УДК 517.93

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ИССЛЕДОВАНИЮ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ: СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

В. В. Миронов, д.ф.-м.н., профессор кафедры ВМ, РГРТУ; mironov1vv@mail.ru
Ю. С. Митрохин, к.ф.-м.н., доцент кафедры ВМ, РГРТУ; mitrokhin.y.s@rsreu.ru

В системном анализе *динамических моделей существенную роль играют вопросы, связанные с анализом устойчивости положения равновесия динамических систем, а в их математических моделях – устойчивости решений систем уравнений. Техническая «устойчивость» есть способность системы возвращаться к равновесному состоянию после стороннего возмущения или управления. Прямой метод Ляпунова остается основным для исследования устойчивости динамических систем. Однако эвристическое построение функции Ляпунова не связано прямо со структурными свойствами исследуемой системы и потому до сих пор нет исчерпывающих общих способов ее построения по заданной модели системы. Это самый серьезный недостаток ляпуновской методологии. В работе этот недостаток преодолен: рассмотрены две фундаментальные проблемы системного анализа динамических систем: построение функции ляпуновского типа по модели системы и оценка на этой основе области устойчивости (асимптотической устойчивости) динамической системы.*

Цель работы *предложить технологический, алгоритмически реализуемый метод построения функций ляпуновского типа для анализа устойчивости реальных динамических систем по их моделям; рассмотреть свойства предложенного подхода; апробировать метод на системах, описываемых уравнениями Льенара, Ван дер Поля, Ла-Салля и доказать его эффективность.*

Ключевые слова: *системный анализ, динамические процессы, устойчивость, функции ляпуновского типа, системы Льенара, Ван дер Поля, Ла-Салля.*

DOI: 10.21667/1995-4565-2017-59-1-114-126

Введение

Центральной задачей системного анализа динамических процессов или систем является решение проблемы их устойчивости. Техническая «устойчивость» системы есть ее свойство работать стабильно в номинальных режимах и не разрушаться при дестабилизирующих воздействиях; это способность системы за конечное время приходить в равновесие после внешних возмущений или воздействий, выводящих «начальные условия» из их номинала. Устойчивость динамической системы есть основное техническое требование, связанное с оценкой его качества и реализации. Эти задачи стояли ранее в теории и практике динамических систем [1–3], стоят и сегодня [4 – 16].

К примеру, анализ устойчивости гибридных, переключаемых систем дает основу для интересных математических и инженерных проектов [9]. Таковой системой является система Льенара (и ее конкретные разновидности), которая описывает одно-свободное состояние при заданных (линейной) восстанавливающей силе и (нелинейном) затухании. Системы (и, соответственно, уравнения) Льенара на практике применяют, например, при математическом описании электрических контуров и различных типов колебаний [17, 18].

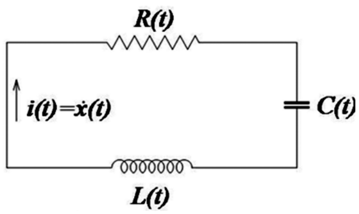
Или весьма тесно связанная с системой Льенара система (и уравнение) Релея, описывающая (нелинейную) одно-свободную систему, в которой присутствуют автоколебания (такие вопросы на практике встречаются в акустике) [19, 20].

Или система (и уравнение) Ван дер Поля, моделирующая свободные автоколебания (нелинейных) колебательных систем (так называемый осциллятор Ван дер Поля). Заметим, что на таком осцилляторе (Ван дер Полем и Ван дер Марком) были экспериментально впервые получены проявления детерминированного хаоса (ранее, в 1882 г. теоретически описанные А. Пуанкаре). В частности, система Ван дер Поля служит математической моделью (при ряде упрощающих положений) лампового генератора на триоде при условии кубической характеристики лампы [21, 22]. К таковым же классическим системам можно отнести и систему (уравнение) Ла-Салля [3] и ряд других уравнений теории динамических систем [6–8, 18]. Подобные модели систем используются и исследуются в сейсмологии (для моделирования геологических разломов), в биологии, в физике.

Рассмотрим одну конкретную задачу. Дан замкнутый электрический контур (см. рисунок) с нелинейными элементами, управляемыми независимо друг от друга во времени (динамическое управление). Уравнение контура имеет вид:

$$L(t)\,\ddot{x} + R(t)\,\dot{x} + \frac{1}{C(t)}x = g(t, x, \dot{x}),$$

где заданы управляемые (изменяемые во времени) элементы: $L(t)$ – индуктивность, $R(t)$ – сопротивление, $C(t)$ – емкость, $g(t,x,\dot{x})$ – нелинейные члены системы, имеющие степень не ниже второй по x и $\dot{x}$.



Замкнутый электрический контур с элементами, независимо управляемыми во времени (динамическое управление)

По «физическому смыслу» задачи все управляемые элементы контура $L = L(t)$, $R = R(t)$, $C = C(t)$ положительны при любом времени t и ограничены. Дополнительные условия на функции $L = L(t)$, $R = R(t)$, $C = C(t)$ наложим позднее. Требуется определить, устойчива ли система? Каков характер устойчивости? Как ею управлять? Ответ на эти вопросы будет дан во второй части работы.

Основной интерес во всех этих проблемах по анализу систем вызывает возможность построения «более широких» достаточных условий, при которых эти системы имеют единственное *устойчивое* периодическое решение.

Казалось бы, что эти проблемные вопросы можно было бы разрешить на основе современной компьютерной техники и соответствующих прикладных программ по анализу устойчивости. Оказалось, что это далеко не так. Еще работа А.Н. Колмогорова [23] и последующие исследования (к примеру, [6] или [24, 25]) доказали, что компьютерные методы здесь малоэффективны.

Дело в том, что в подобных динамических моделях правые части систем уравнений иногда полностью не определены, и, следовательно, их практически невозможно запрограммировать. В качестве основного инструмента для исследования динамических моделей необходимо использовать аналитические методы. В частности, одним из таких инструментов является теорема Ла-Салля о локализации предельных множеств динамических систем на основе обобщенных функций Ляпунова [6, 24].

С другой стороны, казалось бы, известно, что прямой метод Ляпунова является основным для исследования устойчивости динамических систем. Теоремы существования функций Ляпунова обосновывают универсальность и значимость его метода.

Однако определение функции Ляпунова не связано прямо со структурными свойствами исследуемой системы и потому до сих пор нет исчерпывающих общих способов ее построения по заданному уравнению движения динамической системы. Это самый серьезный недостаток ляпуновской методологии. Вот почему представляет интерес задача о том, можно ли по виду системы уравнений установить вид функции Ляпунова.

Цель работы предложить конструктивный, технологически реализуемый метод (подход) по исследованию устойчивости динамических систем, изучить его свойства и продемонстрировать его возможности на конкретных системах.

Постановка задач. То обстоятельство, что в общем случае по анализу устойчивости систем инструмент анализа – функцию Ляпунова, надо угадывать, породило две фундаментальные прикладные проблемы.

ПРОБЛЕМА 1. *Как построить функцию Ляпунова по общему виду динамической системы*?

ПРОБЛЕМА 2. *Как найти область устойчивости* (*асимптотической устойчивости*) *динамической системы*?

Разрешение этих вопросов – чрезвычайно трудные задачи. Сложность проблемы 2, например, столь высока, что достаточно хорошая оценка области асимптотической устойчивости уже считается ее решением.

Проблемы 1–2 разрешены лишь для некоторых (весьма узких) классов нелинейных стационарных и нестационарных систем. С другой стороны, сложность и «непрозрачность» эвристических решений для других систем столь высоки, что приравниваются некоторыми специалистами к искусству.

В данной работе делается существенный шаг к решению этих двух названных проблем в общем виде. А именно, предложен технологический (алгоритмический) подход к построению функций ляпуновского типа и доказаны свойства такого подхода. Этот метод позволяет анализировать устойчивость реальных динамических систем по их моделям и оценивать области устойчивости систем. Рассмотрены свойства предложенного подхода. Метод апробирован на системах, описываемых уравнениями Льенара, Ван дер Поля, Ла-Салля, и показал свою высокую эффективность. Идея нового подхода возникла и получила уточнение и развитие в работах авторов [26–30].

