УДК 681.5

СИНТЕЗ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОГО РЕГУЛЯТОРА ДЛЯ СТАБИЛИЗАЦИИ ОБРАТНОГО МАЯТНИКА ГИРОДИНОМ ПРИ ПЕРЕНОСЕ ПОЛОЖЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ

И. В. Рядчиков, к.ф-м.н., заведующий лабораторией робототехники и мехатроники ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», Краснодар, Россия; igorryadchikov@gmail.com
С. И. Сеченев, аспирант ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», Краснодар, Россия; sechenev.semen@gmail.com
Н. В. Михальков, инженер лаборатории робототехники и мехатроники ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», Краснодар, Россия; mikh.nv@yandex.ru
А. Э. Бирюк, к.ф-м.н., доцент кафедры теории функций ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», Краснодар, Россия; biryuk.a@it.kubsu.ru
А. А. Свидлов, к.ф-м.н., научный сотрудник, отдел аридных зон, лаборатория проблем распределения стабильных изотопов в живых системах, ЮНЦ РАН, Москва, Россия; svidlov@mail.ru
А. А. Гусев, аспирант ФГБОУ ВО «Кубанский государственный университет», Краснодар, Россия; gusev@ftf.kubsu.ru
Д. В. Соколов, доцент Университета Лотарингии, Нанси, Франция; dmitry.sokolov@univ-lorraine.fr
Е. В. Никульчев, д.т.н., профессор кафедры управления и моделирования систем ФГБОУ ВО «МИРЭА – Российский технологический университет», Москва, Россия; nikulchev@mail.ru

Рассматривается задача разработки системы управления с обратной связью для обратного маятника, управляемого гиродином, с оперативным пересмотром положения равновесия после смещения центра масс. ***Целью работы*** *являются исследование и синтез линейно-квадратичного регулятора, способного стабилизировать обратный маятник с гиродином в новом положении равновесия. Для построения математической модели объекта управления выводятся Лагранжиан обратного маятника с гиродином и уравнения Эйлера – Лагранжа. Проводится линеаризация полученной модели около положения несмещенного равновесия. Показано, что задача синтеза линейного управления имеет решение в этом случае. Затем модель оснащается величиной приборной ошибки в определении направления на вертикаль, вызванной смещением центра масс. Показано, что в этом случае система линейных уравнений будет иметь асимптотически устойчивое стационарное решение, при этом в новом положении равновесия центр тяжести обратного маятника будет находиться над точкой опоры. Проверка робастности полученного управления осуществлена в компьютерной модели, построенной с помощью пакета MATLAB/Simulink и на опытной установке. Характеристики переходных процессов подтверждают надежность синтезированного линейно-квадратичного управления при стабилизации обратного маятника с гиродином в новом положении равновесия.*

Ключевые слова: *обратный маятник, гиродин, гироскоп, система автоматического управления, обратная связь, линейно-квадратичный регулятор, ошибка определения положения центра масс, робастное управление, компьютерное моделирование, MATLAB/Simulink.*

DOI: 10.21667/1995-4565-2019-68-2-83-89

Введение

Динамическая стабилизация шагающего робота является растущим направлением исследований [1], по мере того как такие роботы создаются для использования в человеческой среде, где применение колесных транспортных средств затруднено или невозможно [2, 3]. Основная сложность конструирования шагающих роботов заключается в обеспечении компенсации отклонений корпуса робота от положения равновесия, возникающего при ходьбе машины [4]. В нашем исследовании мы рассматриваем неатропоморфную систему стабилизации шагающего робота, основанную на использовании компенсирующего момента гиродина для возврата перевернутого маятника, который моделирует тело робота, в положение равновесия. Перевернутый маятник является одной из распространенных и адекватных механических моделей для исследования проблемы динамической стабилизации шагающего робота [5]. Применение гиродина для стабилизации перевернутого маятника интенсивно изучается в последние годы. В работе [6] предложена глобальная замена координат для преобразования динамики системы в нелинейную подсистему меньшей размерности и стабилизации системы с помощью функции управления Ляпунова. Другое исследование [7] посвящено созданию модели прогнозирующего контроллера (MPC) для управления такой системой. Носимый гиродин в виде ножничных пар для поддержки баланса человека обсуждался в [8]. Тем не менее, следует отметить, что при переходе от математических моделей к созданию реальных шагающих машин проблема погрешности определения положения центра масс (ЦМ) робота остается нерешенной. Для решения этой проблемы можно использовать наблюдатель механического состояния, как в [9]. Как правило, наблюдатель применяется для получения оценки компонентов вектора состояния механической системы, компенсирующей ошибку аппаратного датчика. При определенных условиях можно рассматривать смещение ЦМ как ошибку аппаратного датчика.

