УДК 519.766.26

БЫСТРЫЙ АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ИНДЕКСОВ НЕЧЕТКОСТИ ДЛЯ УНИМОДАЛЬНЫХ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ LR-ТИПА

К. В. Бухенский, к.ф-м.н., доцент, проректор по учебной работе РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0003-2602-2112, e-mail: bukhensky.k.v@rsreu.ru
А. Н. Конюхов, к.п.н., доцент кафедры ВМ РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0002-1523-7110, e-mail: chronos@bk.ru
А. Б. Дюбуа, к.ф-м.н., доцент кафедры ВМ РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0002-5924-4128, e-mail: abd-69@mail.ru
А. С. Сафошкин, ст. преподаватель кафедры ВМ РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0002-1419-979X, e-mail: safoshkin.a.s@rsreu.ru

***Цель работы** – создание быстрого алгоритма расчета индексов нечеткости унимодальных нечетких чисел (НЧ) LR-типа. Область практического применения: системы нечеткого вывода, применяемые в технических устройствах с управлением на нечеткой логике. Распространены на непрерывный случай формулы четырех известных индексов для нечетких множеств (НМ) с дискретным носителем. Рассчитана таблица значений индексов нечеткости для наиболее распространенных модельных НМ, заданных своими функциями принадлежности. Показано, что значения индексов специфичны для каждого модельного множества и не зависят от длины носителя НМ. Обнаруженные свойства индексов модельных НМ позволили предложить простой алгоритм расчета индексов нечеткости унимодальных НЧ LR-типа, основанный на таблице значений индексов и взвешивании вклада функций формы по длине носителя в суммарную нечеткость. Подход применим и к решению обратной задачи о создании НЧ с заданным наперед значением индекса нечеткости.*

***Ключевые слова:** нечеткое множество, функция принадлежности, нечеткое число LR-типа, мера нечеткости, индекс нечеткости, система нечеткого вывода.*

DOI: 10.21667/1995-4565-2019-70-65-75

Введение

Управление техническими устройствами на основе нечетких правил представляет огромный практический интерес. Математическое обеспечение систем нечеткого управления составляет аппарат теории нечетких множеств и нечеткой логики (ТНМНЛ).

Систему нечеткого вывода можно рассматривать как некий преобразователь (черный ящик), на вход которого подается четкий или нечеткий сигнал, а на выходе формируется нечеткий отклик, преобразуемый в четкий управляющий сигнал для исполнительного устройства. Центральное звено – база нечетких правил, антецедентами и консеквентами которых являются термы лингвистических переменных, т.е. нечеткие множества. Следовательно, качество нечеткого логического вывода в существенной мере зависит от того, насколько адекватно предметной области описаны эти термы.

Разработчик системы нечеткого управления оперирует различными типовыми функциями принадлежности НМ, как правило, абстрагируясь от нечетких свойств создаваемых термов. Вместе с тем существуют конкретные количественные характеристики меры нечеткости множеств (индексы нечеткости), учет которых может способствовать повышению адекватности систем нечеткого вывода на следующих этапах: фаззификация, формирование и преобразование термов лингвистических переменных базы нечетких правил, дефаззификация.

Исчисление индексов нечеткости НМ представляет собой трудоемкую вычислительную задачу, связанную с необходимостью численного интегрирования. Однако в системе нечеткого вывода необходимы простые и быстрые алгоритмы оценки нечеткости, один из которых предлагается в настоящей работе.

Теоретическая часть

Следуя L. Zadeh, считаем нечетким подмножеством $\widetilde{A}$ универсума U или просто нечетким множеством (НМ) совокупность всех пар следующего вида: $\widetilde{A}=\{< x\in U,\ \mu_{\widetilde{A}}(x)>\}$, где $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ – функция принадлежности (ФП) элемента x множеству $\widetilde{A}$, $0\le \mu_{\widetilde{A}}(x)\le 1$ [1].