В работе помимо теоретических исследований проведена также апробация методики на анализе устойчивости классических динамических систем, описываемых в моделях уравнениями Льенара, Ван дер Поля, Ла-Салля и их модификаций, на которых новый технологический подход (метод) показал свою высокую эффективность.

1. Проблема построения функций Ляпунова и ляпуновская методология. Во избежание возможной неопределенности поясним разницу между методом Ляпунова и методологией Ляпунова. Метод Ляпунова – это фиксированный математический аппарат для изучения и решения задач устойчивости и анализа других качественных свойств динамических систем без учета информации о движении системы, т.е. без нахождения решения соответствующей математической модели. Методология Ляпунова есть систематическая процедура, определяющая порядок использования имеющегося математического аппарата.

В работе [31] предложено несколько методов построения функций Ляпунова для различных частных моделей систем. В работе [32] получено обобщение известной функции Ляпунова «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности». В работе [33] было показано, что любое движение, вообще говоря, можно рассматривать как управляемое движение, с управлением, как известно, тесно связана так называемая пилотная функция, которая определяет направление движения по траектории, наилучшее в естественной метрике управляемой системы. Отсюда следует, казалось бы, что пилотная функция является идеальной функцией Ляпунова для динамической системы (в некоторой окрестности ее равновесного положения). Но определение пилотной функции динамической системы на больших расстояниях от ее нулевого положения равновесия и к тому же со сложным поведением оказалось весьма трудной задачей. В работе [34] критерий устойчивости (и соответствующий метод нахождения функции Ляпунова) сводится к кусочно-локальному определению некоторого «эталонного» движения с известной пилотной функцией. В работе [35] проведен разбор некоторых методов построения функций Ляпунова и доказано, что ничего принципиально нового по сравнению с результатами работ [2, 10, 36,] к тому времени (и ныне, как считают авторы) не найдено.

2. Высшие кривизны кривой. Если посмотреть на упомянутые системы Льенара, Ван дер Поля, Ла-Салля и на другие «единым взглядом», то окажется, что математическая модель реальной динамической системы (или динамического процесса) может быть представлена [в некоторой системе координат $(O; x_1, x_2, ..., x_n)$] с помощью конструктивно заданной функции $f(...)$, определяющей скорости изменения каждой координаты системы, в виде системы дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x, t), \qquad (1)$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ – столбец текущих координат системы, зависящих от времени t, и где натуральный параметр $n \geq 1$.

Если известны начальные данные системы

$$x_0 = x(t_0) = (x_1(t_0), ..., x_n(t_0))^T \qquad (2)$$

в момент t_0, то поведение во времени динамической системы (1) при условиях (2) обозначим $x = x(t) = x(t, t_0, x_0)$ (опуская иногда, для краткости, фиксированные аргументы t_0, x_0 или даже переменную времени t).

Наложим на правую часть модели (1) функцию f следующие условия (отвечающие реальным моделям [9]):

(con 1) функция $f(x, t)$ принадлежит классу C_I^n – n раз дифференцируемых по t функций на интервале $I = [t_0, +\infty)$ (гладкие модели);

(con 2) функция $f(x, t)$ имеет ограниченные частные производные по x и по t на области $R = Q \times I$, где область $Q = \{x : \|x\| < H\}$, H – заданное действительное положительное число и норма вектора x определяется как $\|x\| = \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$ (в дальнейшем будет также использоваться евклидова норма вектора $|x| = \sqrt{\sum_i x_i^2}$);

(con 3) функция $f(x, t)$ и ее производная по t – функция $\dot{f}(x, t)$ тождественно равны нулю на I только при $x = 0$ (описание номинального равновесного состояния системы).

При условиях (con 1), (con 2), (con 3) стандартные условия Липшица выполнены и, следовательно, существует единственная траектория динамической системы (1) $x(t, t_0, x_0)$, проходящая в момент времени t_0 через точку $x_0 \in Q$ [2].

Любая траектория системы $x(t) = const$ называется равновесным состоянием системы (1). Следуя А.М. Ляпунову, удобно принять исследуемое равновесное состояние за $x(t) = 0$. Общее состояние системы (1), в которое не входят равновесные состояния, обозначим как $x(t)$.

Для дальнейшего нам понадобятся некоторые понятия и факты многомерной геометрии. За недостающими (стандартными) определениями отсылаем к работам [20, 37].

Анализировать поведение динамических систем будем по кривизнам их траекторий.

Чтобы установить необходимые свойства кривизн траекторий динамических систем в «привязанном» к ним аффинном пространстве $\mathbf{A}^n$, введем в рассмотрение стандартные производные координат систем для контроля за скоростями движения систем:

$$\dot{x}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\ \ddot{x}=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2},\dots,\ x^{(n)}=\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n};$$

$$x'=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},\ x''=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2},\dots,x^{[n]}=\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}s^n},$$

а также введем стандартные обозначения для косого и векторного произведений векторов соответственно $\{\dots\}$ и $[\dots]$ (они встречаются уже в теореме 1).

Полагаем также, исходя из практических задач, что траектории систем имеют свойство достаточной гладкости (к примеру, этим свойством обладают все системы Льенара, Ван дер Поля и другие, рассматриваемые во второй части работы).

Свойства траекторий динамических систем, на основе которых проводится системный анализ их поведения, оформим в виде теорем.

Теорема 1. Старшая кривизна траектории $x(t)$ динамической системы выражается как

$$k_{n-1}(x,t)=\frac{\left\{\dot{x}\,\ddot{x}\dots x^{(n)}\right\}\left|\left[\dot{x}\,\ddot{x}\dots x^{(n-2)}\right]\right|}{\left[\dot{x}\,\ddot{x}\dots x^{(n-1)}\right]^2|\dot{x}|}.$$

Доказательство. Учитывая стандартные определения и известные формулы Френе [37, стр. 420], имеем следующие равенства:

$$\begin{cases} x'=r_1,\\ x''=r_1'=k_1r_2,\\ x'''=k_1r_2'=k_1(-k_1r_1+k_2r_3)=\\ \quad =-k_1^2r_1+k_1'r_2+k_1k_2r_3,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x^{[n]}=L(r_1,r_2,\dots,r_{n-1};k_1,k_1',\dots;k_{n-2},k_{n-2}',\dots)+\\ \quad +r_n\prod\limits_{i=1}^{n-1}k_i, \end{cases} \qquad (3)$$

где $L(\cdot)$ – это функция, линейная относительно векторов Френе $r_1,r_2,\dots,r_{n-1}$ с коэффициентами, зависящими от кривизн k_i (число i называют порядком кривизны k_i) и их производных. Из равенств (3) и свойств векторов Френе следует, что

$$\left[x'\,x''\dots x^{[n-1]}\right]=k_1^{n-2}k_2^{n-3}\dots k_{n-2}\left[r_1\,r_2\dots r_{n-1}\right]=$$
$$=k_1^{n-2}k_2^{n-3}\dots k_{n-2}r_n. \qquad (4)$$

Откуда по тем же причинам

$$\left\{x'\,x''\dots x^{[n]}\right\}=\left[x'\,x''\dots x^{[n-1]}\right]x^{[n]}=$$
$$=k_1^{n-1}k_2^{n-2}\dots k_{n-2}^2k_{n-1}r_n^2=k_1^{n-1}k_2^{n-2}\dots k_{n-1}. \qquad (5)$$

В случае $n=2$, когда традиционно рассматриваются ориентированные углы, величина k_1 может быть положительной и отрицательной. При $n>2$, когда рассматриваются только неориентированные углы, коэффициенты (кривизны) $k_1,k_2,\dots,k_{n-2}$ считаются положительными. Тогда из равенств (5) следует, что для старшей кривизны порядка $n-1$ имеет место равенство

$$k_{n-1}=\frac{\{x'\,x''\dots x^{[n]}\}}{k_1^{n-1}k_2^{n-2}\dots k_{n-2}^2}. \qquad (6)$$

