

УДК 621.391

ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ИНВАРИАНТНЫХ К ПАРАМЕТРУ МАСШТАБА СТАТИСТИК В СПЕКТРАЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

В. С. Паршин, д.т.н., профессор кафедры РУС РГРТУ; vsparshin@gmail.com

Цель работы является аппроксимация законов распределения инвариантных к параметру масштаба статистик в спектральной области для двух классов случайных процессов. Для стационарных случайных процессов получен точный закон распределения инвариантной статистики в спектральной области и проведена его аппроксимация более простым выражением. Показано, что аппроксимирующим распределением является бета-распределение и проведена оценка точности аппроксимации. Получен закон распределения инвариантных статистик в спектральной области для импульсных случайных сигналов. Положено, что статистические характеристики случайных величин, определяющих время появления и амплитуду импульсов, не зависят от номера реализации. Получено приближенное распределение инвариантных статистик. Показано, что и в этом случае аппроксимирующим распределением инвариантных статистик является бета-распределение.

Ключевые слова: неизвестный параметр масштаба, спектральная плотность, инвариантная статистика, закон распределения, функциональное преобразование, аппроксимация.

DOI: 10.21667/1995-4565-2018-66-4-1-35-41

Введение

В ситуациях, часто встречающихся на практике, интенсивность принимаемых сигналов вследствие ряда причин, например меняющейся дальности до источника отражения, изменения условий приема и т.д., может изменяться от реализации к реализации. Задача распознавания, обнаружения, оценивания параметров полезного сигнала $S(t)$ в этом случае, пренебрегая влиянием шума, сводится к обработке сигнала $\xi(t)$, определяемого в общем случае как

$$\xi(t) = \mu(t)S(t), \quad (1)$$

где $\mu(t)$ – мультипликативная помеха.

Для получения законов распределения инвариантных статистик сделаем следующие предположения. Будем считать, что статистические характеристики помехи – закон распределения, его моменты, корреляционная функция неизвестны. Ограничимся случаем, когда помеха $\mu(t)$ является случайным процессом с дискретным временем, с шагом дискретизации T , равным длительности сигнала $S(t)$. В этом случае принимаемый сигнал на интервале времени $[0, T]$ можно представить в виде

$$\xi(t) = \mu S(t), \quad (2)$$

где μ – неизвестный параметр масштаба.

Обнаружение, распознавание, оценка параметров сигналов вида (2) предполагает использование равномерно наиболее мощных (РНМ) инвариантных критериев проверки статистических гипотез [1]. Однако определение структуры РНМ критериев во временной области наталкивается на существенные трудности. Обойти эти трудности в ряде случаев позволяет переход в спектральную область, поскольку спектральные составляющие (СС) в базисе Фурье для стационарных сигналов асимптотически некоррелированы и имеют экспоненциальное распределение [2]. Однако и в этом случае практическая реализация РНМ критериев (особенно для нестационарных сигналов) наталкивается на существенные сложности вычислительного характера. Поэтому вызывает практический интерес определения законов распределения статистик, инвариантных к параметру масштаба, в спектральной области. Знание законов распределения таких статистик позволит реализовать решающие правила, основанные на отношении правдоподобия.

Законы распределения инвариантных статистик в спектральной области для стационарных случайных сигналов

На практике для устранения мешающего параметра μ при распознавании стационарных сигналов $S(t)$ в спектральной области может

использоваться инвариантное преобразование (ИП) вида

$$y_1, \dots, y_K = \frac{\hat{G}(j\omega_1)}{\sum_{i=1}^K \hat{G}(j\omega_i)}, \dots, \frac{\hat{G}(j\omega_K)}{\sum_{i=1}^K \hat{G}(j\omega_i)}, \quad (3)$$

где $\hat{G}(\omega_i)$ – оценка спектральной плотности мощности (СПМ) случайного стационарного процесса $S(t)$, понимаемая как квадрат модуля преобразования Фурье реализации случайного процесса, вычисленная на частотах $\omega_i = 2\pi i / K$; $i = 0, 1, \dots, K/2 - 1$; K – число отсчетов реализации сигнала.