Носителем НМ $\widetilde{A}$ будем называть четкое (канторово) множество $\mathrm{supp}(\widetilde{A})=\{x\in U \mid \mu_{\widetilde{A}}(x)>0\}$. Альфа-сечением – четкое множество $A_\alpha=\{x\in U \mid \mu_A(x)\ge\alpha\}$; $0<\alpha<1$. Ядром НМ – четкое множество $\mathrm{core}(\widetilde{A})=\{x\in U \mid \mu_{\widetilde{A}}(x)=1\}$. Высотой непустого НМ $\widetilde{A}$ – величину $\mathrm{height}(\widetilde{A})=\max\limits_{x\in \mathrm{supp}(\widetilde{A})}\mu_{\widetilde{A}}(x)$. Под нормальным множеством понимаем НМ $\widetilde{A}$ единичной высоты, $\mathrm{height}(\widetilde{A})=1$.

Нечетким числом (НЧ) будем называть нечеткое множество $\widetilde{A}$, заданное своей функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ на универсуме $U=\mathbb{R}$ – множестве всех действительных чисел, удовлетворяющее, по меньшей мере, следующим трем свойствам: 1) $\widetilde{A}$ – нормальное НМ; 2) $\widetilde{A}$ – выпуклое НМ (все его альфа-сечения A_α – связные одноинтервальные подмножества носителя); 3) $\mathrm{supp}(\widetilde{A})$ – ограниченное множество [2]. Унимодальное НЧ имеет ядро, состоящее из единственной точки носителя.

A. De Luca & S. Termini (1972) одними из первых предложили аксиоматическую базу меры нечеткости множества, $mf\left(\widetilde{A}\right)$:

1) $mf\left(\widetilde{A}\right)=0$, если $\widetilde{A}$ – обычное (четкое) множество;

2) $mf\left(\widetilde{A}\right)$ достигает максимума, если $\widetilde{A}$ состоит из одних лишь точек перехода, т.е. если $\mu_{\widetilde{A}}(x)=0,5$ на всем носителе $\mathrm{supp}(\widetilde{A})$;

3) $mf\left(\widetilde{A}\right)\le mf\left(\widetilde{B}\right)$, если множество $\widetilde{B}$ «более нечеткое», чем $\widetilde{A}$, т.е. $\mu_{\widetilde{A}}(x)\le\mu_{\widetilde{B}}(x)$, если $\mu_{\widetilde{B}}(x)\le 0,5$, и $\mu_{\widetilde{A}}(x)\ge\mu_{\widetilde{B}}(x)$, если $\mu_{\widetilde{B}}(x)\ge 0,5$;

4) $mf\left(\widetilde{A}\right)=mf\left(\overline{\widetilde{A}}\right)$, т.е. меры нечеткости множества $\widetilde{A}$ и его дополнения $\overline{\widetilde{A}}$ равны [3]. Заметим, что $\mu_{\overline{\widetilde{A}}}(x)=1-\mu_{\widetilde{A}}(x),\ \forall x\in U$ [1]. Если к вышеперечисленным добавить условие

5) $0\le mf\left(\widetilde{A}\right)\le 1$,

то появится возможность сопоставления мер нечеткости, оцениваемых с использованием различных подходов. Числовую характеристику НМ, удовлетворяющую требованиям 1-5, будем называть «индексом нечеткости» (index of fuzziness) и обозначать $if\left(\widetilde{A}\right)$.

Для проведения исследования было отобрано четыре известных меры нечеткости, предложенных изначально для нормальных НМ с дискретным носителем.

1. Энтропийный индекс нечеткости (A. De Luca & S. Termini). Идея заимствована из теории информации. Рассмотрим произвольную систему с дискретным спектром из n различных состояний $S_1,S_2,...,S_n$ с вероятностями $p_1,p_2,...,p_n$ соответственно. Одновременно реализуется только одно состояние. Тогда функция состояния системы – информационная энтропия H имеет вид

$$H\left(p_1,p_2,...,p_n\right)=-\sum_{i=1}^{n}p_i\ln p_i.$$

Видно, что энтропия будет максимальной, когда все состояния системы равновероятны, т.е. $p_i = 1/n,\ \forall i=\overline{1,n}$. С другой стороны, если состояние системы однозначно определено, например система находится в состоянии *j*, т.е. $p_j = 1$, то значение энтропии достигает минимума $H = 0$ (полагаем $0\ln 0 = 0$).

