УДК 004.94; 004.02

# РАЗРАБОТКА И АНАЛИЗ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДОРОЖНОГО ТРАФИКА С НЕДЕТЕРМИНИРОВАННЫМ ЗАКОНОМ ВРЕМЕНИ ПОСТУПЛЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ СРЕДСТВ

**А. С. Алёшкин,** к.т.н., доцент кафедры интеллектуальных технологий и систем Московского технологического университета (МИРЭА), Antony@testor.ru
**С. А. Лесько,** к.т.н., доцент кафедры управления и моделирования систем Московского технологического университета (МИРЭА), Sergey@testor.ru
**Д. О. Жуков,** д.т.н., профессор, заведующий кафедрой интеллектуальных технологий и систем Московского технологического университета (МИРЭА), ZhukovDm@yandex.ru

***Целью работы*** *является создание модели дорожного движения для решения задачи оптимизации транспортных потоков. На основе рассмотрения схем вероятностей переходов между состояниями транспортного узла было получено дифференциальное уравнение второго порядка и сформулирована краевая задача, решение которой описывает зависимость вероятности блокирования отдельных узлов транспортной сети от характеристик дорожного движения с течением времени. Проведенное исследование длин образующихся на светофорах очередей показывает примерно двукратное снижение числа пробок при использовании разработанной модели «регулируемых» светофоров по сравнению с моделью «классическое движение» с фиксированным временем переключения.*

***Ключевые слова:*** *транспортная сеть, стохастическая динамика блокировки узлов транспортной сети, балансировка потоков, краевая задача.*

**DOI:** 10.21667/1995-4565-2016-56-2-99-106

## Введение

Задачей данного исследования являются разработка и анализ математических моделей балансировки потоков и управления трафиком в транспортных системах с целью возможного уменьшения дорожных очередей (пробок).

Существующие математические модели, используемые для анализа транспортных сетей и управления их работой, весьма разнообразны по решаемым задачам, применяемому математическому аппарату, степени детализации движения и используемым данным и могут быть разделены по типу на макроскопические (используют для описания потоков усредненные параметры, например среднюю скорость автомобиля и т.д.) и микроскопические (рассматривается движение каждого автомобиля) [1, 2].

К макроскопическим моделям можно отнести гидродинамические модели. К микроскопическим относятся кинетические модели, модель следования за лидером, модель оптимальной скорости, модели клеточных автоматов (Cellural Automata, CA) и, как частный вариант, модель Нагеля – Шрекенберга, модель прогноза загрузки транспортных сетей, модели равновесного распределения потоков (эти прогнозные модели, в свою очередь, подразделяются еще на несколько видов), модели оптимальных стратегий. Помимо упомянутых выше моделей для управления дорожным трафиком могут быть использованы и другие методы, такие как теория массового обслуживания, теория графов и сетевого анализа, теория нечетких множеств.

Математический аппарат систем массового обслуживания (СМО) является наиболее распространенным математическим аппаратом, применяемым, например, для анализа процессов в информационно вычислительной сети [3], и в определенной степени может быть использован для моделирования транспортных систем (напрашивается очевидная аналогия: дороги – это каналы связи, перекрестки – узлы обслуживания). Классическими работами в области теории СМО являются работы [4-6].

На базе СМО были построены двухуровневые модели, включающие в себя модели магистральной сети, обслуживающей трафик между комплексами ЭВМ и терминальных сетей, описывающих терминальный доступ к комплексам ЭВМ. Модели, базирующиеся на математическом аппарате графов [7], сети Петри [8, 9], помогли устранить допущения о независимости поступления трафика в каждый узел сети.

Также к классическим работам можно отнести работы с применением математического аппарата теории графов и сетевого анализа для анализа процессов в информационно-вычислительных сетях (ИВС). Теория графов позволяет решать многие задачи (маршрутизации, поиска кратчайших путей, планирования, оптимизации потока и др.).

Совместное применение теории графов с теорией нечетких множеств (ТНМ) [10, 11] и теорией вероятности способствовало образованию математического аппарата стохастических сетей (вероятностных графов), позволяющего получить более адекватные модели процессов в ИВС, переходы в которых не могут быть описаны детерминированными величинами.

Теория нечеткой логики (ТНЛ) [12-17] является продолжением ТНМ, в частности ТНЛ оперирует булевыми переменными, вероятность значений которых задает характеристическая функция. Совмещение ТНЛ с теорией принятия решения (ТПР) позволило получить мощный математический аппарат принятия решений в условиях неопределенности влияющих факторов. Данный математический аппарат применяется для принятия решения в задачах оптимизации потоков в ИВС (о кратчайшем пути, о маршрутизации и другие).