При выводе распределения случайных величин $y_i, i = \overline{1, K_0}$ (K_0 – число используемых спектральных составляющих) учитывать оценку СПМ на частоте $\omega = 0$ не будем из-за ее чувствительности к изменению среднего значения, полагая, что оно неинформативно. Отбрасывание спектральных составляющих на нулевой частоте позволит к тому же существенно упростить полученные результаты. Из (3) следует, что последовательность случайных величин $y_i, i = \overline{1, K_0}$ от мешающего параметра μ не зависит.

Характеристическая функция знаменателя выражения (3), то есть характеристическая функция суммы экспоненциально распределенных величин с параметрами $\lambda_i, i = \overline{1, K_0}$, имеет вид:

$$\theta_n(j\nu) = \prod_{i=1}^{K_0} 1/(1 - j\lambda_i\nu). \quad (4)$$

Закон распределения, соответствующий характеристической функции (4), получен в работе [3] в следующем виде:

$$w(x) = \sum_{k=1}^{K_0} \frac{\lambda_k^{n-2} \exp(-x/\lambda_k)}{\prod_{i=1}^{K_0} (\lambda_k - \lambda_i)}, \quad (5)$$

Ограничиваясь случаем, когда спектральные составляющие оценки СПМ, вычисленные на кратных частотах различны (уравнение $\theta_n(j\nu) = 0$ не имеет кратных корней), и представляя каждую случайную величину, входящую в (3), как

$$y_i = \frac{\hat{G}(\omega_i)}{\hat{G}(\omega_i) + \sum_{i \neq j} \hat{G}(\omega_j)}, \quad (6)$$

с помощью известных формальных правил [4] одномерные распределения статистик $y_i, i = \overline{1, K_0}$ можно представить в виде [5, 6]

$$w_1(x_i) = G(\omega_i) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{K_0} \frac{G^{K_0-1}(\omega_k) [x_i z_{ik} - G(\omega_i)]^{-2}}{\prod_{l=1, l \neq k}^{K_0} [G(\omega_k) - G(\omega_l)]}, \quad (7)$$

где $z_{ik} = G(\omega_i) - G(\omega_k)$, $G(\omega_i)$ – среднее значение оценки СПМ на i -й частоте.

Полученное распределение весьма громоздко. Кроме того, вычисление величины знаменателя этого распределения затруднено при больших K_0 , так как разность соседних СС в этом случае будет близка к нулю.

Для аппроксимации распределения (7) более простым распределением воспользуемся методом моментов. Рассчитаны коэффициенты асимметрии и эксцесса, которые нанесены на плоскость Пирсона [7]. Расчеты показали, что изображающие точки, соответствующие распределению (7), лежат в области бета-распределения

$$w(x) = \frac{\Gamma(\eta + \gamma)}{\Gamma(\eta)\Gamma(\gamma)} x^{\eta-1} (1-x)^{\gamma-1}, \quad (8)$$

где η и γ – параметры распределения, причем на линии, соединяющей равномерное распределение с экспоненциальным. Параметры бета-распределения рассчитаны по формулам [7]:

$$\eta = [(1 - m_1) / M_2] [m_1(1 - m_1) - M_2], \quad (9)$$

$$\gamma = m_1 \eta / (1 - m_1), \quad (10)$$

где m_1 и M_2 – математическое ожидание и дисперсия распределения (7).

Проведенные расчеты для выборочных спектральных плотностей с произвольной формой СПМ показали, что для любой величины y_i параметр $\gamma \approx 1$ (как правило, отличие составляло не более 1-2 %). Параметр η , как показали расчеты, можно вычислять по формуле

$$\eta_i \approx w(0) = \sum_{k=1}^{K_0} \frac{G(\omega_k)}{G(\omega_i)}, \quad (11)$$

где $w(0)$ значение закона распределения (7) при $x = 0$.