По аналогии A. De Luca & S. Termini предложили энтропийный вариант меры нечеткости НМ с дискретным носителем:

$$mf_H\left(\widetilde{A}\right) = -K\sum_{i=1}^{n}\left[\mu_{\widetilde{A}}(x_i)\ln\mu_{\widetilde{A}}(x_i) + (1-\mu_{\widetilde{A}}(x_i))\ln(1-\mu_{\widetilde{A}}(x_i))\right],$$

где $K > 0$ – некоторая константа [3].

Анализ формулы показывает, что $mf_H\left(\widetilde{A}\right)$ будет достигать максимума, если $\mu_{\widetilde{A}}(x_i) = 0,5\ \ \forall x_i \in \mathrm{supp}(\widetilde{A})$, т.е. на нечетких множествах перехода, а минимума (нуль) – на четких множествах.

2. Кардинальный индекс нечеткости (B. Kosko). Выражается через соотношение кардинальных чисел (мощностей) пересечения и объединения НМ $\widetilde{A}$ со своим дополнением $\overline{\widetilde{A}}$ [4]:

$$if_C\left(\widetilde{A}\right) = \frac{\mathrm{card}\left(\widetilde{A}\cap\overline{\widetilde{A}}\right)}{\mathrm{card}\left(\widetilde{A}\cup\overline{\widetilde{A}}\right)}.$$

Кардинальное число нормального НМ $\widetilde{A}$ с дискретным носителем определяется суммированием степеней принадлежности по всем элементам носителя

$$\mathrm{card}\left(\widetilde{A}\right) = \sum_{x_i\in\mathrm{supp}(\widetilde{A})}\mu_{\widetilde{A}}(x_i),$$

а в непрерывном случае – интегрированием:

$$\mathrm{card}\left(\widetilde{A}\right) = \int_{x\in\mathrm{supp}(\widetilde{A})}\mu_{\widetilde{A}}(x)dx.$$

Смысл индекса Коско становится ясным, если вспомнить, что для нечетких множеств не выполняются законы «нуля» и «единицы», т.е. $\widetilde{A}\cap\overline{\widetilde{A}}\neq\varnothing$ и $\widetilde{A}\cup\overline{\widetilde{A}}\neq U$. Таким образом, чем меньше различие между множеством и его дополнением, тем выше нечеткость такового.

3. Метрический индекс нечеткости (R. Yager). Если ввести понятие расстояния $d_p\left(\widetilde{A},\overline{\widetilde{A}}\right)$ между нечетким множеством $\widetilde{A}$ и его дополнением $\overline{\widetilde{A}}$ по метрике p (метрика Хэмминга при $p=1$, метрика Евклида при $p=2$) следующим образом:

$$d_p\left(\widetilde{A},\overline{\widetilde{A}}\right) = \left(\sum_{x_i\in\mathrm{supp}(\widetilde{A})}\left|\mu_{\widetilde{A}}(x_i)-\mu_{\overline{\widetilde{A}}}(x_i)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{x_i\in\mathrm{supp}(\widetilde{A})}\left|2\mu_{\widetilde{A}}(x_i)-1\right|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

то свойствами индекса нечеткости будет обладать величина

$$if_{Yp}\left(\widetilde{A}\right) = 1-\frac{d_p\left(\widetilde{A},\overline{\widetilde{A}}\right)}{m^{\frac{1}{p}}\left(\mathrm{supp}(\widetilde{A})\right)},$$

где $m\left(\mathrm{supp}(\widetilde{A})\right)$ – мощность дискретного носителя $\widetilde{A}$ (предполагается конечным) [5].

Чем меньше расстояние между НМ $\widetilde{A}$ и его дополнением $\overline{\widetilde{A}}$, тем выше значение индекса Ягера. В этом смысле он схож с индексом Коско.

4. Индекс нечеткости (A. Kaufmann). В качестве четвертого показателя используем индекс вида

$$if_K\left(\widetilde{A}\right)=\frac{2}{m\left(\operatorname{supp}(\widetilde{A})\right)}\sum_{x_i\in\operatorname{supp}(\widetilde{A})}\left|\mu_{\widetilde{A}}(x_i)-\mu_A(x_i)\right|,$$

где

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1, \text{ если } 0{,}5<\mu_{\widetilde{A}}(x)\le 1,\\ 0, \text{ если } 0\le\mu_{\widetilde{A}}(x)\le 0{,}5\end{cases}$$

есть характеристическая функция четкого множества A, ближайшего к данному нечеткому множеству $\widetilde{A}$ [6]. Индекс также метрический (с метрикой Хэмминга).