В силу равенств (4) для кривизн траекторий систем порядка $i=\overline{1,n-2}$ верны следующие равенства

$$k_{n-2}=\frac{\left|\left[x'\,x''\dots x^{[n-1]}\right]\right|}{k_{n-3}^2k_{n-4}^3\dots k_2^{n-3}k_1^{n-2}},$$
$$\dots$$
$$k_i=\frac{\left|\left[x'\,x''\dots x^{[i+1]}\right]\right|}{k_{i-1}^2k_{i-2}^3\dots k_2^{i-1}k_1^{i}}, \qquad (7)$$
$$\dots$$
$$k_1=\left|\left[x'\,x''\right]\right|.$$

Подставляя формулы (7) в выражение (6), получаем следующее выражение для старшей кривизны траектории системы:

$$k_{n-1}=\frac{\{x'\,x''\dots x^{[n]}\}}{k_{n-2}^2k_{n-3}^3k_{n-4}^4\dots k_2^{n-2}k_1^{n-1}}=$$
$$=\frac{\left\{x'\,x''\dots x^{[n]}\right\}\cdot k_{n-3}^4k_{n-4}^6\dots k_2^{2(n-3)}k_1^{2(n-2)}}{\left|\left[x'\,x''\dots x^{[n-1]}\right]\right|^2k_{n-3}^3k_{n-4}^4\dots k_2^{n-2}k_1^{n-1}}=$$
$$=\frac{\left\{x'\,x''\dots x^{[n]}\right\}k_{n-3}k_{n-4}^2k_{n-5}^3\dots k_2^{n-4}k_1^{n-5}}{\left|\left[x'\,x''\dots x^{[n-1]}\right]\right|^2}= \qquad (8)$$
$$=\frac{\left\{x'\,x''\dots x^{[n]}\right\}\left|\left[x'\dots x^{[n]}\right]\right|k_{n-4}^2k_{n-5}^3\dots k_2^{n-4}k_1^{n-3}}{\left|\left[x'\,x''\dots x^{[n-1]}\right]\right|^2k_{n-4}^2k_{n-5}^3\dots k_2^{n-4}k_1^{n-3}}=$$
$$=\frac{\left\{x'\,x''\dots x^{[n]}\right\}\cdot\left|\left[x'\,x''\dots x^{[n-2]}\right]\right|}{\left|\left[x'\,x''\dots x^{[n-1]}\right]\right|^2}.$$

Воспользуемся равенством (вытекающим из определения векторов Френе) $x'=\dfrac{\dot{x}}{|\dot{x}|}=\alpha\dot{x}$ при

$\alpha = \dfrac{1}{|\dot{x}|}$ и приведем последнее равенство из (8) к окончательному виду:

$$k_{n-1} = \frac{\alpha^{1+2+\ldots+n}\left\{\dot{x}\ddot{x}\ldots x^{(n)}\right\}\cdot\alpha^{1+2+\ldots+(n-2)}\left\|\left[\dot{x}\ddot{x}\ldots x^{(n-2)}\right]\right\|}{\left(\alpha^{1+2+\ldots+(n-1)}\right)^2\left[\dot{x}\ddot{x}\ldots x^{(n-1)}\right]^2} =$$

$$= \frac{\alpha^{2(1+2+\ldots+(n-2))}\cdot\alpha^{2n-1}\left\{\dot{x}\ldots x^{(n)}\right\}\cdot\left\|\left[\dot{x}\ldots x^{(n-2)}\right]\right\|}{\alpha^{2(1+2+\ldots+(n-2))}\cdot\alpha^{2n-2}\left[\dot{x}\ldots x^{(n-1)}\right]^2} =$$

$$= \frac{\alpha\left\{\dot{x}\ldots x^{(n)}\right\}\left\|\left[\dot{x}\ldots x^{(n-2)}\right]\right\|}{\left[\dot{x}\ldots x^{(n-1)}\right]^2}.$$

Теорема доказана.

Введем в рассмотрение новое обозначение для косого произведения векторов

$$V_n(x,t) \overset{df}{=} \left\{\dot{x}\,\ddot{x}\ldots x^{(n)}\right\}, \tag{9}$$

где натуральное число n называется длиной косого произведения, и стандартное обозначение функции знака $sign\,(\ldots) = \pm 1$.

Теорема 2. Имеет место следующий предикат (тождественно истинная форма)

$(\forall x \neq 0)(\forall t \geq t_0)\,(\mathrm{sign}\,k_{n-1}(x,t) = \mathrm{sign}\,V(x,t))$.

Доказательство. Из равенства (6) и определения (9) следует, что кривизна траектории системы соответствующего порядка

$$k_{n-1}(x,t) = \frac{\left\{\dot{x}\,\ddot{x}\ldots x^{(n)}\right\}}{|\dot{x}|^{1+2+\ldots+n}\,k_1^{n-1}k_2^{n-2}\ldots k_{n-2}^2} =$$

$$= \frac{V(x)}{|\dot{x}|^{\frac{n+1}{2}n}\,k_1^{n-1}k_2^{n-2}\ldots k_{n-2}^2}. \tag{10.A}$$

Как уже отмечалось, кривизны траекторий динамических систем $k_1,\ldots,k_{n-2}$ считаются (выбираются) строго положительными. Тогда из равенства (10.А), условия (con 3) и определения общего решения $x(t)$ следует истинность заявленного предиката. Теорема доказана.

3. Новый подход к построению функций ляпуновского типа. Для обоснования новой идеи, на базе которой будет предложен технологический, алгоритмически реализуемый метод построения функций ляпуновского типа для анализа устойчивости реальных динамических систем по их моделям, понадобятся некоторые дополнительные построения. При этом невозмущенное (или возмущенное) движение понимается в ляпуновском смысле [2].

Определение 1. Функцию $V(x,t)$, заданную на области S, назовем знакопостоянной, если $V(0,t)=0$ на интервале J и ($\forall$ x_1, $x_2 \neq 0$) ($\forall t$) $sign\,V(x_1,t) = sign\,V(x_2,t)$ [здесь, как и ранее, $sign\ V(\ldots)$ – стандартная функция знака].

Если знакопостоянная функция не зависит от времени t, т.е. $V = V(x)$ и равенство $V(x) = 0$ имеет место только для $x = 0$, то функцию $V(x)$ назовем знакоопределенною.

Функцию $V(x,\ t)$, заданную на области S, назовем знакоопределенною, если для нее существует положительно определенная функция $W(x)$, не зависящая от времени t, такая, что одна из двух функций $V - W$ или $-W - V$ представляла бы функцию положительную. При этом в первом случае $V(x,\ t)$ назовем положительно определенной, а во втором случае – отрицательно определенной.

Далее, для упрощения изложения, условие принадлежности вектора x области $Q = \{x : \|x\| < H\}$ – чебышевской окрестности начала координат, будет выполняться всегда автоматически.

Определение 2. Интервалы времени, на которых функция $V = V(x,\ t) > 0$, а ее производная по t функция $\dot{V} \leq 0$, назовем интервалами устойчивости сверху (или положительной устойчивости).

Интервалы времени, на которых $V > 0$ и $\dot{V} > 0$, назовем интервалами неустойчивости сверху (или положительной неустойчивости).

Интервалы времени, на которых $V<0$ и $\dot{V} \geq 0$, назовем интервалами устойчивости снизу (или отрицательной устойчивости).

Интервалы времени, на которых $V < 0$ и $\dot{V} < 0$, назовем интервалами неустойчивости снизу (или отрицательной неустойчивости).

Интервалы времени, на которых $V=0$, назовем интервалами неопределенности.

Объединение всех интервалов устойчивости сверху для функции V назовем ее зоной устойчивости сверху.

Аналогично определяются зоны неустойчивости сверху, устойчивости и неустойчивости снизу, зона неопределенности.

Все эти введенные в рассмотрение зоны назовем характерными зонами функции V.

Вернемся к математической модели динамической системы (1) и к высшим кривизнам $k_i(x,\ t)$ ее траекторий. Из свойств функции $f\,(x,\ t)$ следует, что общее решение системы $x(t)$ [равно как и любое его частное решение $x(t)$] обладает в каждой точке $t = t_1$ некоторой кривизной.