В данной статье предложен вариант линейно-квадратичного регулятора (LQR), который позволяет без использования наблюдателя стабилизировать конструкцию при смещении ЦМ.

LQR применяется, когда динамика системы описывается набором линейных дифференциальных уравнений, а минимизируемый показатель качества (обычно сумма ключевых отклонений от желаемого состояния системы) описывается квадратичным функционалом. В теоретической части статьи представлены уравнения движения для рассматриваемой модели перевернутого маятника с гиродином, их линеаризация и синтез регулятора. В экспериментальной части представлены параметры опытной установки и имитационная модель с регулятором, который реализует синтезированное управление. Проведено сравнение экспериментальных данных, взятых с установки и полученных в MATLAB / Simulink при моделировании дополнительной нагрузки, приводящей к переносу положения равновесия.

Теоретическая часть

Рассматриваемая в работе конструкция (рисунок 1) состоит из трех частей: гиродин, его оснастка и обратный маятник.

Положение конструкции в пространстве однозначно задается тремя углами: α – угол поворота оснастки относительно перевернутого маятника, причем $\alpha = 0$ соответствует положению оси вращения гиродина сонаправленно оси перевернутого маятника; β – угол поворота оси перевернутого маятника относительно вертикали; γ – угол поворота гиродина относительно его оснастки.

Ясно, что γ является циклической переменной. Угловые скорости обозначим следующим образом: $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{p}$ – угловая скорость перевернутого маятника относительно неподвижного репера; $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{g}$ – угловая скорость оснастки относительно перевернутого маятника; $\boldsymbol{\omega}_\mathbf{d}$ – угловая скорость гиродина относительно его оснастки.

Выполняются следующие равенства:

$$\omega_p = \dot{\beta},\ \omega_g = \dot{\alpha},\ \omega_d = \dot{\gamma}.$$

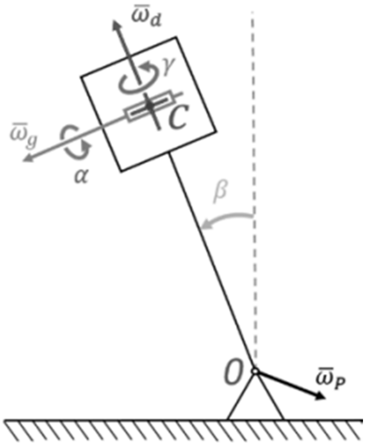

Рисунок 1 – Механическая модель робота

Предполагается, что центры масс гиродина и его оснастки совпадают (точка C на рисунке 1) и расположены на пересечении оси вращения оснастки, оси вращения гиродина и оси перевернутого маятника.

Пусть ЦМ перевернутого маятника лежит на его оси. Тогда полная потенциальная энергия имеет вид:

$$\Pi = \Pi_0 \cos\beta,$$

где Π_0 – потенциальная энергия всей конструкции при $\beta = 0$.