Поскольку закон распределения (7) будет иметь максимум при значении $x = 0$, то положим, что параметр распределения $\gamma = 1$, а параметр η будем вычислять по формуле (11). Тогда аппроксимирующим законом распределения для инвариантной статистики (3, 6), вычисленной на кратных частотах, будет частный случай бета-распределения

$$w(x) = \eta(1-x)^{\eta-1}. \quad (12)$$

Обычно точность аппроксимации сложного распределения более простым оценивается соотношением

$$\delta = \max |F_1(x) - F(x)|, \quad (13)$$

где $F(x)$ и $F_1(x)$ – интегральные функции аппроксимирующего и аппроксимируемого распределений $w(x)$ и $w_1(x)$.

Расчеты, проведенные для широкополосных нормальных случайных процессов с различными корреляционными функциями, показали, что величина δ не превышает 0,005, что свидетельствует о достаточно хорошей аппроксимации.

Нахождение коэффициента корреляции $R_{i,j}$ между величинами y_i, y_j (соответствующими преобразованным согласно (3) оценкам СПМ на частотах ω_i, ω_j) в общем случае затруднено. Точное значение для $R_{i,j}$ можно определить лишь в том случае, когда преобразованию (3) подвергается оценка СПМ белого шума. В этом случае можно [5] получить многомерное распределение величин y_1, y_2, \dots, y_{K_0} в виде

$$w(y_1, y_2, \dots, y_{K_0}) = \Gamma(K_0 - 1), \quad (14)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция, то есть совместное распределение (14) является $(K_0 - 1)$ – мерным распределением Дирихле [$(K_0 - 1)$ равномерным распределением]. Используя приведенные в [4] выражения для моментов распределения (14), можно определить коэффициент корреляции между величинами y_i, y_j в виде

$$R_{i,j} = -2/(K_0 - 1). \quad (15)$$

Полученное выражение позволяет приближенно оценить коэффициент корреляции и для составляющих СПМ широкополосных стационарных случайных процессов после инвариантного преобразования (3). Из (15) видно, что преобразование (3) приводит к увеличению коэффициента корреляции между СС. Однако значение коэффициента корреляции асимптотически стремится к нулю при увеличении длительности сигнала.

Наряду с инвариантным преобразованием (3) для исключения мешающего параметра μ может использоваться преобразование

$$y_1, y_2, \dots, y_{K_0}, \dots = 1, \frac{\hat{G}(\omega_1)}{\hat{G}(\omega_n)}, \dots, \frac{\hat{G}(\omega_{K_0})}{\hat{G}(\omega_n)}. \quad (16)$$

Одномерное распределение случайных величин $\chi_i, i = \overline{2, K_0}$ (то есть отношение некоррелированных экспоненциально распределенных случайных величин) можно представить следующим образом:

$$w(x) = \frac{G(\omega_l)}{G(\omega_n)} \frac{1}{\left[1 + \frac{G(\omega_l)}{G(\omega_n)} x\right]^2}. \quad (17)$$

Распределение (17) – частный случай бета-распределения второго рода [4] – не имеет моментов, так как соответствующие интегралы расходятся.

Дополнительной проверкой качества аппроксимации закона распределения (7) законом распределения (12) может служить сравнение эффективности распознавания стационарных случайных сигналов при использовании инвариантной статистики (3).

РНМ критерий проверки статистических гипотез (проверяется гипотеза S_1 против альтернативы S_2) при использовании несглаженных оценок СПМ можно представить, используя подход, изложенный в работе [1], в следующем виде:

$$\varphi[\hat{G}(\omega_i)] = \frac{\sum_{i=1}^{K_0} \hat{G}(\omega_i) / G_2(\omega_i)}{\sum_{i=1}^{K_0} \hat{G}(\omega_i) / G_1(\omega_i)} \underset{<S_2}{>S_1} c, \quad (18)$$

где $c = \left[c_0 \prod_{i=1}^{K_0-1} G_1(\omega_i) / G_2(\omega_i) \right]^{\frac{1}{K_0}-1}$; c_0 – константа,

зависящая от уровня значимости; $G_1(\omega)$ и $G_2(\omega)$ – СПМ распознаваемых сигналов, полученные усреднением по множеству или с помощью сглаживания спектральными окнами [6].