По определению старшей кривизной траектории системы $x(t)$ точке $t = t_1$ назовем ненулевую кривизну наивысшего порядка в точке $t = t_1$.

Определение 3. Функцию ляпуновского типа $V_L(x,t)$, на свойствах которой основан технологический метод анализа устойчивости динамической системы, определим следующим образом.

Областью определения $V_L(x,t)$ служит область R. Если старшая кривизна решения $x(t)$ в точке $t = t_1$ есть k_i, то

$$V_L(x,t_1) = V_{i+1}(x(t_1),t_1). \qquad (10.\text{B})$$

Функцию $V_L(x,t)$ назовем косой функцией кривой, а ее образующие функции $V_{i+1}(x,t)$ назовем компонентами косой функции.

Замечание 1. Заметим для определенности, что в правой части последнего равенства x – связная переменная, тогда как в левой части равенства x – уже свободная переменная с множеством значений Q.

Замечание 2. Вид компонент косой функции V_L зависит параметра t. Поэтому в запись функции V_L в явном виде вошла переменная времени t.

Теорема 3. Косая функция V_L динамической системы является непрерывной на R функцией, гладкой по времени t, причем функция обращается в ноль на всем интервале I только опорной траектории $x = 0$.

Доказательство. Действительно, из определения функции V_L, равенств (9) и (10) следует, что значение функции V_L есть не что иное, как значение числителя дроби наивысшей ненулевой кривизны траектории системы (1). Старшая кривизна интегральной кривой системы (1) при любых начальных данных есть функция непрерывная. Следовательно, будет непрерывной и функция V_L на односвязной области R. Достаточная гладкость по t функции f [условие (con 1)] обеспечивает гладкость по времени t косой функции V_L. Равенство функции V_L нулю на I приводит к тому, что $x(t) = const$, но последнее исключено по определению решения $x(t)$. Теорема доказана.

Определение 4. Пусть косая функция V_L имеет зону устойчивости сверху D_1 и зону неустойчивости сверху D_2.

Зону $D = D_1 \cup D_2$ назовем зоной знакоопределенности функции V_L (подчеркивая в случае необходимости ее знак).

Будем говорить, что функция V_L является потенциально убывающей на зоне D, если

$$\begin{gathered}(\forall t_0 \in D)(\exists T \in D, T \geq t_0)\\ (\forall t \geq T, t \in D)(\forall x \in Q)\\ (V_L(x,t) \leq V_L(x,t_0)). \qquad (11.\text{A})\end{gathered}$$

Для зон устойчивости и неустойчивости снизу аналогично определяется свойство потенциального возрастания функции V_L [с изменением знака неравенства в теле предиката (11. А) на противоположный].

Для формулирования правил исследования устойчивости динамической системы, необходимы следующие формулы.

Теорема 4. Для косого произведения векторов $V_n(x,t) = \{\dot{x}\,\ddot{x}\ldots x^{(n)}\}$ и его производной по времени $\dot{V}_n(x,t)$ верны следующие формулы:

$$\dot{V}_n(x,t) = \left\{\dot{x}\,\ddot{x}\ldots x^{(n-1)}x^{(n+1)}\right\},$$

$$V_n(x,t) = \begin{vmatrix} \dot{x}_1 & \ddot{x}_1 & \ldots & x_1^{(n)} \\ \dot{x}_2 & \ddot{x}_2 & \ldots & x_2^{(n)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dot{x}_n & \ddot{x}_n & \ldots & x_n^{(n)} \end{vmatrix}, \qquad (11.\text{B})$$

$$\dot{V}_n(x,t) = \begin{vmatrix} \dot{x}_1 & \ddot{x}_1 & \ldots & x_1^{(n-1)} & x_1^{(n+1} \\ \dot{x}_2 & \ddot{x}_2 & \ldots & x_2^{(n-1)} & x_2^{(n+1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dot{x}_n & \ddot{x}_n & \ldots & x_n^{(n-1)} & x_n^{(n+1)} \end{vmatrix}. \qquad (11.\text{C})$$

Доказательство. Из определения и известных свойств косого произведения векторов [35, стр. 67] с очевидностью следует формула для функции $V_n(x, t)$. Имеем далее:

$$\begin{gathered}\dot{V}_n(x,t) = \left\{\ddot{x}\,\ddot{x}\ldots x^{(n-1)}x^{(n+1)}\right\} + \left\{\dot{x}\,\dddot{x}\,\dddot{x}\ldots x^{(n-1)}x^{(n+1)}\right\} + \\ + \ldots + \left\{\dot{x}\,\ddot{x}\ldots x^{(n+1)}x^{(n+1)}\right\} + \left\{\dot{x}\,\ddot{x}\ldots x^{(n-1)}x^{(n+1)}\right\} = \\ = \left\{\dot{x}\,\ddot{x}\ldots x^{(n-1)}x^{(n+1)}\right\}.\end{gathered}$$

Последнее, в виду формулы для функции $V_n(x, t)$, доказывает теорему.

Следующая теорема является центральной для всей работы и воплощает идею построения технологического, алгоритмически реализуемого метода построения функций ляпуновского типа для анализа устойчивости реальных динамических систем по их моделям.

Теорема 5. Пусть дифференциальные уравнения возмущенного движения динамической системы таковы, что косая функция V_L удовлетворяет требованиям:

1) функция V_L имеет неограниченную зону устойчивости (сверху или снизу);

2) функция V_L является потенциально убывающей на знакоположительной зоне и потенциально возрастающей на знакоотрицательной зоне.

Тогда невозмущенное движение динамической системы устойчиво.

Доказательство. Пусть (для определенности) функция V_L имеет неограниченную зону устойчивости сверху D_1 и зону неустойчивости сверху D_2, а также какую-то зону устойчивости снизу Δ_1 и зону неустойчивости снизу Δ_2. Рассмотрим зоны знакоопределенности $D = D_1 \cup D_2$, $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$. Напомним, что все зоны суть подмножества интервала времени *I*. Если зона Δ_1 ограничена сверху некоторым числом T^*, то, рассматривая задачу устойчивости при $t \geq T^*$, сведем ее к задаче устойчивости только при условии неограниченности зоны D_1. Таким образом, при доказательстве данного пункта можно ограничиться рассмотрением общего случая, когда зоны D_1 и Δ_1 неограничены сверху.

Сужение функции $V_L(x, t)$ по параметру t на зоне (определения) D_1 обозначим $V_{L,D_1}(x,t)$.

Аналогично определяются функции $V_{L,\Delta_1}(x,t)$, $V_{L,D}(x,t)$, $V_{L,\Delta}(x,t)$.

Функция $V_{L,D_1}(x,t)$ положительно определена на зоне D_1, а ее производная по t функция $\dot{V}_{L,D_1}(x,t)$ представляет собой отрицательную функцию или тождественно равна нулю на зоне D_1.

Из определения зоны устойчивости D_1 и положительно определенной функции на D_1 следует, что найдутся такие действительные константы T_1 и H, при которых для всех значений времени t, удовлетворяющих естественным условиям

$$t \geq T_1 \,\&\, t \in D_1, \qquad (12)$$

и всех значений координат динамической системы $x_1, x_2, ..., x_n$, зависящих от времени и удовлетворяющих условиям

$$|x_s| \leq H \ \ (s = 1, 2, ..., n), \qquad (13)$$

будут выполняться (при всех означенных значениях переменных) неравенства:

$$V_{L,D_1}(x,t) \geq W_1(x), \quad \dot{V}_{L,D_1}(x,t) \leq 0, \qquad (14)$$

где W_1 – сопровождающая функция для функции V_{L,D_1}.

Заметим, что по характеру решаемой задачи, диктуемому реальными техническими экспериментами и моделями, число T_1 трактуется как достаточно большое (зона D_1 не ограничена сверху), а число H как достаточно малое. Как следует из определения, во множество D_1 не могут входить изолированные точки.