Запишем полную кинетическую энергию системы:

$$T = \frac{1}{2}(J_p\dot{\beta}^2 + (m_g + m_d)h^2\dot{\beta}^2) + $$
$$+\frac{1}{2}(I_d(\dot{\gamma} - \dot{\beta}\sin\alpha)^2 + $$
$$+(J_d + J_g)(\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2\cos^2\alpha)) + \frac{1}{2}I_g\dot{\beta}^2\sin^2\alpha,$$

где $h = OC$, m_d – масса гиродина, m_g – масса оснастки, J_p – момент инерции перевернутого маятника относительно оси вращения, проходящей через точку O, I_d и I_g – моменты инерции гиродина и его оснастки относительно оси вращения гиродина, J_d и J_g – моменты инерции гиродина и его оснастки относительно любой перпендикулярной оси, проходящей через точку C. Предполагается независимость моментов инерции относительно выбора этой оси.

Запишем Лагранжиан конструкции: $L = T - \Pi$. Уравнения движения будут иметь вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = \tau_a ,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\beta}} - \frac{\partial L}{\partial \beta} = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\gamma}} - \frac{\partial L}{\partial \gamma} = \tau_d ,$$

где τ_a – момент актуатора, τ_d – момент двигателя гиродина. Актуатор осуществляет вращение оснастки относительно перевернутого маятника, а двигатель гиродина – вращение гиродина относительно его оснастки. Произведя элементарные преобразования, запишем уравнения движения в следующем виде:

$$(J_d + J_g)\ddot{\alpha} + I_d\dot{\gamma}\dot{\beta}\cos\alpha + \\ +(J_d + J_g - I_d - I_g)\dot{\beta}^2\cos\alpha\sin\alpha = \tau_a, \tag{1}$$

$$\ddot{\beta}(J_p + (m_g + m_d)h^2 + (I_g + I_d)\sin^2\alpha + \\ +(J_d + J_g)\cos^2\alpha) + \\ +2\dot{\beta}\dot{\alpha}\sin\alpha\cos\alpha(I_g + I_d - J_d - J_g) - \\ - I_d\ddot{\gamma}\sin\alpha - I_d\dot{\gamma}\dot{\alpha}\cos\alpha - \Pi_0\sin\beta = 0, \tag{2}$$

$$I_d(\ddot{\gamma} - \dot{\beta}\dot{\alpha}\cos\alpha - \ddot{\beta}\sin\alpha) = \tau_d. \tag{3}$$

Далее будем считать, что контроллер оборотов двигателя гиродина идеально поддерживает заданную скорость вращения гиродина $\dot{\gamma} \equiv \Gamma$, иными словами, контроллер оборотов выбирает $\tau_d = I_d(\dot{\beta}\dot{\alpha}\cos\alpha + \ddot{\beta}\sin\alpha)$ и уравнение (3) автоматически выполняется.

Поскольку подавляющее большинство применяемых на практике электродвигателей не позволяют управлять моментом, а управляются заданием скорости вращения вала, то представляется целесообразным предположить, что τ_a таково, что уравнение (1) выполняется автоматически и мы можем осуществлять управление непосредственным заданием скорости $\dot{\alpha}$. Эти предположения достаточно естественны и не являются ограничительными, поскольку величины $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \ddot{\alpha}$ и $\ddot{\beta}$ на практике будут сравнительно невелики, а актуатор является достаточно мощным для того, чтобы обеспечить практически моментальный выход на любую заданную скорость $\dot{\alpha}$.

Таким образом, уравнения (3) и (1) выполнены вследствие этих предположений. Для анализа остается уравнение (2), в котором, управляя скоростью $\dot{\alpha}$, необходимо вывести β в ноль. При этом ставится дополнительная задача привести угол α также к нулю.

Произведя линеаризацию уравнения (2) около положения равновесия $\beta = 0$, $\alpha = 0$, $\dot{\beta} = 0$, $\dot{\alpha} = 0$, получим:

$$B_0\ddot{\beta} - \Pi_0\beta = I_d\Gamma\dot{\alpha},$$

где $B_0 = J_p + (m_g + m_d)h^2 + J_d + J_g$ – момент инерции всей конструкции относительно оси вращения, проходящей через точку опоры O, при $\beta = \alpha = 0$. Приведя к нормальному виду, получим следующее уравнение:

$$\ddot{\beta} - M\beta = F\dot{\alpha},$$

где $M = \dfrac{\Pi_0}{B_0}$, $F = \dfrac{I_d\Gamma}{B_0}$.