Результаты экспериментальных исследований

На подготовительном этапе были получены рабочие формулы индексов нечеткости для случая нормальных унимодальных НМ с ограниченными непрерывными носителями в виде конечного промежутка числовой действительной оси $x\in[a,b],\, b>a.$ Строго говоря, речь идет об интервалах $(a,b),$ но добавление конечного количества точек (множества меры нуль) к носителю не изменит значений интегралов.

1. Формулу энтропийного индекса перепишем в виде

$$if_H\left(\widetilde{A}\right)=-K\int_{x\in\operatorname{supp}(\widetilde{A})}\left[\mu_{\widetilde{A}}(x)\ln\mu_{\widetilde{A}}(x)+(1-\mu_{\widetilde{A}}(x))\ln(1-\mu_{\widetilde{A}}(x))\right]dx\ .$$

Нормировочный коэффициент K найдем из условия $iF_H\left(\widetilde{T}\right)=1$, где $\widetilde{T}$ – переходное НМ, т.е. степени принадлежности всех его элементов равны 0,5. Окончательная рабочая формула энтропийного индекса примет вид

$$if_H\left(\widetilde{A}\right)=\frac{1}{(a-b)\ln 2}\int_a^b\left[\mu_{\widetilde{A}}(x)\ln\mu_{\widetilde{A}}(x)+(1-\mu_{\widetilde{A}}(x))\ln(1-\mu_{\widetilde{A}}(x))\right]dx.$$

2. Формулу кардинального индекса Коско представим следующим образом:

$$if_C\left(\widetilde{A}\right)=\frac{\int_a^b\min\left(\mu_{\widetilde{A}}(x),\,1-\mu_{\widetilde{A}}(x)\right)dx}{\int_a^b\max\left(\mu_{\widetilde{A}}(x),\,1-\mu_{\widetilde{A}}(x)\right)dx},$$

где в качестве операций пересечения и объединения взяты простейшие T-норма и T-конорма Заде.

3. Расстояние между НМ и его дополнением по метрике p запишем в виде

$$d_p\left(\widetilde{A},\overline{\widetilde{A}}\right)=\left(\int_a^b\left|2\mu_{\widetilde{A}}(x)-1\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда выражение метрического индекса Ягера по метрике p примет вид

$$if_{Yp}\left(\widetilde{A}\right)=1-\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b\left|2\mu_{\widetilde{A}}(x)-1\right|^p dx\right)^{1/p}.$$

Для дальнейших расчетов принимаем индекс с метрикой Евклида $(p=2)$

$$if_{Y2}\left(\widetilde{A}\right)=1-\sqrt{\frac{\int_a^b\left(2\mu_{\widetilde{A}}(x)-1\right)^2 dx}{b-a}},$$

так как можно показать, что значения индекса Ягера $f_{Y1}\left(\widetilde{A}\right)$ при $p=1$ совпадают со значениями индекса Кауфмана.

4. Расчетную формулу индекса Кауфмана перепишем в виде

$$if_K\left(\widetilde{A}\right)=\frac{2}{b-a}\int_a^b\left|\mu_{\widetilde{A}}(x)-\mu_A(x)\right|dx,$$

где $\mu_A(x)$ – характеристическая функция четкого множества, ближайшего к данному НМ $\widetilde{A}$:

$$\mu_A(x)=\begin{cases}1,\ \text{если}\ \ 0,5<\mu_{\widetilde{A}}(x)\le 1,\\ 0,\ \text{если}\ \ 0\le\mu_{\widetilde{A}}(x)\le 0,5.\end{cases}$$

Расчеты значений всех четырех индексов произведены на модельных унимодальных НМ с непрерывными ограниченными носителями в виде промежутка $\operatorname{supp}(\widetilde{A})=[a,b],$ с ядром $\operatorname{core}(\widetilde{A})=m,$ описываемых следующими функциями принадлежности:

– треугольная:

$$\mu^t_{\widetilde{A}}(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{m-a},\ \text{если}\ a\le x<m,\\ \dfrac{b-x}{b-m},\ \text{если}\ m\le x\le b,\\ 0\quad \text{иначе},\end{cases}$$