Рассмотрим координаты системы x_s, как функции от времени t, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям возмущенного движения. Следовательно, без ограничения общности можно допустить, что значения $\xi_s = x_s(T_1)$ этих функций при значениях времени $t = T_1$ удовлетворяют условиям (13) со знаками строгого неравенства:

$$|\xi_s| < H \quad (s = 1, 2, ..., n) \ . \qquad (15)$$

Тогда в силу естественной непрерывности функций $x_s(t)$ на зоне D_1 условия (13) будут, очевидно, выполняться, по крайней мере, для всех значений времени t, достаточно близких к T_1, причем, все эти значения времени t лежат в зоне D_1. Будем далее рассматривать только такие значения последнего (т. е. параметра времени t), которые не менее T_1.

Положим по определению, что

$$V_{01} = V_L(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, T_1). \qquad (16)$$

Нетрудно видеть, что функция $V_{L,D}$ по условию является потенциально убывающей на D. Следовательно, найдется такое значение $T_2 \in D$ ($T_2 \geq T_1$), что для всех времен $t \in D$ и $t \geq T_2$ будет верно неравенство

$$V_{L,D}(x,t) \leq V_{01}, \qquad (17)$$

причем при значениях времени $t = T_2$ и координат $x_s = \xi_s$ имеет место равенство

$$V_{L,D} = V_{01}. \qquad (18)$$

Лемма 1. Из равенства (18) следует, что значение $T_2 \in D_1$.

<u>Доказательство.</u> Действительно, в противном случае ($T_2 \in D_2$) в силу возрастания функции V_L на зоне D_2 нашлось бы такое время $t^* > T_2$, для которого выполнялось бы неравенство $V_L > V_{01}$. Однако это неравенство противоречит условию (17). Лемма доказана.

Так как функция $V_{L,D}$ положительно определена на зоне D, то первое неравенство из серии неравенств (14) распространяется на всю зону D:

$$W_1 \leq V_{L,D}, \qquad (19)$$

откуда, имея в виду неравенство (17), получим неравенство

$$W_1 \leq V_{01}. \qquad (20)$$

В то же время из равенства (18) следует, что без ограничения общности в качестве величины T_1 можно взять значение T_2. Таким образом, можно считать, что в промежутке времени от T_2 до t условия (13) постоянно выполняются, и в том же промежутке для координат динамической системы – функций $x_s(t)$, верно неравенство (20). Так как зона D_1 неограничена сверху, то вторую часть неравенства (20) – величину V_{01} можно сделать сколь угодно малой, делая таковыми величины ξ_s, так как по теореме 3 косая функция непрерывна и при любом времени функция $V_L(0, t) = 0$. Обозначим через ε некоторое отличное от нуля, достаточно малое (заведомо строго меньшее значения H) число. Рассмотрим всевозможные выходящие из начала координат векторы координат системы x с неевклидовой нормой

$$\|x\| = \varepsilon . \qquad (21)$$

Концы этих векторов образуют в аффинном пространстве $\mathbf{A}^n$ поверхность n-мерного куба G со стороной 2ε. Сопровождающая функция W_1 функции V_L всегда положительна на зоне D. Следовательно, существует точный нижний предел W_1 на множестве G:

$$l_1 = \inf_{x \in G} W_1(x) . \qquad (22)$$

Число l_1 будет положительным, ибо по определению сопровождающей функции $(\forall x \neq 0)$ $W_1(x) > 0$, и число l_1 в силу непрерывности функции W_1 будет одним из значений, которые функция W_1 может принять на замкнутом множестве G. Как уже отмечалось, начальное значение V_{01} можно сделать сколь угодно малым. Следовательно, всегда можно сделать так, что будет иметь место неравенство

$$V_{01} < l_1 . \qquad (23)$$

Так как косая функция V_L потенциально убывает на D, то неравенство (23) будет выполняться для всяких ξ_s, соответствующих значениям параметра $T_2 \in D$, таких, что

$$|\xi_s| \le \lambda_1 \quad (s = 1, 2, ..., n), \qquad (24)$$

где λ_1 – некоторое подходящее отличное от нуля действительное число.

Полагаем далее, что величины ξ_s действительно выбраны согласно неравенствам (24).

Лемма 2. Число λ_1 необходимо и строго меньше ε.

Доказательство. Действительно, если бы имело место неравенство $\lambda_1 \ge \varepsilon$, то для подходящего значения $T_2 \in D$ и соответствующего вектора координат системы $x_0 = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)^T$ с нормой $\|x_0\| = \varepsilon$ в силу условий (22), (23) выполнялось бы неравенство $V_{01} < W_1(x_0)$, которое, как нетрудно видеть, противоречит условию (20). Лемма доказана.

Если же значение $\lambda_1 < \varepsilon$, то функции координат системы $x_s(t)$ для соответствующих значений времени $t \ge T_2$, $t \in D$ будут тогда удовлетворять неравенствам

$$|x_s| < \varepsilon \quad (s = 1, 2, ..., n) \qquad (25)$$

для всех значений t достаточно близких (справа) к значению времени T_2.

Напомним, что все проведенные выше рассуждения относились к знакоположительной зоне D.

Перейдем ко второй части доказательства. Проведя аналогичные рассуждения и построения для знакоотрицательной зоны Δ, получим и аналогичные неравенства для этой зоны. А именно, найдется такое значение параметра времени t, равное T_3, что для всех значений времени $t \ge T_3$

$$W_2(x) \ge V_{02}, \qquad (26)$$

где $V_{02} = V_{L,\Delta}(\xi_1, ..., \xi_n, T_3)$, $\xi_s = x_s(T_3)$, $(s = 1, 2, ..., n)$, а W_2 – сопровождающая функция для функции $V_{L,\Delta}$ на зоне Δ. Если положить теперь

$$l_2 = \sup_{x \in G} W_2(x) , \qquad (27)$$

то всегда можно сделать так, что для всех значений аргументов имеет место неравенство

$$V_{02} > l_2 . \qquad (28)$$

Так как косая функция V_L потенциально возрастает на зоне Δ, то неравенство (28) будет выполняться для всех значений ξ_s, таких, что

$$|\xi_s| \le \lambda_2 \quad (s = 1, 2, ..., n) , \qquad (29)$$

где λ_2 – это некоторое ненулевое действительное число. Функции координат системы $x_s(t)$ для всех достаточно близких к T_3 (справа) значений времени t ($t \in \Delta$) будут также удовлетворять неравенствам

$$|x_s| < \varepsilon \quad (s = 1, 2, ..., n) . \qquad (30)$$

Положим по определению, что время $T = \max\{T_2, T_3\}$ и пусть (для определенности) время $T = T_2$. Изменяясь непрерывно во времени $t \ge T$ в границах некоторого односвязного интервала I_1, входящего в зону D, функции $x_s(t)$ не могут перестать удовлетворять неравенствам (25) иначе, как достигнув предварительно некоторых значений, удовлетворяющих условию (21). Последнее же утверждение при условиях (22), (23) несовместимо с условием (20). Следовательно, при непрерывном возрастании времени t в границах интервала I_1 остается справедливым условие (25).

Если, возрастая, время t переходит из интервала I_1 в интервал I_2 зоны Δ по некоторому интервалу Ω (в частности, даже по точке), то на интервале Ω функция V_L меняет свой характер с положительной определенности на отрицательную определенность. Из определения функции V_L следует, что на интервале Ω первая кривизна k_1 равна нулю и, следовательно, на Ω переменные $x_S(t)$ продолжают удовлетворять условию (25).

Если положить $T_4 = \sup\Omega$, то в силу непрерывности функции V_L в некоторой правой окрестности точки T_4 остаются в силе условия (30). При этом в силу потенциального убывания функции $V_{L,\Delta}$ сохраняют силу неравенства (26) и (28). Тогда, изменяясь непрерывно с течением времени t в границах интервала I_2, функции $x_S(t)$ так же, как и в случае рассмотрения интервала I_1, не могут перестать удовлетворять неравенствам (30) иначе, как достигнув предварительно значений, удовлетворяющих условию (21). Последнее же утверждение вновь при условиях (27), (28) несовместимо с неравенством (26). Следовательно, во все время непрерывного увеличения времени t в рамках интервала I_2 неравенства (30) сохраняют силу. Аналогичная ситуация возникает с переходом времени t из зоны Δ в зону D.