Итак, перейдём к синтезу управления. Пусть $u = \dot{\alpha}$ – управление. Введем обозначение $a(t) = \int_0^t \alpha(s)ds$. Тогда задача управления запишется в виде:

$$\begin{cases} \ddot{\beta} = M\beta + Fu, \\ \ddot{a} = u. \end{cases} \tag{4}$$

Эквивалентно, в матричном виде:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \beta \\ \dot{a} \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & M & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \beta \\ \dot{a} \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}u.$$

Цель управления – сделать точку $\beta = \dot{\beta} = a = \dot{a} = 0$ фазового пространства системы (4) асимптотически устойчивой.

Управление будем искать в виде:

$$u = -(k_{\dot{\beta}} \quad k_\beta \quad k_{\dot{a}} \quad k_a)\begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \beta \\ \dot{a} \\ a \end{pmatrix},$$

где $k_{\dot{\beta}}$ k_β $k_{\dot{a}}$ k_a – параметры управления.

Вводя $x = \begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \beta \\ \dot{a} \\ a \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & M & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} F \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, матричный вид уравнения (4) можно записать следующим образом:

$$\frac{d}{dt}x = Ax + bu. \qquad (5)$$

Задача построения линейного управления для (5) имеет решение, так как $\det(b, Ab, A^2b, A^3b) \neq 0$ [10, § 2.3].

Параметры управления $k_{\dot{\beta}}$ k_β $k_{\dot{a}}$ k_a могут быть найдены методом LQR [11]. Численное моделирование показывает достаточную робастность предложенного метода, которая заключается в том, что при «заморозке» параметров управления система остается стабилизируемой даже при достаточно значительном изменении масс компонент системы.

Предположим, что в результате дополнительной механической нагрузки ЦМ системы оказался не на оси ОС. При этом мы заранее не знаем новое положение ЦМ. С учетом робастности метода LQR математически это выражается в наличии некоторой неизвестной постоянной ошибки в определении угла β. Иными словами, вместо истинного направления на вертикаль β приборы выдают величину $\beta + \Delta$. Это, в свою очередь, приведет к смещению в управлении, и в этой ситуации управление имеет вид:

$$u = -(k_{\dot{\beta}} \quad k_\beta \quad k_{\dot{a}} \quad k_a)\begin{pmatrix} \dot{\beta} \\ \beta \\ \dot{a} \\ a \end{pmatrix} - k_\beta \Delta,$$

При таком управлении система (5) будет иметь асимптотически устойчивое стационарное решение, которое можно найти, решив систему линейных уравнений:

$$(A - bk)x = bk_\beta \Delta.$$

$$\begin{cases} -Fk_{\dot{\beta}}\dot{\beta} - (Fk_\beta - M)\beta - Fk_{\dot{a}}\dot{a} - Fk_a a = Fk_\beta \Delta, \\ \dot{\beta} = 0, \\ -k_{\dot{\beta}}\dot{\beta} - k_\beta \beta - k_{\dot{a}}\dot{a} - k_a a = k_\beta \Delta, \\ \dot{a} = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, находим, что

$$\dot{\beta} = \dot{a} = \beta = 0, \quad a = -\frac{k_\beta}{k_a}\Delta .$$

Из полученных равенств следует, что даже при смещении ЦМ рассматриваемая система будет стабилизироваться в таком положении, когда центр тяжести расположен над точкой опоры. При этом ось вращения гиродина будет расположена в плоскости вращения перевернутого маятника.