Решающее правило, реализующее критерий максимального правдоподобия для инвариантной статистики (3), нетрудно представить в виде:

$$\ln \Lambda(y) = \sum_{i=1}^{K_0} [(\eta_{1i} - \eta_{2i}) \ln(1 - y_i) + \ln(\eta_{1i} / \eta_{2i})] \underset{<S_2}{>S_1} 0, \quad (19)$$

где η_1 и η_2 – параметры аппроксимирующего бета-распределения, вычисленные по формуле (9). Результаты моделирования показали (при распознавании стационарных сигналов с произвольной формой СПМ), что вероятности ошибочного распознавания, обеспечиваемые решающими правилами (18, 19), одинаковы с точностью до доверительного интервала, построенного в соответствии с методикой, изложенной в работе [8]. Вышеизложенное еще раз позволяет считать аппроксимацию закона распределения инвариантной статистики (3) законом распреде-

ления (12) весьма удачной. Использование алгоритма, реализующего критерий максимального правдоподобия и использующего инвариантную статистику (16), показало крайне неудовлетворительные результаты, что можно объяснить его несостоятельностью.

Законы распределения инвариантных статистик в спектральной области для импульсных случайных сигналов

В ряде приложений (например, в широкополосной радиолокации) приходится сталкиваться с задачей обнаружения и распознавания импульсных случайных сигналов, которые могут быть представлены в виде:

$$S(t) = \sum_{k=1}^M (a_k + \xi_k) f(t - t_k - \tau_k), \quad (20)$$

где $f(t)$ – функция, описывающая форму импульсов; a_k и t_k – среднее значение амплитуды и времени появления k -го импульса; ξ_k и τ_k – отклонение амплитуды и времени появления от среднего значения k -го импульса; M – число импульсов в сигнале.

Использование СПМ сигнала (20) и ИП (3) нецелесообразно, поскольку в этом случае будет теряться часть информации. Дело в том, что в отличие от стационарных сигналов, для которых закон распределения оценки фазового спектра равномерен, причем независимо от закона распределения сигнала, закон распределения оценки фазового спектра сигнала (20) будет зависеть от значений величин a_k , t_k и статистических характеристик случайных величин ξ_k , τ_k [9]. Поэтому в качестве ИП целесообразно использовать преобразование

$$y_i = \frac{\operatorname{Re} S(j\omega_i)}{\left[\sum_i^{K_0} G(j\omega_i) \right]^{1/2}}, \quad i = \overline{1, K_0}, \quad (21)$$

которое сохраняет информацию о фазовом спектре. Заменяя в (21) $\operatorname{Re} S(j\omega)$ на $\operatorname{Im} S(j\omega)$, получаем инвариантную статистику для мнимой части спектра, не зависящую от мешающего параметра μ . Очевидно, что статистические характеристики случайных величин y_i будут одинаковыми, независимо от того, реальная или мнимая части спектра используются для их формирования.

Ограничимся только такими импульсными сигналами, для которых последовательности случайных величин ξ_k и τ_k , определяющие амплитуду и момент возникновения импульсов, являются эргодическими случайными процессами.

Введя обозначения

$$z_i = \operatorname{Re} S(j\omega_i), \quad (22)$$

$$\alpha_i = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{K_0/2} \hat{G}(\omega_k) + \operatorname{Im}^2 S(j\omega_i), \quad (23)$$

сделаем следующие предположения.

1. Корреляционными связями между спектральными составляющими, входящими в выражение (23), можно пренебречь [9].