Таким образом, должно заключить, что каковы бы ни были значения ξ_S , удовлетворяющие условию

$$\left|\xi_s\right| < \min\left\{\lambda_1, \lambda_2\right\} \; (s = 1, 2,\ldots, n), \qquad (31)$$

функции x_S будут удовлетворять условиям (25), равно как и (30), для всех значений t из интервала I, больших T . Теорема доказана.

Замечание. Следует отметить, что в предыдущих рассуждениях основную роль играет функция косого произведения V_L. Зачастую в конкретных задачах эта функция имеет сложный вид и работа с ней вызывает большие вычислительные осложнения. Задачу анализа устойчивости динамической системы можно упростить, если представить функцию V_L в виде

$$V_L(x, t) = \alpha V_1(x, t) + V_2(x, t),$$

где α = *const* или α – функция, имеющая постоянный знак на области R. Если знак $V_L(x, t)$ зависит только от знака $V_1(x, t)$ на области R, то в качестве искомой функции (при выполнении условий теоремы 5) может быть использована функция $V_1(x, t)$.

Алгоритм. Предложенный подход к системному анализу устойчивости динамических систем имеет технологический (алгоритмический) характер.

Приведем алгоритм в явном виде. Для упрощения изложения и приближения к реальным задачам анализа устойчивости динамических систем (рассмотренным во второй части работы), предполагаем, что для косой функции $V_L(x,t)$ вида (10.B) имеет место условие $V_L(x,t_1) = V_n(x,t)$. Тем самым утверждается, что система имеет кривизны до n -го порядка включительно во всех ее точках и, тем самым, имеет весьма гладкую траекторию на всем ее протяжении. Как следствие, декларируется, что зоны устойчивости системы (в случае их существования) будут сохранять свой характер в некоторой окрестности начала координат.

Шаг. 1. Описать модель функционирования динамической системы в каноническом виде (1).

Шаг 2. Вычислить (сформировать) функцию $V_n(x,t)$ по формуле (11. B).

Шаг 3. Вычислить (сформировать) функцию $\dot{V}_n(x,t)$ по формуле (11. C).

Шаг 4. По виду функций $V_n(x,t)$ и $\dot{V}_n(x,t)$ доказать наличие зон устойчивости системы, используя известные методы анализа знакоопределенности функций или форм. Например, для задач, рассмотренных во второй части работы, при $n = 2$, применив критерий Сильвестра или метод Лагранжа.

В общем случае шаг 4 осуществляется численно, компьютерными методами.

Шаг. 5. Применить теорему 5 (о достаточных условиях устойчивости системы) и ответить на вопрос об устойчивости системы.

Замечание. Формирование функции ляпуновского типа $V_L(x,t)$ и исследование ее характерных зон на основе свойств кривизн траекторий системы вида (6), (7), (8), (10.A) позволяет, ввиду теоремы о нормальных уравнениях траекторий, обоснованно выдвинуть гипотезу о возможности описания *в общем случае* характера устойчивого (асимптотически устойчивого) приближения траектории к началу координат, что является главным (до сих пор не решенным) вопросом теории устойчивости.

Выводы. В первой части работы предложен метод анализа устойчивости динамических систем, который, в отличие от известных методов [2, 3, 6, 24, 31–36, 38], имеет ярко выраженный конструктивный, алгоритмический характер. Конкретное применение этого метода на реальных задачах анализа устойчивости динамических систем будет приведено во второй части работы.

Одновременно отметим, что технически метод сложен в реализации, особенно для систем большой размерности. Однако для задач теории динамических систем, рассматриваемых авторами в прикладном плане во второй части работы (уравнения Льенара, Ван дер Поля, Ла-Салля и их модификации), метод вполне реализуем и эффективен.

Библиографический список

1. **Пуанкаре А.** О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями /пер. с франц. М.: ОГИЗ Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1947. – 385 с.

2. **Ляпунов А. М.** Общая задача об устойчивости движения. М.-Л.: Гос. изд. технико-теоретич. лит., 1950. – 472 с.

3. **Ла-Салль Ж., Лефшец С.** Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова /пер. с англ. – М.: Мир, 1964. – 168 с.

4. Нелинейная динамика и управление: сборник статей. Вып. 7 / под ред. С.В. Емельянова, С.К. Коровина. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010.

5. 2-я Международная конференция «Системный анализ и информационные технологии», САИТ-2007 (10-14 сентября, 2007 г., Обнинск, Росся): Труды конференции в 2-х т. – М.: Издательство ЛКИ, 2007.

6. **Шестаков А. А.** Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. – М.: КомКнига, 2007. – 320 с.

7. Kapitula T., Promislow K. Spectral and Dynamical Stability of Nonlinear Waves : Springer, 2013. – 369 p. – ISBN-10: 1461469945

8. **Chen Z., Huang J.** Stabilization and Regulation of Nonlinear Systems: A Robust and Adaptive Approach Springer, 2015. – 365 p.

9. **Котов К. Ю. Шпилевая О. Я.** Переключаемые системы: устойчивость и проектирование (обзор) // Автометрия. 2008. Т. 44. № 5. – С. 71-87.

10. **Матросов В. М., Маликов А. И.** Развитие идей А.М. Ляпунова за 100 лет: 1892–1992 // Изв. вузов. Матем., 1993. № 4. – С. 3–47.

11. **Александров А. Ю., Платонов А. В.** Об абсолютной устойчивости одного класса нелинейных систем с переключениями // Автом. и телем. 2008. Т.69. №7. – С.1101-1116.

12. **Мартынюк А. А., Косолапов В. И.** Устойчивость механических систем при изменяющейся модели связей //Прикл. механика, 1978. Т.14. №12. – С.125-128.

13. **Asarin E., Bournez O., Dang T**. and **Maler O.** Approximate reachability analysis of piecewise-linear dynamical systems //HSCC, LNCS, 2000. P. 20-31.

14. **Blanchini F.** Nonquadratic Lyapunov functions for robust control //Automatica. 1995. V. 31(3). P. 451-461.

15. **Cai C., Teel A. R.** and **Goebel R.** Smooth Lyapunov functions for hybrid systems part i: Existence is equivalent to robustness //IEEE Trans. Automat. Contr. 2007. V.52(7). – P. 1264-1277.

16. **Shorten R., Narendra K.** and **Mason O.** A result on common quadratic Lyapunov functions //IEEE Trans. Automat. Contr. 2003. V. 48(1). – P. 110-113.

17. **Lienard A.,** "Rev. gen. electr.", 1928, T. 23. – P. 901-912; 946-954.

18. **Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р.,** Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений / пер. с нем., М.: Мир, 1974. – 319 с.

19. **Стретт Дж. В. (лорд Рэлей)**. Теория звука, в 2-х т., 2 изд. /пер. с англ. М.-Л.: ГИТТЛ, 1944. Т. 1 – 496 с.; Т. 2 – 479 с.

20. **Чезари Л.,** Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений /пер. с англ., М.: Мир, 1964. – 480 с.

21. **Van der Pol B.**, «Phil. Mag.», 1922, Ser. 6, V. 43, P. 700-719; 1926, Ser. 7, V. 2, – P. 978-992.

22. **Стокер Дж.,** Нелинейные колебания в механических и электрических системах /пер. с англ., 2 изд., М.: ИЛ, 1952. – 264 с.

23. **Kolmogoroff A. N.** Sulla teoria di Volterra della lotta per l'esistenza // G. Ist. ital. attuar. – 1936. – Vol. 7. – P. 74-80.

24. **Руш Н., Абетс П., Лалуа М**. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости /пер. с англ. – М.: «Мир», 1980. – 304 с.

25. **Govaerts W., Kuznetsov Yu. A. and Sijnave B.** Continuation of codimension – 2 equilibrium bifurcations in CONTENT // In: Doedel E. and Tickerman L.S. (eds). Numerical methods for bifurcation problems and large-scale dynamical systems. Springer-Verlag, New-York, 2000. – P. 163-184.