Экспериментальные исследования

Для реализации контроллера разработана компьютерная модель перевернутого маятника с гиродином в MATLAB/Simulink с использованием библиотеки твердотельного моделирования Simscape Multibody, а также собрана экспериментальная установка.

Механические параметры гиродина приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Механические параметры гиродина

Элемент	Масса (кг)
Силовой гироскоп (с защитным корпусом маховика, двигателем раскрутки, серводвигателем актуации, подшипниковыми узлами)	5,3
Управляющий гироскоп	1,1
Общая рама узла	2,5
Стойки маятника	0,6
Шарнир маятника	1,0

Маховик в составе силового гироскопа имеет массу 2 кг с 200 мм внешним диаметром. Его главные моменты инерции равны [0,01; 0,005; 0,005] кг·м^2.

Динамические характеристики силового гироскопа приведены в таблице 2.

Таблица 2 – Динамические характеристики силового гироскопа

Характеристика	Значение	Единица измерения
Скорость вращения маховика гироскопа	15 000	об/мин
Момент инерции маховика относительно оси вращения	0,01	кг·м^2
Момент инерции силового гироскопа относительно оси актуации (прецессии)	0,015	кг·м^2

Оценочная высота ЦМ относительно оси вращения самого маятника в положении равновесия – 0,275 м. Высота расположения общей рамы относительно стола / относительно оси вращения всего маятника: ~0,18 / 0,155 м.

Использовались RDrive 50 и X2216 KV1400 в качестве двигателя актуации и двигателя раскрутки соответственно.

Механические параметры компьютерной модели системы в MATLAB/Simulink были выбраны таким образом, чтобы соответствовать параметрам экспериментальной установки.

Примем во внимание следующие условия и ограничения, связанные с экспериментальной установкой: частота дискретизации управления (5) равна 100 Гц, задержка получения и обработки данных с датчиков составляет 100 мс, допустимый аддитивный шум измерения угловой скорости составляет $4 \cdot 10^{-4}$ рад/с. Идентифицированная передаточная функция сервопривода актуатора равна

$$G(s) = \frac{3,203s^2 + 1665s + 2,858 \cdot 10^5}{s^3 + 55,72s^2 + 1,013 \cdot 10^4 s + 2,879 \cdot 10^5}.$$

Параметры Q и R выбраны на основе оценки качества управления для LQR регулятора:

$$J^* = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt,$$

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad R = 1.$$

Ограничение по модулю величины управления составляет 3 рад/с, люфт составляет 0,7°. Трение в оси вращения перевернутого маятника пренебрежимо мало.

Блочная диаграмма контроллера в среде MATLAB/Simulink приведена на рисунке 2.

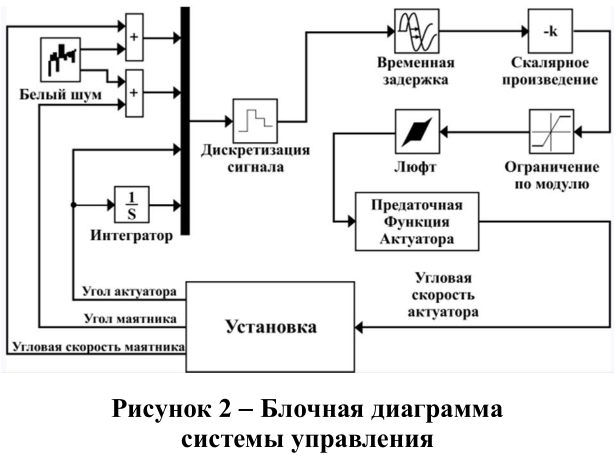

Рисунок 2 – Блочная диаграмма системы управления

При исследовании устойчивости системы в присутствии смещения ЦМ и экспериментальная установка, и компьютерная модель рассматривались как асимптотически устойчивые (или колебательно устойчивые в силу нелинейностей в контуре управления) в окрестности стационарной точки $\beta = 0$, $\alpha = 0$, $\dot{\beta} = 0$, $\dot{\alpha} = 0$. Было добавлено ступенчатое возмущение в форме $\vec{F} = m_{нагрузки}\vec{g}$, приложенное к точке на высоте $\left(h - \frac{h_{куба}}{2}\right)$ по оси вращения перевернутого маятника и на расстоянии $h_{куба}/2$ от оси симметрии перевернутого маятника, где h и $h_{куба}$ – высота оси вращения актуатора относительно оси вращения перевернутого маятника и высота общей рамы соответственно.

