\delta})$ в себя.

Так как $f(t,y+\frac{\beta t}{T},u)\Big/|u|\to\mathbf{0}$ при $u\to\mathbf{0}$ равномерно по $t\in[0,T]$ и $\xi=y+\frac{\beta t}{T}$ таких, что $|\xi|\le 2\delta_0$, то для всякого $\varepsilon>0$ существует такое число $\widetilde{\delta}>0$, что для любого $t\in[0,T]$ и для всех $u:|u|\le\widetilde{\delta}$ выполняется неравенство $\left|\frac{f(t,\xi,u)}{|u|}\right|<\varepsilon$. Откуда $\left|f(t,y+\frac{\beta t}{T},u)\right|<\varepsilon\widetilde{\delta}$.

Возьмем $\varepsilon=\frac{1}{2K\|X(\cdot,\cdot)\|}$. Тогда существует такое число $\delta'>0$, что для любого β $(|\beta|\le\delta')$ выполнены неравенства $K\|X(\cdot,\cdot)\|\|c(\cdot)\|\le\frac{\widetilde{\delta}}{2}$ и

$$|F_{2i}l_i|=\|\Lambda_i^{-1}\|\left|-X(t_i,\bar{t})f\left(\bar{t},y_i(\bar{t})+\frac{\beta\bar{t}}{T},u_i(\bar{t})\right)-\right.$$

$$\left.-X(t_i,\bar{t})c(\bar{t})\right|\le K\|X(\cdot,\cdot)\|\|f\|+K\|X(\cdot,\cdot)\|\|c(\cdot)\|\le\widetilde{\delta}.$$

Выберем число $\bar{\delta}$, определяющее разбиение сегмента $[0,T]$, так, чтобы $\bar{\delta}M\le\widetilde{\delta}$. Тогда будем иметь

$$\|F_{1i}y_i(\cdot)\|\le\int_{t_{i-1}}^{t_i}|H(t_i,\tau)u_i(\tau)|\,d\tau+$$

$$+\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left|X(t_i,\tau)f(\tau,y_i(\tau)+\frac{\beta\tau}{T},u_i(\tau))\right|d\tau+$$

$$+\int_{t_{i-1}}^{t_i}|X(t_i,\tau)c(\tau)|\,d\tau\le(t_i-t_{i-1})M\le\bar{\delta}M\le\widetilde{\delta}.$$

Причем $F_{1i}y_i(t_{i-1})=\mathbf{0}, F_{1i}y_i(t_i)=\mathbf{0}$.

Так как $\|F_iz_i(\cdot)\|=\max\{\|F_{1i}y_i(\cdot)\|,|F_{2i}l_i|\}\le\widetilde{\delta}$, то для любого $z_i(\cdot)\in\overline{Z}_i(\widetilde{\delta})$ выполняется $F_iz_i(\cdot)\in\overline{Z}_i(\widetilde{\delta})$, следовательно, данный оператор отображает множество $\overline{Z}_i(\widetilde{\delta})$ в себя.

Итак, вполне непрерывный оператор F_i отображает ограниченное выпуклое замкнутое множество $\overline{Z}_i(\widetilde{\delta})$ в себя. Согласно принципу неподвижной точки Ю. Шаудера [1] существует неподвижная точка $\left(y_i^*(t),l_i^*\right)$ оператора F_i. Следовательно, мы можем построить кусочно-непрерывное управление $u^*(t)$, определенное на всем отрезке $[0,T]$, равное вектор-функции $u_i^*(t)=\sum_{k=1}^{n}l_{ik}^*\bar{h}^{(k)}(t_i,t)$, если $t\in[t_{i-1},t_i)$, $i=\overline{1,s-1}$, и $u_s^*(t)=\sum_{k=1}^{n}l_{sk}^*\bar{h}^{(k)}(t_i,t)$, если $t\in[t_{s-1},T]$, при котором система (3) имеет решение $y^*(t)$, удовлетворяющее краевым условиям (4). Теорема доказана.

Чтобы получить решение задачи (1), (2), достаточно выполнить обратную замену переменных.

5. Выводы. Исследована двухточечная краевая задача управляемой системы дифференциальных уравнений, получены условия существования управления, при котором система (1) имеет решение $x(t)$, удовлетворяющее краевым условиям (2).

Полученные результаты могут быть использованы в задачах об управлении, то есть в задачах об определении управляющих сил, которые переводят динамическую систему, описываемую системой дифференциальных уравнений, из начального состояния в некоторое конечное, в частности, материал может быть полезен при исследовании математических моделей биологических, социально-экономических, химических, экологических процессов.

Библиографический список

1. *Люстерник, Л.А.*, *Соболев, В.И.* Элементы функционального анализа.– М.: Наука, 1965. – 520 с.