ТНЛ также требует описания существующих моделей в ее элементах, что значительно расширяет ее возможности, однако усложняет построение самих моделей принятия решений.

Несмотря на существующие разработки и конкретные решения в области управления, транспортные сети с точки зрения математического моделирования и *управления* являются *очень сложными и плохо изученными* объектами. Можно продемонстрировать сложность их структуры, обратившись к элементу карты любого современного мегаполиса, например можно рассмотреть наземную транспортную сеть столицы одного из европейских государств (см. рисунок 1).


**Рисунок 1 – Пример наземной дорожной сети современного мегаполиса (дорожная карта взята с ресурса www.yandex.ru)**

Также важность решения проблем управления транспортными потоками в Российской Федерации особо подчеркивается рядом законодательных и нормативных документов.

1. Приказ Минтранса РФ от 12 мая 2005 г. N 45 “Об утверждении Транспортной стратегии Российской Федерации на период до 2020 года”.

2. Закон г. Москвы от 5 мая 2010 г. N 17 "О Генеральном плане города Москвы" (с изменениями и дополнениями).

3. Федеральный закон от 8 ноября 2007 г. N 257-ФЗ "Об автомобильных дорогах и о дорожной деятельности в Российской Федерации и о внесении изменений в отдельные законодательные акты Российской Федерации".

Кратко объект управления можно описать следующим образом. Между узлами сети (перекрестками) по ребрам (дорогам) перемещаются автомобили, потоки которых регулируются светофорами с фиксированными или переменными интервалами переключения. При увеличении интенсивности движения автомобили начинают скапливаться на перекрестках и образуется очередь. Когда число машин в очереди достигает для данного направления на перекрестке некоторого критического порога – возникает пробка.

Управлять потоками машин можно, динамически изменяя интервалы времени переключения светофоров. При управлении светофорами (изменение интервалов включения/выключения) необходимо использовать модели, описывающие динамику транспортных потоков с учетом их коррекции, в результате мониторинга числа входящих и выходящих с перекрестка машин, а также материального баланса общего числа машин, находящихся в данный момент в транспортной системе. Кроме того, необходимо учитывать, что соседние узлы транспортной сети создают взаимосвязанные потоки, которые могут иметь недетерминированные характеристики законов распределения.

## Постановка задачи

Разработка эффективной и адекватной математической и информационной модели работы транспортной сети города и управления вряд ли возможна на основе описанных выше традиционных моделей, например теории массового обслуживания. Использование традиционных методов, основанных на пуассоновских входных потоках и экспоненциальном характере времени обслуживания, не всегда оправданно. В случае отклонения коэффициентов вариаций этих распределений от единицы существующие методы аппроксимации, использующие два первых момента распределений входного потока и времени обслуживания, имеют большую погрешность. Распределения и гистограммы потоков, получаемые для реальных сетей в результате измерений нагрузки и потоков, свидетельствуют об отличии потоков в транспортных сетях от пуассоновских.

Решение задачи разработки моделей и алгоритмов управления стохастическими потоками с недетерминированными характеристиками распределения статистических параметров в транспортных сетях с нерегулярной случайной структурой можно разделить на две подзадачи.

1. Разработка модели описания и управления транспортными потоками на уровне отдельных узлов на основе стохастических моделей с недетерминированными параметрами статистических законов распределения времен поступления отдельных объектов (транспортных средств) на узел.

2. Разработка модели управления работоспособностью всей транспортной сети с нерегулярной случайной структурой, например на основе методов теории перколяции и результатов использования стохастических моделей с недетерминированными параметрами.

В рамках решения первой подзадачи могут быть определены зависимости вероятности блокирования отдельных узлов от характеристик дорожного движения с течением времени. В рамках решения второй подзадачи можно, используя данные о вероятности блокировки отдельных узлов, определить зависимость от времени вероятности достижения порога перколяции сети в целом (по сути это является процессом самосогласования). Переход любого узла случайной сети из работоспособного состояния в блокированное состояние можно рассматривать как случайный процесс с некоторой вероятностью перехода, и эта вероятность должна влиять на средний размер кластера (группа напрямую связанных между собой узлов) блокированных узлов.

## Разработка стохастической модели дорожного трафика

*Вывод стохастического уравнения*

Суть разработанной нами для описания функционирования отдельных узлов транспортной модели состоит в следующем: если рассматривать изменение потоков машин как случайный процесс и для каждого направления, каждого узла транспортной сети (перекрестка) задано критически допустимое число машин в очереди $L_{i,j}$, то можно определить вероятность $P(L_{i,j},t)$ того, что к моменту времени $t$ число машин в очереди не превысит $L_{i,j}$ (пробка не образуется).