В случае экспериментальной установки возмущение добавлялось с помощью подвешивания груза соответствующей массы.

Воздействие начиналось в момент $t = 5$ с после начала эксперимента, масса нагрузки составляла $m_{нагрузки} = 0,15 \pm 0,01$ кг.

Сравнение экспериментальных графиков для установки и для компьютерной модели в MATLAB/Simulink приведено на рисунке 3.

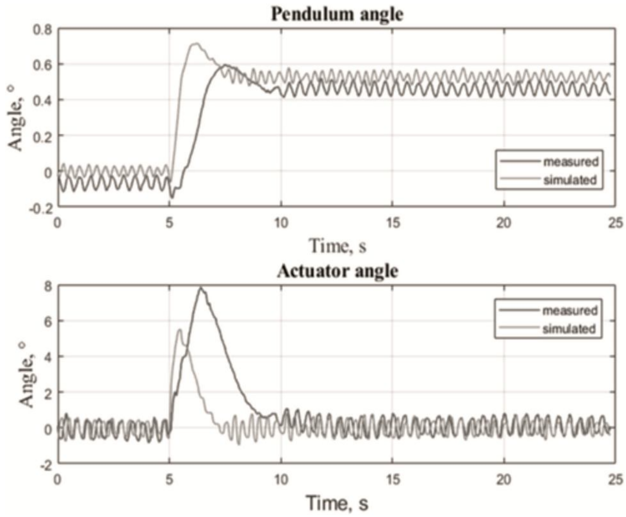

Рисунок 3 – Экспериментальный график для опытной установки (measured) и для компьютерной модели (simulated). Вверху: временная зависимость угла наклона перевернутого маятника. Внизу: временная зависимость угла актуатора

На графиках видно несовпадение характеристик переходного процесса при компьютерном моделировании и при эксперименте на установке. Причину этого можно найти в нелинейностях, потерянных на этапе разработки модели системы, таких как, например, рассогласование оси актуации и ЦМ гиродина, неточности в расчете ЦМ конструкции, а также пренебрежение трением по оси вращения перевернутого маятника. Однако на графиках, приведенных на рисунке 3, по завершении процесса система приходит к асимптотически устойчивой (колеблющейся) точке, что подтверждает свойства, предсказанные нами в теоретической части статьи.

Заключение

Задачей статьи являлся синтез линейно-квадратичного управления, достаточно надежного в случае смещения ЦМ перевернутого маятника с гиродином.

Результаты экспериментов как на экспериментальной установки, так и в компьютерной модели системы в среде MATLAB/Simulink подтвердили надежность предложенного управления, способного в режиме реального времени пересматривать положение равновесия обратного маятника.

Дальнейшие исследования будут направлены на изучение более сложных моделей перевернутого маятника, оснащенных различным количеством гиродинов.

Работа выполнена в рамках госзадания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (*проект № 8.2321.2017/ПЧ* «*Разработка и адаптация систем управления компенсацией динамических отклоняющих воздействий на мобильные объекты, находящиеся в состоянии динамического равновесия*»).

Библиографический список

1. **Ito S., Nishio S., Ino M., Morita R., Matsushita K., Sasaki M.** Design and adaptive balance control of a biped robot with fewer actuators for slope walking. Mechatronics. 2018, no. 49, pp. 56-66.

2. **Ворочаева Л. Ю., Яцун А. С., Яцун С. Ф.** Управление квазистатической ходьбой экзоскелета на основе экспертной системы // Труды СПИИРАН. 2017. № 3(52). С. 70-94.