26. **Митрохин Ю. С.** Об управляемости в малом систем нелинейных дифференциальных уравнений оптимального регулирования // Дифференц. уравн. 1974. Т.10. Вып.8. – С.1406-1411.

27. **Миронов В. В., Митрохин Ю. С.** Устойчивость систем автоматического управления с переменной структурой // Вестник РГРТА. 1999. Вып. 6. – С. 37-40.

28. **Миронов В. В.** Методы построения функций Ляпунова: Тезисы докладов международной научной конференции «Нелинейный анализ и функционально-дифференциальные уравнения». Воронеж. 2000. – С. 154-155.

29. **Миронов В. В.** Исследование устойчивости решений разностных уравнений Вольтерра // Известия РАЕН. Дифференц. уравнения. 2001. № 5. – С. 112-113.

30. **Миронов В. В.** Фундаментальные математические проблемы. Комментарии (Пленарный доклад) / XXVIII Межд. научн. конф. «Математические методы в технике и технологиях» Рязань, 2015. – С. 3-12.

31. **Барбашин Е. А.** Функции Ляпунова. М.: Наука, 1970. – 240 с.

32. **Лозгачев Г. И.** Построение функций Ляпунова для нелинейных динамических систем // Дифференц. уравн. 1998. Т.34. № 11. – С.1565-1567

32. **Пропой А. И.** О проблеме устойчивости движения // А и Т. 2000. № 4. – С.51-60

33. **Пропой А. И.** О построении функций Ляпунова // А и Т. 2000, № 5. С. 32-38, № 6. – С. 31-40.

34. **Румянцев В. В.** Сравнение трех методов построения функций Ляпунова // ПММ. 1995. Т. 59. Вып. 6. – С. 916-921.

35. **Четаев Н. Г.** Устойчивость движения. Рабо-

ты по аналитической механике. Изд. 4-е, исправ-ленное, с примеч. акад. В.В. Румянцева. М.: Наука, 1990. – 176 с.

36. **Розенфельд Б. А.** Многомерные пространства. М.: Наука. 1966. – 668 с.

37. **Зубов В. И.** Устойчивость движения. Методы Ляпунова и их применение. 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1984. – 232 с.

UDC 517.93

TECHNOLOGICAL APPROACH TO THE RESEARCH OF DYNAMIC SYSTEMS STABILITY: SYSTEM ANALYSIS OF DYNAMIC PROCESSES STABILITY

V. V. Mironov, PhD (physical and mathematical sciences), Professor at the Department of higher mathematics, RSREU; mironov1vv@mail.ru
Yu. S. Mitrokhin, PhD (physical and mathematical sciences), Associate Professor at the Department of higher mathematics, RSREU; mitrokhin.y.s@rsreu.ru

In the system analysis *of dynamic models an essential role is played by the questions connected with the analysis of dynamic systems balance provision stability, and in their mathematical models – stability of equations systems solutions. Technical "stability" is a capability of system to return to an equilibrium condition after third-party indignation or management. The direct method of Lyapunov remains the major one for the research of dynamic systems stability. However, heuristic creation of Lyapunov function isn't connected directly with structural properties of the researched system and therefore there are no exhaustive general methods of its creation on the set system model yet. It is the most serious lack of Lyapunov methodology. In the work this shortcoming is overcome: two fundamental problems of the system analysis of dynamic systems are considered: creation of Lyapunov type functions according to a system model and assessment on this basis of stability area (asymptotic stability) of a dynamic system.*

The work aim is *to offer technological, algorithmically implementable method of creation of functions of Lyapunov type for the analysis of real dynamic systems stability on their models. Properties of the offered approach are considered. The method is approved on the systems described by Lyenar, Van der Paul, La-Sall's equations and showed the outstanding performance.*

Key words: *system analysis, dynamic processes, stability, Lyapunov type functions, Lyenar, Van der Paul, La-Sall's system.*

DOI: 10.21667/1995-4565-2017-59-1-114-126

References

1. **Puankare A.** O krivyh, opredeljaemyh differencial'nymi uravnenijami / Per. s franc. M.: OGIZ Gosudarstvennoe izdatel'stvo tehniko-teoreticheskoj literatury, 1947. – 385 p. (**Poincare A.** About the curves determined by the differential equations / Lanes with fr. M.: OGIZ State publishing house of technical and theoretical literature).

2. **Ljapunov A. M.** Obshhaja zadacha ob ustojchivosti dvizhenija. M.-L.: Gos. izd. tehniko-teoretich. lit., 1950. – 472 p. (**Lyapunov A. M.** The general task about stability of the movement. M.-L.: State. prod. technical теоретич. litas., 1950. 472 p.).

3. **La-Sall' Zh., Lefshec S.** Issledovanie ustojchivosti prjamym metodom Ljapunova /Per. s angl. – M.: Mir, 1964. – 168 p. (La-Sall J., Lefschetz S. Research of stability by a direct method of the Lyapunov/lane with English – M.: World, 1964. 168 pages.).

4. Nelinejnaja dinamika i upravlenie: Sbornik statej. Vyp. 7 / Pod red. S. V. Emel'janova, S. K. Korovina. – M.: FIZMATLIT, 2010. (Nonlinear dynamics and management: Collection of articles. The issue 7 / Under the editorship of S. V. Yemelyanov, S. K. Korovin. – M.: FIZMATLIT, 2010.)

5. 2-ja Mezhdunarodnaja konferencija «Sistemnyj analiz i informacionnye tehnologii», SAIT-2007 (10-14 sentjabrja, 2007, Obninsk, Rossija): Trudy konferencii v 2-h t. – M.: Izdatel'stvo LKI, 2007. (2nd International conference "System Analysis and Information Technologies", SAIT-2007 (on September 10-14, 2007, Obninsk, Russia): Works of a conference in 2 vol. – M.: LKI publishing house, 2007)

6. **Shestakov A. A.** Obobshhennyj prjamoj metod Ljapunova dlja sistem s raspredelennymi parametrami. – M.: KomKniga, 2007. 320 p. (**Shestakov A. A.** The generalized direct method of Lyapunov for systems with the distributed parameters. – M.: Komkniga, 2007. 320 p.)

7. **Kapitula T., Promislow K.** Spectral and Dynamical Stability of Nonlinear Waves : Springer, 2013. 369 p. ISBN-10: 1461469945

8. **Chen Z., Huang J.** Stabilization and Regulation of Nonlinear Systems: A Robust and Adaptive Approach Springer, 2015. 365 p.

9. **Kotov K. Ju. Shpilevaja O. Ja.** Perekljuchaemye sistemy: ustojchivost' i proektirovanie (obzor) // Avtometrija. 2008. T. 44. № 5. S. 71-87 (**Kotov K. Yu. Shpilevaya O. Ya**. The switched systems: stability and design (review)//Avtometriya. 2008. Vol. 44. No. 5. 71-87 pp.).

10. **Matrosov V. M., Malikov A. I.** Razvitie idej A. M. Ljapunova za 100 let: 1892-1992 // Izvestija vuzov. Matem., 1993. № 4. S. 3-47. (**Matrosov V M., Malikov A. I.** Development of the ideas of A. M. Lyapunov in 100 years: 1892–1992 / News of higher education institutions. Matem., 1993. No. 4. 3-47 pp.).

11. **Aleksandrov A. Ju., Platonov A. V.** Ob absoljutnoj ustojchivosti odnogo klassa nelinejnyh sistem s perekljuchenijami //Avtomatika i telemehanika, 2008. T.69. №7. S.1101-1116 **(Alexandrov A. Yu., Platonov A. V.** About absolute stability of one class of nonlinear systems with switchings//Automatic equipment and telemechanics, 2008. Vol.69. No. 7. 1101-1116 pp.)

12. **Martynjuk A. A., Kosolapov V I.** Ustojchivost' mehanicheskih sistem pri izmenjajushhejsja modeli svjazej //Prikl. mehanika, 1978. T.14. №12. S.125-128. (**Martynyuk A. A., Kosolapov V. I.** Stability of mechanical systems in case of the changing model of communications//Application-oriented mechanics, 1978. Vol.14. No. 12. 125-128 pp.)