Пусть за некоторый интервал времени $\tau$ на $j$–й перекресток в $i$–м направлении в очередь поступает $\varepsilon$ машин и уезжает $\xi$ машин. Весь процесс обработки будет складываться из отдельных шагов $h$, имеющих продолжительность τ, причём $\frac{\varepsilon}{\tau}=\lambda$ – интенсивность входного потока, а $\frac{\xi}{\tau}=\mu$ – интенсивность выходного потока машин.

Обозначим через $P_{x-\varepsilon,h}$ – вероятность того, что в очереди после $h$ шагов работы находится $(x-\varepsilon)$ машин, а $P_{x,h}$ – вероятность того, что находятся $x$-машин, и $P_{x+\xi,h}$ – вероятность того, что находится $(x+\xi)$ машин. Тогда вероятность $P_{x,h+1}$ (см. рисунок 2) того, что на $h+1$-м шаге будет находиться $x$ машин, будет равна:

$P_{x,h+1} = P_{x-\varepsilon,h} + P_{x+\xi,h} - P_{x,h}$.

Введем $t=h\tau$, где $t$ – общее время процесса обработки, и получим:

$P(x,t+\tau)=P(x-\varepsilon,t)+P(x+\xi,t)-P(x,t)$.

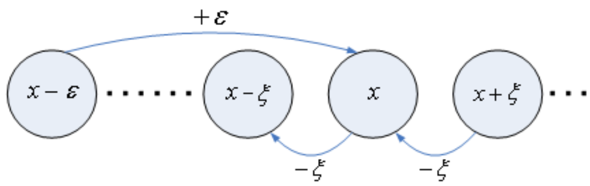


**Рисунок 2 – Схема возможных переходов между состояниями, характеризующими число машин на j-м перекрестке, в i-м направлении на h+1-м шаге работы светофора**

Раскладывая полученное уравнение в ряд Тейлора, получаем:

$$P(x,t)+\tau\frac{dP(x,t)}{dt}+\frac{\tau^2}{2}\frac{d^2P(x,t)}{dt^2}+\ldots=$$
$$=P(x,t)-\varepsilon\frac{dP(x,t)}{dx}+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{d^2P(x,t)}{dx^2}-\ldots+$$
$$+P(x,t)+\xi\frac{dP(x,t)}{dx}+\frac{\xi^2}{2}\frac{d^2P(x,t)}{dx^2}+\ldots-P(x,t).$$

Вторую производную по $t$ можно исключить, поскольку по своему смыслу она описывает процесс, при котором сами машины могли бы быть источниками дополнительных машин. Учитывая в левой части члены, содержащие не более чем первую производную по $t$, а в правой не более чем вторую производную по $x$, получаем:

$$\tau\frac{dP(x,t)}{dt}=\frac{\varepsilon^2+\xi^2}{2}\frac{d^2P(x,t)}{dx^2}-(\varepsilon-\xi)\frac{dP(x,t)}{dx},$$
$$\frac{dP(x,t)}{dt}=\frac{\lambda^2+\mu^2}{2\mu}\frac{d^2P(x,t)}{dx^2}-(\lambda-\mu)\frac{dP(x,t)}{dx}.$$

Считая, что $\mu$ и $\lambda$ не зависят от $x$, и вводя обозначение $a = \dfrac{\lambda^2 + \mu^2}{2\mu}$ и $b = \lambda - \mu$, получаем:

$$\frac{dP(x,t)}{dt} = a\frac{d^2P(x,t)}{dx^2} - b\frac{dP(x,t)}{dx}.$$

Поскольку функция $P(x,t)$ является непрерывной, можно перейти от вероятности $P(x,t)$ к плотности вероятности $\rho(x,t)$, что позволит сформулировать и решить краевую задачу для описания стохастической модели обработки заявок на отдельном узле с недетерминированными параметрами статистического закона распределения времен их поступления.

При формализации описания процесса стохастической динамики работы отдельного узла сети происходящие на нем (и в целом в сети) процессы можно рассматривать как совокупность случайных переходов между состояниями, определяемыми случайными величинами входящего и выходящего потоков для отдельного узла (а для сети в целом изменением числа блокированных и разблокированных узлов). Такая формализация позволяет вывести дифференциальное уравнение второго порядка (типа уравнения Колмогорова), описывающее стохастическую динамику изменения состояний как отдельных узлов, так сети в целом.