3. **Манько С. В., Шестаков Е. И.** Автоматический синтез сценариев походки реконфигурируемых мехатронно-модульных роботов в модификации шагающей платформы. Российский технологический журнал. 2018. Т. 6. № 4. С. 26-41.

4. **Herra La P. X. M., Shiriaev A. S., Freidovich L. B., Mettin U., Gusev S. V.** Stable Walking Gaits for a Three-Link Planar Biped Robot With One Actuator. IEEE Transactions on Robotics. 2013, vol. 29, no. 3. pp. 589-601.

5. **Арановский С. В., Бирюк А. Э., Никульчев Е. В., Рядчиков И. В., Соколов Д. В.** Синтез наблюдателя в задаче стабилизации обратного маятника с учетом ошибки в датчиках положения // Известия Российской академии наук. Теория и системы управления. 2019. № 2. С. 145-153.

6. **Amengonu Y. H., Kakad Y. P., Isenberg D. R.** The Control Moment Gyroscope Inverted Pendulum. Advances in Intelligent Systems and Computing. 2014, vol. 240, pp. 109-118.

7. **Chu T. D., Chen C. K.** Design and Implementation of Model Predictive Control for a Gyroscopic Inverted Pendulum. Applied Sciences. 2017, vol. 7. no. 12, pp. 1272.

8. **Chiu J., Goswami A.** Design of a Wearable Scissored-Pair Control Moment Gyroscope (SP-CMG) for Human Balance Assist. Proceedings of the ASME 2014 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference. 2014. pp. V05AT08A023. doi: 10.1115/DETC2014-35539.

9. **Aranovskiy S., Ortega R., Romero J. G., Sokolov D.** A globally exponentially stable speed observer for a class of mechanical systems: experimental and simulation comparison with high-gain and sliding mode designs. International Journal of Control. 2017, pp. 1-14. (doi.org/10.1080/00207179.2017.1404130)

10. **Ли Э. Б., Маркус Л.** Основы теории оптимального управления: пер. с англ. / под ред. Я.Н. Ройтенгберга. – М.: Наука, 1972. 576 с.

11. **Anderson B. D. O., Moore J. B.** Optimal Control: Linear Quadratic Methods. – США: Prentice-Hall, 1989. 394 с.

UDC 681.5

LQR DESIGN FOR A CMG INVERTED PENDULUM WITH NON-CONSTANT EQUILIBRIUM POSITION

I. V. Ryadchikov, Ph.D. (Phys. and Math.), Head of the Laboratory of Robotics and Mechatronics, Kuban State University, Krasnodar, Russia; igorryadchikov@gmail.com
S. I. Sechenev, post-graduate student, Kuban State University, Krasnodar; sechenev.semen@gmail.com
N. V. Mikhalkov, engineer of the Laboratory of Robotics and Mechatronics, Kuban State University, Krasnodar, Russia; mikh.nv@yandex.ru
A. E. Biryuk, Ph.D. (Phys. and Math.), assistant professor of the Chair of Function Theory, Kuban State University, Krasnodar, Russia; biryuk.a@it.kubsu.ru
A. A. Svidlov, Ph.D. (Phys. and Math.), researcher, Department of Arid Zones, Laboratory of Problems of Distribution of Stable Isotopes in Living Systems, SSC RAS, Moscow, Russia; svidlov@mail.ru
A. A. Gusev, post-graduate student, Kuban State University, Krasnodar, Russia; gusev@ftf.kubsu.ru

D. V. Sokolov, assistant professor of the University of Lorraine, Nancy, France; dmitry.sokolov@univ-lorraine.fr
E. V. Nikulchev, Ph.D. (Tech.), professor of the Chair of Systems Control and Modelling, MIREA – Russian Technological University, Moscow, Russia; nikulchev@mail.ru