2. Случайные величины z_i в силу линейности и инерционности преобразования Фурье имеют нормальное распределение с математическим ожиданием и дисперсией M_z , D_z .

3. Случайные величины α_i подчиняются гамма-распределению с параметрами σ_α , θ_α .

Последнее предположение основывается на следующем:

а) гамма-распределение, которое определяется слагаемыми вида $\hat{G}(\omega_i)$, входящими в α_i , при одинаковых σ является воспроизводящим по θ [4];

б) в работе [3] получено распределение случайной величины α_i в общем случае. Пользуясь этим распределением, рассчитаны его коэффициенты асимметрии и эксцесса.

Расчеты проводились по следующей схеме. Задавались параметры сигнала (20), то есть число импульсов M , величины a_k , t_k , законы распределения случайных величин ξ_k , τ_k , форма импульсов. После вычисления спектральной плотности определялись ее математическое ожидание и дисперсия на каждой частоте, а затем коэффициенты асимметрии и эксцесса. Расчеты показали, что изображающие точки, соответствующие распределению случайной величины α_i , группируются вдоль линии, соответствующей гамма-распределению при любых значениях параметра сигнала (20). Необходимо подчеркнуть, что непосредственное применение распределения, полученного в работе [3], затруднено из-за его громоздкости и вычислительных трудностей.

Оценим точность аппроксимации распределения случайной величины α_i гамма-распределением. Точное распределение $w(x)$ случайной величины α_i [3] сравнивалось с аппроксимирующим γ -распределением $w_1(x)$, параметры которого определялись по известным соотношениям [3]. Оценка погрешности аппроксимации проведена по формуле

$$\varepsilon = \int_{\beta}^{\infty} [w(x) - w_1(x)] dx. \quad (24)$$

Величина нижнего предела β для различных значений вероятностей p находилась из уравнения

$$\int_{\beta}^{\infty} w(x)dx = p. \tag{25}$$

Типичная зависимость погрешности аппроксимации от значения вероятности p приведена на рисунке 1.

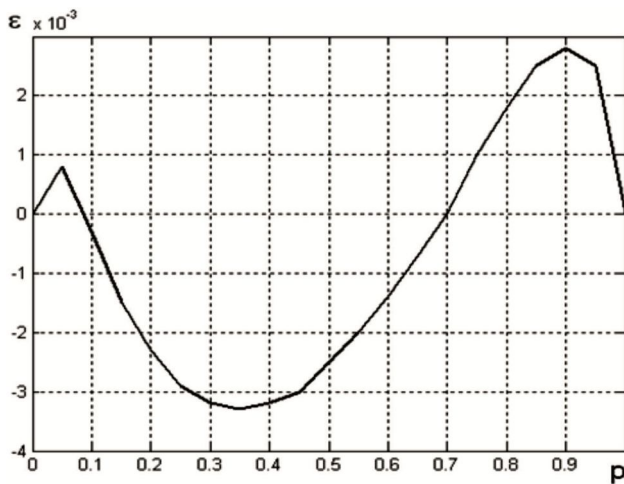


Рисунок 1 – Погрешность аппроксимации

Из рисунка 1 видно, что точность аппроксимации вполне удовлетворительна. Максимальная величина погрешности аппроксимации, определенная по (24), имеет порядок примерно 5×10^{-3} , что вполне достаточно для большинства расчетов.

С учетом сделанных предположений, совершая замену переменных

$$z_i / \sqrt{z_i^2 + \alpha_i^2} = \beta_i, \tag{26}$$

с якобианом преобразования

$$|J| = \sqrt{\beta_i} / (1 - \beta_i)^{3/2}, \tag{27}$$

интегрируя совместное распределение случайных величин z_i и α_i , получаем, что одномерное распределение случайных величин y_i запишется (здесь и ниже опущен i -й индекс у параметров распределения) в виде:

$$w(x) = \frac{\exp(-M_z / 2D_z) \Gamma(2\theta_\alpha)}{2^{\theta_\alpha} \Gamma(\theta_\alpha)} \times \frac{(1-x^2)^{\theta_\alpha-1} D_z^{\theta_\alpha} \sigma_\alpha^{1/2} \theta_\alpha}{[x\sigma_\alpha + (1-x)2D_z]^{\theta_\alpha+1/2}} \times \left[\frac{1}{\Gamma(\theta_\alpha+1)} \Phi\left(\theta_\alpha+0.5, 0.5, \frac{U^2}{2}\right) \right] - \frac{\sqrt{2}U}{\Gamma(\theta_\alpha+0.5)} \Phi\left(\theta_\alpha+1, 1.5, \frac{U^2}{2}\right), \tag{28}$$

где $U = \frac{xM_z \sigma_\alpha}{\{D_z[\sigma_\alpha x^2 + (1-x)2D_z]\}^{1/2}}$; $-1 \leq x \leq 1$, $\Phi(v, v, v)$ – вырожденная гипергеометрическая функция.

Полученное распределение (28) весьма громоздко. Для его аппроксимации более простым воспользуемся методом моментов.

Вычисляя табличные интегралы [10], начальные моменты закона распределения (28) получаем в виде:

$$m_k = \frac{\exp\left(-\frac{M_z}{2D_z}\right) D_z^{\theta_\alpha} \sigma_\alpha^{1/2} \theta_\alpha \Gamma(2\theta_\alpha)}{2^{\theta_\alpha} \Gamma(\theta_\alpha)} \times \left[\frac{1}{\theta_\alpha \Gamma(\theta_\alpha)} \sum_n \frac{{}^1d_n M_z^{2n} B\left(\theta_\alpha, \frac{k+2n+1}{2} + 1\right)}{{}^1\gamma_n n! D_z^n \sigma_\alpha^{\theta_\alpha+0.5} 2^n} \times {}_2F_1\left(\theta_\alpha+n+0.5, \theta_\alpha; \theta_\alpha + \frac{k+2n+1}{2} + 1; \eta\right) - \frac{\sqrt{2}M_z \sigma_\alpha^{1/2}}{\Gamma(\theta_\alpha+0.5) D_z^{1/2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{{}^22_n M_z^{2n} B\left(\theta_\alpha, \frac{k+2n+1}{2}\right)}{{}^2\gamma_n 2^n n! D_z^n \sigma_\alpha^{\theta_\alpha+1}} \times {}_2F_1\left(\theta_\alpha+n+1, \theta_\alpha; \theta_\alpha + \frac{k+2n}{2} + 1; \chi_\alpha\right) \right], \tag{29}$$

где $\chi_\alpha = \frac{\sigma_\alpha - 2D_z}{\sigma_\alpha}$; $B(v, v)$ – бета-функция;

${}_2F_1(v, v, v)$ – гипергеометрическая функция;

${}^1d = \theta + 0.5$; ${}^2d = \theta + 1$; ${}^1\gamma = 0.5$; ${}^2\gamma = 1.5$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{\gamma_n} = 1 + \frac{d}{\gamma} + \frac{d(d+1)}{\gamma(\gamma+1)} + \dots$$

При вычислении нечетных моментов по (29) первое слагаемое, а при вычислении четных моментов второе слагаемое в фигурных скобках равны нулю. Если $M_z = 0$, то из (29) следует, что нечетные начальные моменты равны нулю, а четные равны

$$m_k = \frac{D_z \Gamma(2\theta_\alpha) B\left(\theta_\alpha, \frac{k+1}{2}\right)}{2^{\theta_\alpha-1} \Gamma^2(\theta_\alpha) \sigma_\alpha^{\theta_\alpha}} \times {}_2F_1\left(\theta_\alpha+0.5, \theta_\alpha; \theta_\alpha + \frac{k+1}{2}; \frac{\sigma_\alpha - 2D_z}{\sigma_\alpha}\right). \tag{30}$$

Методом моментов проведена аппроксимация распределения (29). Для различных значений $M_z, D_z, \sigma_\alpha, \theta_\alpha$ рассчитаны коэффициенты асимметрии и эксцесса, которые нанесены на

плоскость Пирсона [7]. Результаты расчетов позволяют установить, что распределение (29) при $M_z = 0$ и достаточно малых D_z аппроксимируется t -распределением Стьюдента.