Использование методов математического моделирования позволяет проанализировать динамику стохастических процессов на узлах транспортной сети и определить зависимость вероятности (обозначим её $Q_i$) достижения на узле перегруженного состояния (критического числа транспортных средств) от величины текущего значения входных и выходных потоков и времени процесса. Значение величины $Q_i$ может быть использовано для описания работы транспортной сети в целом с позиций теории перколяции на уровне, учитывающем топологию всей сети, а также динамику обработки заявок на отдельном узле [18].

*Формулировка краевой задачи*

При числе машин $x=L$ в очереди на $j$–й перекресток в $i$–м направлении, где $L$ — некоторое критическое число, мы считаем, что узел обработки ($j$–й перекресток в $i$–м направлении) становится перегруженным (образуется пробка). Сама вероятность обнаружить такое состояние будет отлична от 0, а плотность вероятности, определяющая поток машин в состоянии $x=L$, необходимо положить равной *0* (мы стремимся избежать этого состояния), т.е.

$$\rho(x,t)_{x=L}=0. \qquad \text{(a)}$$

Второе граничное условие выбираем исходя из того, что состояние $x=0$ определяет простой в обработке. Сама вероятность обнаружить такое состояние будет отлична от 0, однако плотность вероятности, определяющая поток машин в состоянии $x=0$, необходимо положить равной *0* (мы также должны стремиться избежать это состояние, т.к. оно соответствует случаю, когда светофор не закрывает данное направление, а это противоречит логике его работы), т.е.

$$\rho(x,t)_{x=0}=0. \qquad \text{(b)}$$

Поскольку в момент времени $t=0$ (начало расчета) на обработке может находиться $x_0$ – машин, то начальное условие зададим в виде:

$$\rho(x,t=0) = \delta(x-x_0) = \begin{cases} 1, x = x_0 \\ 0, x \neq x_0 \end{cases}.$$

Т.к. начальное условие задано в виде $\delta$-функции, то это приводит к тому, что решение полученного дифференциального уравнения, оставаясь непрерывным в точке $x = x_0$, будет испытывать в ней разрыв производной. Само решение может быть получено в виде двух функций.

*Решение краевой задачи и синхронизация потоков*

Функция $\rho_2(x,t)$ определяет плотность вероятности того, что величина числа машин в очереди находится на отрезке от 0 до $x_0$, а функция $\rho_1(x,t)$ – плотность вероятности нахождения на отрезке от $x_0$ до критического значения $L$, определяющего образование пробки.

Сумма интегралов $P(L) = \int\limits_0^{x_0} \rho_2(x,t)dx + +\int\limits_{x_0}^{L} \rho_1(x,t)dx$ определяет вероятность того, что к моменту времени $t$ пробка не образуется (число машин в очереди не превысит $L$).

Используя методы операционного исчисления для вероятности $P(L_{i,j}, x_0|t)$ того, что к моменту времени $t$ пробка не образуется (число машин в очереди не превысит $L_{i,j}$), можно получить выражение:

$$P(L_{i,j}, x_0 \mid t) = \qquad (1)$$

$$= 2A(L_{i,j}, x_0 \mid t)\sum_{n=1}^{M} \frac{B(L_{i,j})\sin(\pi n\frac{x_0}{L_{i,j}}) + \sin(\pi n\frac{L_{i,j}-x_0}{L_{i,j}})}{(-1)^{n+1}\left\{\pi n + \dfrac{b_{i,j}^2 L_{i,j}^2}{4\pi n a_{i,j}^2}\right\}} C(L_{i,j})$$

$$A(L_{i,j}) = e^{-\frac{2b_{i,j}x_0 + b_{i,j}^2 t}{4a_{i,j}}}$$

$$B(L_{i,j}) = e^{\frac{b_{i,j}L_{i,j}}{2a_{i,j}}}$$

$$C(L_{i,j}) = e^{-\frac{\pi^2 n^2 a_{i,j} t}{L_{i,j}^2}},$$

где $a_{i,j} = \dfrac{\mu_{i,j}^2 + \lambda_{i,j}^2}{2\lambda_{i,j}}$ и $b_{i,j} = \lambda_{i,j} - \mu_{i,j}$, $\mu_{i,j}$ – число машин, выходящих из $j$-го узла транспортной сети (перекресток/светофор) в $i$-м направлении за единицу времени (выходной поток), $\lambda_{i,j}$ – число машин, входящих на узел за единицу времени (входной поток), $t$ – время, $x_0$ – число машин в очереди в момент начала шага работы светофора.