13. **Asarin E., Bournez O., Dang T**. and **Maler O.** Approximate reachability analysis of piecewise-linear dynamical systems //HSCC, LNCS, 2000. – P. 20-31.

14. **Blanchini F.** Nonquadratic Lyapunov functions for robust control //Automatica. 1995. V. 31(3). – P. 451-461.

15. **Cai C., Teel A. R.** and **Goebel R.** Smooth Lyapunov functions for hybrid systems part i: Existence is equivalent to robustness // IEEE Trans. Automat. Contr. 2007. V. 52(7). P. 1264-1277.

16. **Shorten R., Narendra K.** and **Mason O.** A result on common quadratic Lyapunov functions //IEEE Trans. Automat. Contr. 2003. V. 48(1). P. 110 – 113.

17. **Lienard A.**, «Rev. gen. electr.», 1928, T. 23. P. 901-912; 946-954.

18. **Rejssig R., Sansone G., Konti R**., Kachestvennaja teorija nelinejnyh differencial'nyh uravnenij, per. s nem., M.: Mir, 1974. – 319 p. (**Rejssig R., Sansón G., Conti R.**, the Qualitative theory of the nonlinear differential equations, the lane with him., M.: World, 1974. 319 p.).

19. **Strett Dzh. V. (lord Rjelej).** Teorija zvuka, v 2-h t., 2 izd. /Per. s angl. M.-L.: GITTL, 1944. T. 1 – 496 s.; T. 2 – 479 p. (**Strett Dzh. V. (lord Rayleigh).** The theory of a sound, in 2 vol., 2 prod. / the Lane with English M.-L.: GITTL, 1944. Vol. 1 – 496 p.; Vol. 2 479 p.).

20. **Chezari L.** Asimptoticheskoe povedenie i ustojchivost' reshenij obyknovennyh differencial'nyh uravnenij, per. s angl., M.: Mir, 1964. 480 p. (**Chezari L.** Asymptotic behavior and stability of solutions of the ordinary differential equations, the lane with English, M.: World, 1964. 480 pages.).

21. **Van der Pol B**., «Phil. Mag.», 1922, Ser. 6, – V. 43, P. 700-719; 1926, Ser. 7, V. 2, P. 978-992.

22. **Stoker Dzh.,** Nelinejnye kolebanija v mehanicheskih i jelektricheskih sistemah, per. s angl., 2 izd., M.: IL, 1952. – 264 p. **(J. Stoker.** Nonlinear fluctuations in mechanical and electric systems, the lane from English, 2 prod., M.: SILT, 1952. 264 pages.).

23. **Kolmogoroff A. N.** Sulla teoria di Volterra della lotta per l'esistenza//G. Ist. ital. attuar. – 1936. – Vol. 7. P. 74-80.

24. **Rush N., Abets P., Lalua M.** Prjamoj metod Ljapunova v teorii ustojchivosti /Per. s angl. M.: «Mir», 1980. – 304 p. (**Rush N., P.'s Abets, Lalua M. A** direct method of Lyapunov in the theory of the stability/lane with English M.: «World», 1980. 304 pages.).

25. **Govaerts W., Kuznetsov Yu. A. and Sijnave B.** Continuation of codimension – 2 equilibrium bifurcations in CONTENT // In: Doedel E. and Tickerman L.S. (eds). Numerical methods for bifurcation problems and large-scale dynamical systems. Springer-Verlag, New-York, 2000. P. 163–184.

26. **Mitrohin Ju. S.** Ob upravljaemosti v malom sistem nelinejnyh differencial'nyh uravnenij optimal'nogo regulirovanija // Differenc. uravn. 1974. T.10. Vyp.8. S.1406-1411. (**Mitrokhin Yu. S.** About controllability in small systems of the nonlinear differential equations of optimum regulation//Differential equations. 1974. Vol.10. Issue 8. 1406-1411 pp.).

27. **Mironov V. V., Mitrohin Ju. S.** Ustojchivost' sistem avtomaticheskogo upravlenija s peremennoj strukturoj // Vestnik RGRTA. Rjazan'. 1999. Vyp. 6. S. 37-40. (**Mironov V. V., Mitrokhin Yu. S.** Stability of systems of automatic control with variable structure//the RGRTA Bulletin. Ryazan. 1999. Issue 6. 37-40 pp.).

28. **Mironov V. V.** Metody postroenija funkcij Ljapunova: Tezisy dokladov mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii «Nelinejnyj analiz i funkcional'no-differencial'nye uravnenija». Voronezh. 2000. S. 154-155. (**Mironov V. V.** Methods of creation of functions of Lyapunov: Theses of reports of the international scientific conference "Nonlinear Analysis and Functional and Differential Equations". Voronezh. 2000. 154-155 pp.).

29. **Mironov V. V.** Issledovanie ustojchivosti reshenij raznostnyh uravnenij Vol'terra // Izvestija RAEN. Differencial'nye uravnenija. 2001. № 5. S. 112-113. (**Mironov V. V.** Research of stability of solutions of the differential equations of Voltaire//News of the Russian Academy of Natural Sciences. Differential equations. 2001. No. 5. 112-113 pp.).

30. **Mironov V. V.** Fundamental'nye matematicheskie problemy. Kommentarii (Plenarnyj doklad) / XXVIII Mezhdunarodn. nauchn. konf. «Matematicheskie metody v tehnike i tehnologijah» Rjazan', 2015. S. 3-12 (**Mironov V. V.** Fundamental mathematical problems. Comments (Plenary report) / XXVIII International scientific conference "Mathematical Methods in the Equipment and Technologies", Ryazan, 2015. 3-12 pp.).

31. **Barbashin E. A.** Funkcii Ljapunova. M.: Nauka, 1970. 240 s. (**Barbashin E. A.** Lyapunov's functions. M.: Science, 1970. 240 pages).

32. **Lozgachev G. I.** Postroenie funkcij Ljapunova dlja nelinejnyh dinamicheskih sistem. // Differenc. uravn. 1998. T.34. № 11. S.1565-1567 (**Lozgachev G. I.** Creation of functions of Lyapunov for nonlinear dynamic systems. // Differential equations. 1998. Vol. 34. No. 11. 565-1567 pp.).

33. **Propoj A. I.** O probleme ustojchivosti dvizhenija // A i T. 2000. № 4. S. 51-60 (**Propoj A .I.** About a problem of stability of the movement//A and T. 2000. No. 4. 51-60 pp.).

34. **Propoj A. I.** O postroenii funkcij Ljapunova. // A i T. 2000, № 5. S. 32-38, № 6. S. 31-40. (**Propoj A. I.** About creation of functions of Lyapunov.//A and T. 2000, No. 5. 32-38 pp., No. 6. 31-40 pp.).

35. **Rumjancev V. V.** Sravnenie treh metodov postroenija funkcij Ljapunova. // PMM. 1995. T. 59. Vyp. 6. S. 916-921. (**Rumyantsev V. V.** Comparison of three methods of creation of functions of Lyapunov.//PMM. 1995. Vol. 59. Issue 6. 916-921 pp.).

36. **Chetaev N. G.** Ustojchivost' dvizhenija. Raboty po analiticheskoj mehanike, izd. 4-e ispravlennoe, s primech. V. V. Rumjanceva. M.: Nauka, 1990. 176 s. (**Chetayev N. G.** Stability of the movement. Works on analytical mechanics, prod. 4th corrected, with V. V. Rumyantsev's notes. M.: Science, 1990. 176 p.).

37. **Rozenfel'd B. A.** Mnogomernye prostranstva. M.: Nauka. 1966. 668 s. (**Rosenfeld B. A.** Multidimensional spaces. M.: Science. 1966. 668 p.).

38. **Zubov V. I.** Ustojchivost' dvizhenija. Metody Ljapunova i ih primenenie, 2-e izd., pererab. i dop. – M.: Vyssh. shk., 1984. – 232 s. (**Zubov V. I.** Stability of the movement. Lyapunov's methods and their application, 2nd prod., reslave. and additional – M.: The Higher School, 1984. 232 p.).