При $M_z \neq 0$ (что всегда выполняется на практике) положение изображающих точек, соответствующих распределению (29), в основном находится в области бета-распределения. Поскольку областью изменения случайных величин (21) является интервал от -1 до +1, то в качестве аппроксимирующего необходимо выбирать обобщенное бета-распределение [4]:

$$w(y_i) = \frac{\Gamma(v_1 + v_2)}{\Gamma(v_1)\Gamma(v_2)2^{v_1+v_2-1}} \times (y_i + 1)^{v_1-1} (1 - y_i)^{v_2-1}. \quad (31)$$

В том случае, если изображающие точки не попадают в область бета-распределения и не соответствуют t -распределению, аппроксимирующим для (29) будет являться распределение S_U Джонсона [7]. Однако изображающие точки и в этом случае сосредоточены вдоль линии, ограничивающей область бета-распределения.

Те же предположения, что и при выводе распределения (29), позволяют получить распределение инвариантной статистики (3) для СПМ группы случайных импульсов. Пользуясь методикой [4], можно показать, что для этого случая инвариантная статистика имеет распределение:

$$w(x) = \frac{\Gamma(\theta + \theta_1)}{\Gamma(\theta_1)\Gamma(\theta)} \sigma_1^\rho \sigma^\rho \times \frac{(1-x)^{\theta-1} x^{\theta-1}}{[(1-x)x\sigma + x\sigma_1]^{\theta+\rho}}. \quad (32)$$

В этой формуле σ , θ являются параметрами гамма-распределения, которому подчиняется распределение СС на i -й частоте, а параметры σ_1 , ρ – параметры распределения суммы $\sum_i \hat{G}(\omega_i)$. Моменты распределения (32) определяются из соотношения

$$m_k = B(\theta + k, \theta) \times {}_2F_1\left(\rho + \theta, \theta + k, \theta + \rho + 1; -\frac{\sigma - \sigma_1}{\sigma_1}\right). \quad (33)$$

Аппроксимация распределения (32) проведена также методом моментов. Результаты расчетов показали, что изображающие точки, соот-

ветствующие распределению (32), при любых значениях параметров θ, σ находятся в области бета-распределения, основного, таким образом, аппроксимирующего распределения для рассмотренных инвариантных статистик.

Заключение

Показано, что аппроксимирующим законом распределения инвариантных к параметру масштаба статистик в спектральной области для двух классов случайных процессов (стационарных случайных процессов и последовательности «стационарных» импульсов) является бета-распределение. Использование такой аппроксимации позволяет реализовать относительно простые алгоритмы распознавания, обнаружения, оценки параметров случайных сигналов.

Библиографический список

1. Леман Э. Проверка статистических гипотез: пер. с англ. под ред. Ю.В. Прохорова. – М.: Наука, 1979. 408 с.
2. Марпл С. П.-мл. Цифровой спектральный анализ и его приложения / пер. с англ. под ред. О. И. Хабарова и Г. А. Сидоровой. – М.: Мир, 1990. 584 с.
3. Фельдман Ю. И. Плотность вероятности случайного процесса при весовом квадратичном суммировании // Радиотехника. 1979. Т. 34. № 4. С. 71-74.
4. Уилкс С. Математическая статистика. – М.: Наука. 1967. 632 с.
5. Атаянц Б. А., Паршин В. С. Распознавание стационарных сигналов по нормированному спектру мощности // Известия вузов СССР. Радиоэлектроника. 1983. Т. 26. № 11. С. 73-75.
6. Егоров А. В., Паршин В. С. Оценка вероятности правильного распознавания стационарных случайных процессов в спектральной области при ограниченном объеме обучающей выборки // Научный вестник МГТУ ГА. – Серия // Радиофизика и радиотехника. № 76(3). – М.: МГТУ ГА. 2004. С. 61-69.
7. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. – М.: Радио и связь. 1983. 624 с.
8. Фукунага К. Введение в статистическую теорию распознавания образов: пер. с англ. под ред. А.А. Дорофеюка. – М.: Наука, 1979. 367 с.
9. Паршин В. С. Статистические характеристики оценки спектра последовательности импульсов, модулированных по положению // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2005. № 16. С. 61-65.
10. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. 1108 с.