Решение уравнения (1) относительно времени $t$ позволяет определить оптимальные интервалы времени включения светофоров. Однако это является ресурсоемкой вычислительной задачей. Учитывая, что вычисления нужно одновременно проводить для множества направлений и перекрестков, а также необходимо синхронизировать [см. уравнение (2)] на соседних перекрестках входящие и выходящие потоки машин, для моделирования движения использовали *параллельные вычисления.*

$$x_{0i,j}^k = x_{0i,j}^{k-1} + \frac{1}{r}\sum_{i-1}^{r}(\mu_{i,j}^{k-1}\tau_{i,j}^{k-1} + \Delta\lambda_{i,j}^{k-1}T_{i,j}^{k-1}) - \mu_{i,j}^k t_{i,j}^k. \qquad (2)$$

$$\lambda_{i,j}^k = \frac{x_{0i,j}^k V_{D1}}{l_{i,j}},$$

где $x_{0i,j}^{k-1}$ – число машин, оставшихся не пропущенными на данном направлении $i$ данного $j$-го перекрестка, после выполнения *(k-1)*-го шага, $r$ – число входящих на перекресток направлений, $\mu_{i,j}^{k-1}$ – потоки, выходящие на *(k-1)*-м шаге по каждому из $r$ – направлений на выбранный перекресток. Любая машина из входящих на *(k-1)*-м шаге потоков может равновероятно выбрать на следующем шаге $k$ одно из направлений $r$, поэтому перед знаком суммы стоит числовой коэффициент $\frac{1}{r}$. $T_{i,j}^{k-1}$ – время, в течение которого выбранное направление было закрыто светофором (не время открытия, а время «цикла простоя») между двумя последовательными открытиями. Заметим, что открытие всех направлений на выбранном узле может происходить не в строго периодической последовательности. Порядок работы направлений может изменяться в зависимости от характера движения. Интервал времени между двумя последовательными открытиями одного и того же выбранного направления будет являться «циклом простоя», величина которого $T_{i,j}^{k-1}$ может динамически изменяться. $\Delta\lambda_{i,j}^k$ – изменение входящего в выбранном направлении на выбранный узел потока машин за время $T_{i,j}^{k-1}$. Общее число машин в сети в любой момент времени суток соответствует функции числа машин от времени суток. $\tau_{i,j}^{k-1}$ – время, в течение которого на *(k-1)*-м шаге были открыты входящие направления, пока выбранное исходящее направление было закрыто в течение времени $T_{i,j}^{k-1}$. $\mu_{i,j}^{k-1}$ – поток, исходящий по выбранному направлению на шаге $k$, $t_{i,j}^k$ – интервал времени включения светофора на шаге $k$ выбранного направления [величину которого необходимо определить при решении уравнения для определения вероятности $P(L_{i,j}, x_0|t)$ того, что к моменту времени $t$ число машин в очереди не превысит $L_{i,j}$ (пробка не образуется)]. $V_{D1}$ – рекомендуемая скорость.

## Исследование стохастической модели дорожного трафика с недетерминированным законом времени поступления транспортных средств

Для моделирования транспортной сети и определения, является ли принципиально возможным динамическое изменение интервалов времени переключения светофоров в данном городе для предотвращения пробок, помимо уравнений (1) и (2), необходимо иметь модель изменения числа машин от времени суток. Общее число машин в транспортной сети может быть задано для моделирования, например, функцией, изображенной на рисунке 3.

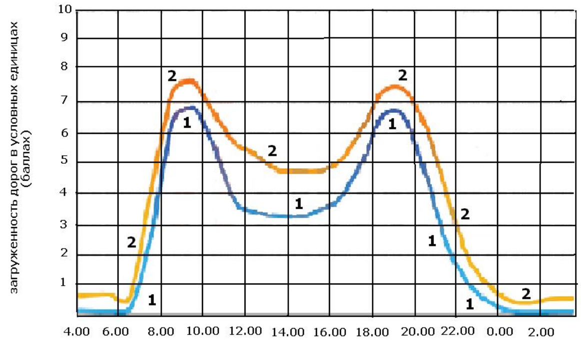


**Рисунок 3 – Загруженность дорог Москвы в течение одного из рабочих дней (кривая 1 – осень 2006 года, кривая 2 – осень 2007 года). Загруженности в 10 условных единиц (баллов) соответствует случай, когда все зарегистрированные в Москве и ближнем Подмосковье машины оказываются на дорогах. По статистике осень является наиболее загруженным периодом года**

На основе уравнений (1) и (2) и функции, представленной на рисунке 3, был разработан ряд алгоритмов и создано программное обеспечение (ПО), позволяющее моделировать транспортную сеть города и дорожные ситуации с «управляемыми» светофорами, которые регулируются согласно предлагаемой модели, и «неуправляемыми» – светофоры с жёстко заданными режимами переключения. Это позволило провести проверку предлагаемого подхода.