The task of developing a feedback control system for an inverted pendulum controlled by a control moment gyroscope (CMG) with a real-time revision of equilibrium position after the displacement of mass center is considered. ***The aim is to*** *study and synthesize a linear-quadratic regulator capable of stabilizing the inverted pendulum with a CMG in a new equilibrium position. To build up a mathematical model of the control object, the Lagrangian of the inverted pendulum with a CMG and Euler-Lagrange equations are derived. The linearization of the model obtained is carried out near unbiased equilibrium position. It is shown that the problem of linear control synthesis has a solution in this case. Then the model is equipped with parametric quantity of instrumental error in determining the direction to the vertical, caused by the displacement of mass center. It is shown that in this case the system of linear equations will have an asymptotically stable stationary solution, while in the new equilibrium position the center of gravity of the inverted pendulum will be above the pivot point. The robustness check of the obtained control was implemented in a computer model built using MATLAB / Simulink and on an experimental plant. The characteristics of transient processes confirm the reliability of synthesized linear-quadratic control with the stabilization of the inverted pendulum with CMG in a new equilibrium position.*

Key words: *inverted pendulum, CMG, gyroscope, automatic control system, feedback, linear quadratic regulator, error in determining the position of the center of mass, robust control, simulation, MATLAB/Simulink.*

DOI: 10.21667/1995-4565-2019-68-2-83-89

References

1. **Ito S., Nishio S., Ino M., Morita R., Matsushita K., Sasaki M.** Design and adaptive balance control of a biped robot with fewer actuators for slope walking. *Mechatronics*. 2018, no. 49, pp. 56-66.

2. **Vorochaeva L. Y., Yatsun A. S., Jatsun S. F.** Controlling a Quasistatic Gait of an Exoskeleton on the Basis of the Expert System. *SPIIRAS Proceedings*. 2017, no. 3(52), pp. 70-94.

3. **Manko S. V., Shestakov E. I.** Automatic synthesis of gait scenarios for reconfigurable mechatronic modular robots in the modification of the walking platform. *Russian Technological Journal*. 2018, vol. 6, no. 4, pp. 26-41.

4. **Herra La P. X. M., Shiriaev A. S., Freidovich L. B., Mettin U., Gusev S.V**. Stable Walking Gaits for a Three-Link Planar Biped Robot With One Actuator. *IEEE Transactions on Robotics*. 2019, vol. 29, no. 3, pp. 589-601.

5. **Aranovskiy S. V., Biryuk A. E., Nikulchev E. V., Ryadchikov I. V., Sokolov D. V.** Observer Design for an Inverted Pendulum with Biased Position Sensors1 Stabilization of the inverse pendulum with regard to the error in the position sensors. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2019, vol. 58, no. 2, pp. 297-304.

6. **Amengonu Y. H., Kakad Y. P., Isenberg D. R.** The Control Moment Gyroscope Inverted Pendulum. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2014, vol. 240, pp. 109-118.

7. **Chu T. D., Chen C. K.** Design and Implementation of Model Predictive Control for a Gyroscopic Inverted Pendulum. *Applied Sciences*. 2017, vol. 7, no. 12, p. 1272.

8. **Chiu J., Goswami A.** Design of a Wearable Scissored-Pair Control Moment Gyroscope (SP-CMG) for Human Balance Assist. *Proceedings of the ASME 2014 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference*. 2014, pp. V05AT08A023. doi: 10.1115/DETC2014-35539.

9. **Aranovskiy S., Ortega R., Romero J. G., Sokolov D.** A globally exponentially stable speed observer for a class of mechanical systems: experimental and simulation comparison with high-gain and sliding mode designs. *International Journal of Control*. 2017, pp. 1-14. (doi.org/10.1080/00207179.2017.1404130)

10. **Lee E. B., Markus L.** Foundations of Optimal Control Theory. New York, Wiley, 1967.

11. **Anderson B. D. O., Moore J. B.** Optimal Control: Linear Quadratic Methods, Upper Saddle River, USA, Prentice-Hall, 1989.