UDC 621.391

DISTRIBUTION LAWS OF STATISTIC INVARIANT TO SCALE PARAMETER IN SPECTRAL REGION

V. S. Parshin, Dr. Sc. (Tech.), full professor, Head of the Department, RSREU, Ryazan; vsparshin@gmail.com

The aim of the research is to show approximation of distribution laws invariant to scale parameter in spectral region for two classes of random variables. For stationary stochastic processes, exact distribution law of invariant statistics in spectral region was obtained and its approximation by a simpler expression was carried out. It is shown that distribution approximation is beta distribution. Accuracy of this approximation was estimated. Also, we obtained distribution law of invariant statistics in spectral region for random pulse signals. It was assumed that statistical characteristics of random variables which determine appearance time and amplitude of pulses are independent from implementation number. Besides we obtained approximated distribution of invariant statistics. It was shown that in this case approximated distribution of invariant statistics is also a beta-distribution.

Key words: unknown scale parameter, spectral density, invariant statistic, distribution law, functional transformation, approximation.

DOI: 10.21667/1995-4565-2018-66-4-1-35-41

References

1. **Leman E.** Proverka statisticheskikh gipotez. M.: Nayka. 1979. 408 p. (in Russian).
2. **Marpl-mi.** Cifrovoi spektralnyi analiz I ego prilozheniya – M.: Mir, 1990. 584 p. (in Russian).
3. **Feldman Y. I.** Plotnost' veroyatnosti sluchainogo protsessa pri vesovom kvadratichnom summirovanii. Radiotekhnika. 1979, vol. 34, no. 4, pp. 71-74. (in Russian).
4. **Uilks S.** Matematicheskaya statistika. – M.: Nayka. 1967. 632 p. (in Russian).
5. **Atayants B. A., Parshin V. S.** Raspoznavanie statsionarnykh signalov po normirovanomu spektrumoshchnosti. Izvestiya vuzov USSR. Radioelektronika. – 1983, vol. 26, no. 11, pp. 73-75. (in Russian).
6. **Egorov A. V., Parshin V. S.** Otsenka veroyatnos-

- ti pravil'nogo raspoznavaniy astatsionarnykh sluchaynykh protsessov v spektral'noy oblasti pri ogranichenom ob'yeme obuchayushchey vyborki. Nauchnyy vestnik MGTU GA. Seriya «Radiofizikairadiotekhnika». no. 76 (3). M.: MGTU GA. 2004, pp. 61-69. (in Russian).
7. **Tikhonov V. I.** Statisticheskaya radiotekhnika. M.: Radio i svyaz'. 1983. 624 p. (in Russian).
8. **Fukunaga K.** Vvedenie v statisticheskuyu teoriyu raspoznavaniy obrasov – M.: Nayka. 1979. 367 p. (in Russian).
9. **Parshin V. S.** Statisticheskie kharakteristiki otsenki spektra posledovatel'nosti impulsov, modulirovannykh po polozheniyu. Vestnik RGRТА. Ryazan, 2005. Issue 16, pp. 61-65. (in Russian).
- 10 **Gradstein I. S., Ryzhik I. M.** Tablitsy integralov, summ, raydov i proizvedeniy. M.: Nayka, 1971. 1108 p. (in Russian).