В модели случайного движения машин в городе (получившей название “классическое движение”) уравнение (1) не используется, т.к. интервалы времени включения светофоров являются фиксированными и не могут динамически изменяться, а используются только уравнение (2) и данные рисунка 3.

В качестве технологического решения в созданном на основе разработанной модели и алгоритмов программном обеспечении (ПО) была реализована функция загрузки карт в формате Open Street Map (OSM) и использован «парсер» (распознаватель) этого формата, на выходе которого получается граф дорожной сети, и набор объектов WPF – для отображения их у пользователя на экране компьютера, что необходимо для моделирования и эмулирования движения.

Вторым этапом была реализация модели города, были реализованы классы дорог, перекрестков, дорожных направлений, светофоров и их состояний, а также машин и очередей ожиданий. Кроме того, были реализованы инструменты для «ввода» машин согласно суточному распределению (см. рисунок 3) и инструменты задания поведения машин.

В качестве простейшего критерия эффективности был выбран показатель общей длины всех очередей на всех перекрёстках загруженной карты. Пробкой считалась очередь автомобилей на светофоре, ожидающих разрешающего сигнала.

Оказалось, что в предлагаемой модели заметно меньше «красных» цветов. Исследование длин очередей (см. рисунок 4) показывает примерно двукратное снижение числа пробок при использовании модели с «управляемыми» светофорами (нижняя кривая на рисунке 4).

Реальная ситуация на дорогах может значительно расходиться с экспериментальным математическим моделированием, однако полученные результаты позволяют говорить об адекватности предлагаемой модели и возможности её использования в качестве основы проектирования сервисов управления в автоматизированных системах дорожного движения.

Светофоры с фиксированными фазами работы помогают решить проблему регулирования движения, но они менее эффективны и не могут реагировать на изменение дорожной ситуации (отсутствует обратная связь). Например, если циклические (суточные) изменения еще могут быть учтены при разработке фаз работы светофора, то различные случайные факторы, такие как погодные условия, ремонтные работы, аварийные ситуации на дороге, являются серьёзными факторами, снижающими эффективность всей дорожной сети в целом, и не могут быть учтены.


**Рисунок 4 – Сравнение эффективности предлагаемой модели с моделью фиксированных времен переключения светофоров**

В разработанных математических моделях описаны правила обслуживания перекрестков (время переключения светофоров), учтены материальный баланс числа машин в системе и связи их потоков между соседними перекрестками. Предлагаемый инструмент позволяет, используя реальную карту транспортной сети, создать её динамическую модель, эмулировать её работу, проверить, как в ней могут возникать пробки, и разработать алгоритмы управления.

## Выводы

1. Разработаны модели описания в городских транспортных сетях стохастических транспортных потоков с недетерминированными характеристиками распределения статистических параметров, позволяющие описывать зависимость вероятности блокирования отдельных узлов от характеристик дорожного движения с течением времени.

2. В разработанных математических моделях описаны правила обслуживания перекрестков (время переключения светофоров), учтен материальный баланс числа машин в системе и связи потоков между соседними перекрестками. Предлагаемая модель позволяет, используя реальную карту транспортной сети, создать её динамическую модель, эмулировать её работу и возникновение пробок.

3. Моделирование дорожной ситуации с «управляемыми», согласно предлагаемой модели, временами переключения светофоров и с

жёстко заданными режимами переключения («классическое движение») показывает примерно двукратное снижение числа пробок при использовании разработанной модели «регулируемых» светофоров по сравнению с моделью «классическое движение».

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 16-37-00373 мол_а, «Разработка перколяционных и стохастических моделей балансировки потоков и управления высоконагруженными транспортными сетями».*

**Библиографический список**

1. **Швецов В. И.** Математическое моделирование транспортных потоков // Автоматика и телемеханика. 2003, № 11. С. 3–46.
2. **Гасников А. В., Кленов С. Л., Нурминский Е. А., Холодов Я. А., Шамрай Н. Б.** Введение в математическое моделирование транспортных потоков. М.:, Издательство МЦНМО, 2013. 428 с.
3. **Алёшкин А. С.** Динамическая модель обработки и перколяции стохастических данных в сетях с упорядоченной и случайной структурой: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. М., 2008. 172 с.
4. **Клейнок Л.** Теория массового обслуживания / пер. с англ. И.И. Грушко; под ред. В. И. Неймана. М.: Машиностроение, 1979.
5. **Клейнок Л.** Вычислительные сети с очередями: пер с англ. М.: Мир, 1979.
6. **Кофман А., Крюон Р.** Массовое обслуживание (теория и приложения) / пер. с фр. под ред. И.Н. Коваленко. М.: Мир, 1965. 302 с.
7. **Филлипс Д., Гарсиа-Диас А.** Методы анализа сетей: пер. с англ. М.: Мир, 1984.
8. **Кулагин В. П.** Моделирование структур параллельных вычислительных систем на основе сетевых моделей: учеб. пособие. М.: Московский государственный институт электроники и математики (технический университет), 1998. 102 с.: ил. 62, табл. 4, библиогр.: 78 назв.
9. **Воеводин В. В.** Математические модели и методы в параллельных процессах. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986.
10. **Заде Л. А.** Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. М.: Мир, 1976, 164 с.
11. Нечеткие множества и теория возможностей (последние достижения) / под ред. **Р. Ягер**; пер. с англ. под ред. С.И. Травкина. М.: Радио и связь, 1986, 406 с.
12. **Алтунин А. Е., Семухин М. В.** Модели и алгоритмы принятия решений в нечетких условиях: монография. Тюмень: Изд. Тюменского государственного университета, 2000.
13. **Заде Л. А.** Основы нового подхода к анализу сложных систем и процессов принятия решений // Математика сегодня / сост. А.В. Шилейко. М.: Знания, 1974. С. 5-48.
14. **Белман Р., Заде Л.** Принятие решений в расплывчатых условиях // Вопросы анализа и процедуры принятия решений: сб. переводов / под ред. И.Ф. Шахнова. М.: Мир, 1976. С. 173 – 215.
15. **Кузьмин В. Б.** Построение групповых решений в пространствах четких и нечетких бинарных отношений. М.: Наука, 1982, 168 с.
16. **Кузьмин В. Б., Травкин С. И.** Теория нечетких множеств в задачах управления и принципах устройства нечетких процессоров // Обзор зарубежной литературы. Автоматика и телемеханика. 1992, № 11. С. 3 – 36.
17. **Аверкин А. Н., Батыршин И. З., Блишун А. Ф.** и др. Нечеткие множества в моделях управления и искусственного интеллекта / под ред. Д.А. Поспелова. М.: Наука, 1986, 316 с.
18. **Лесько С. А.** Влияние структуры двумерных и трехмерных регулярных и случайных компьютерных сетей на перколяцию данных в условиях блокирования вычислительных узлов: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. М., 2014, 196 с.

UDC 004.94; 004.02

# DEVELOPMENT AND ANALYSIS OF STOCHASTIC MODEL OF ROAD TRAFFIC WITH NON-DETERMINISTIC VEHICLES ARRIVALS TIME LAW

**A. S. Alyoshkin,** Ph.D. (technical sciences), associate Professor of the Department of intelligent technologies and systems of the Moscow University of Technology (MIREA), Moscow, Russia, Antony@testor.ru
**S. A. Lesko,** Ph.D. (technical sciences), associate Professor of the Department of system control and simulation of the Moscow University of Technology (MIREA), Moscow, Russia, Sergey@testor.ru
**D. O. Zhukov,** Ph.D. (technical sciences), full professor, Head of the Department of intelligent technologies and systems of the Moscow University of Technology (MIREA), Moscow, Russia, ZhukovDm@yandex.ru

*The purpose of current article is to develop a traffic model to do some optimization of traffic flows. Based on the consideration of schemes of transition probabilities between transport node states a differential equation of the second order was obtained and a boundary-value problem whose solution describes the dependence of the probability of blocking individual nodes of transport network from characteristics of the road traffic in time was formulated. A study of the lengths formed at traffic lights queue shows approximately two-fold reduction in the number of jams with the use of the developed model of "controlled" traffic lights compared with the "classical movement" with fixed time.*

***Key words:*** *transportation network, stochastic dynamics of network nodes blocking, flow balancing, boundary value problem.*

**DOI:** 10.21667/1995-4565-2016-56-2-99-106

**References**

1. **Shvetcov V. I.** Matematicheskoe modelirovanie transportny`kh potokov. *Avtomatika i telemehanika.* 2003, no. 11, pp. 3–46 (in Russian).

2. **Gasnikov A. V., Clenov S. L., Nurminskii` E. A., Holodov Ia. A., Shamrai` N. B.** *Vvedenie v matematicheskoe modelirovanie transportny`kh potokov* (Introduction to mathematical modeling of traffic flows). Moscow: Izdatel`stvo MTCNMO, 2013, 428 p. (in Russian).

3. **Alyoshkin A. S.** Dinamicheskaya model' obrabotki i perkolyacii stohasticheskih dannyh v setyah s uporyadochennoj i sluchajnoj strukturoj. Dissertaciya na soiskanie uchenoj stepeni kandidata tekhnicheskih nauk. Moscow, 2008, 172 p. (in Russian).

4. **Clei`nok L.** *Teoriia massovogo obsluzhivaniia* (Queuing Theory). Per. s angl. I.I. Grushko. Pod red. V. I. Nei`mana. Moscow: Mashinostroenie, 1979 (in Russian).

5. **Clei`nok L.** Vy`chislitel`ny`e seti s ocherediami (Computer network with queues). Per s angl. Moscow: Mir. 1979 (in Russian).

6. **Kofman A., Kriuon R.** *Massovoe obsluzhivanie (teoriia i prilozheniia)* (Queuing Theory (theory and applications)). Per. s fr. pod red. I.N. Kovalenko. Moscow: Mir, 1965, 302 p. (in Russian).

7. **Phillips D., Garsia-Dias A.** *Metody` analiza setei`* (Methods of analysis of networks). Per. s angl. Moscow: Mir, 1984 (in Russian).

8. **Kulagin V. P.** Modelirovanie struktur parallel`ny`kh vy`chislitel`ny`kh sistem na osnove setevy`kh modelei`: Uchebnoe posobie. Moskva: Moskovskii` gosudarstvenny`i` institut e`lektroniki i matematiki (tekhnicheskii` universitet), 1998, 102 p.: il. 62, tabl. 4, bibliogr. 78 nazv. (in Russian).

9. **Voevodin V. V.** *Matematicheskie modeli i metody` v parallel`ny`kh protcessakh* (Mathematical models and methods in parallel processes). Moscow: Nauka. Gl. red. Fiz.-mat. Leet., 1986 (in Russian).

10. **Zade L. A.** *Poniatie lingvisticheskoi` peremennoi` i ego primenenie k priniatiiu priblizhenny`kh reshenii`* (Concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning). Moscow: Mir, 1976, 164 p. (in Russian).

11. *Nechetkie mnozhestva i teoriia vozmozhnostei` (poslednie dostizheniia)* (Fuzzy sets and theory of possibilities (recent advances)). Pod red. R. Iager. Per. s angl. pod red. S.I. Travkina. Moscow: Radio i sviaz`, 1986, 406 p. (in Russian).

12. **Altunin A. E., Semuhin M. V.** Modeli i algoritmy` priniatiia reshenii` v nechetkikh usloviiakh: Monografiia. Tiumen`: Izd. Tiumenskogo gosudarstvennogo universiteta, 2000 (in Russian).

13. **Zade L. A.** *Osnovy` novogo podhoda k analizu slozhny`kh sistem i protcessov priniatiia reshenii`*(Foundations for a new approach to the analysis complex systems and decision processes). Matematika segodnia. Sost. A.V. Shilei`ko. Moscow: Znaniia, 1974, pp. 5-48 (in Russian).

14. **Belman R., Zade L.** *Priniatie reshenii` v rasply`vchaty`kh usloviiakh* (Making decision in vague conditions). Voprosy` analiza i protcedury` priniatiia reshenii`: Sb. perevodov / Pod red. I.F. Shakhnova. Moscow: Mir, 1976, pp. 173 – 215 (in Russian).

15. **Kuz`min V. B.** *Postroenie gruppovy`kh reshenii` v prostranstvakh chetkikh i nechetkikh binarny`kh otnoshenii`* (Building group decisions in spaces of crisp and fuzzy binary relations). Moscow: Nauka, 1982, 168 p. (in Russian).

16. **Kuz`min V. B., Travkin S. I.** Teoriia nechetkikh mnozhestv v zadachakh upravleniia i printcipakh ustroi`stva nechetkikh protcessorov. *Obzor zarubezhnoi` literatury`. Avtomatika i telemehanika.* 1992, no. 11, pp. 3-36 (in Russian).

17. **Averkin A. N., Baty`rshin I. Z., Blishun A. F. i dr.** *Nechetkie mnozhestva v modeliakh upravleniia i iskusstvennogo intellekta* (Fuzzy sets in management models and artificial intelligence). Pod red. D.A. Pospelova. Moscow: Nauka, 1986, 316 p. (in Russian).

18. **Lesko S. A.** Vliyanie struktury dvumernyh i trekhmernyh regulyarnyh i sluchajnyh komp'yuternyh setej na perkolyaciyu dannyh v usloviyah blokirovaniya vychislitel'nyh uzlov. Dissertaciya na soiskanie uchenoj stepeni kandidata tekhnicheskih nauk. Moscow, 2014, 196 p. (in Russian).