– гауссова гладкая (где $m=(a+b)/2$):

$$\mu^g_{\widetilde{A}}(x)=\begin{cases}\exp\left[1-\dfrac{(b-a)^2}{4(b-x)(x-a)}\right],\ \text{если}\ a<x<b,\\ 0\ \ \text{иначе},\end{cases}$$

– гауссова усеченная (где $a=m-s\sqrt{\ln 2},\ b=m+s\sqrt{\ln 2}$):

$$\mu^{cg}_{\widetilde{A}}(x)=\begin{cases}2\exp\left(-\left(\dfrac{x-m}{s}\right)^2\right)-1,\ \text{если}\ m-s\sqrt{\ln 2}\le x\le m+s\sqrt{\ln 2},\\ 0\ \ \text{иначе},\end{cases}$$

– квадратичная гладкая (где $l=(a+m)/2,\ r=(m+b)/2$):

$$\mu^q_{\widetilde{A}}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a-x}{a-l}\right)^2,\ \text{если}\ a\le x\le l,\\ 1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m-x}{m-l}\right)^2,\ \text{если}\ l<x\le m,\\ 1-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{m-x}{m-r}\right)^2,\ \text{если}\ m<x\le r,\\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{b-x}{b-r}\right)^2,\ \text{если}\ r<x\le b,\\ 0\quad \text{в остальных случаях},\end{cases}$$

– усеченная парабола (где $m=(a+b)/2$):

$$\mu^{cp}_{\widetilde{A}}(x)=\begin{cases}1-\left(\dfrac{x-m}{b-m}\right)^2,\ \text{если}\ a\le x\le b,\\ 0\ \ \text{иначе},\end{cases}$$

– гармоническая (где $m=(a+b)/2$):

$$\mu^{h}_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(1+\cos\left(\pi\dfrac{2x-a-b}{b-a}\right)\right), \text{ если } a \le x \le b, \\ 0 \quad \text{иначе,} \end{cases}$$

– усеченный кардинальный синус (где $a = m - \pi d,\ b = m + \pi d$):

$$\mu^{\text{sinc}}_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \dfrac{d}{x-m}\sin\left(\dfrac{x-m}{d}\right), \ \text{ если } x \in [m-\pi d; m+\pi d] \setminus \{m\}, \\ 1, \text{ если } x = m, \\ 0 \quad \text{иначе.} \end{cases}$$

Индексы оценивались численно, хотя в отдельных случаях допускалась и аналитическое вычисление. Результаты расчетов в ранжированном виде представлены в таблице.

Индексы нечеткости, рассчитанные на модельных множествах
Indices of fuzziness calculated on sample sets

Модельное множество	Индекс нечеткости			
	Коско	Ягера (p = 2)	Кауфмана	Энтропийный
Четкое, A	0	0	0	0
Нечеткое с гауссовой гладкой ФП	0,192	0,256	0,323	0,502
Нечеткое с квадратичной гладкой ФП	0,200	0,270	0,333	0,526
Нечеткое с гармонической ФП	0,222	0,293	0,363	0,557
Нечеткое с ФП типа «усеченная парабола»	0,243	0,317	0,391	0,590
Нечеткое с ФП типа «усеченный кардинальный синус»	0,254	0,331	0,405	0,610
Нечеткое с ФП типа «усеченная гауссова»	0,255	0,331	0,406	0,609
Нечеткое с треугольной ФП	0,333	0,423	0,5	0,721
Нечеткое из точек перехода, $\tilde{T}$	1	1	1	1

По данным таблицы можно сделать следующие выводы.

Во-первых, для каждого НМ, задаваемого функцией принадлежности определенного вида, все индексы имеют строго определенное постоянное значение, не зависящее от длины носителя $\text{length}(\text{supp}(\tilde{A})) = b - a$. То есть индексы нечеткости, исчисленные по формулам данного раздела, могут служить количественными признаками класса нечеткости НМ.

Во-вторых, ранжирование расчетных значений индексов показало, что наименьшей нечеткостью среди рассмотренных модельных НМ обладают множества с гауссовой гладкой НМ, а наибольшей – с треугольной (кусочно-линейной) ФП.

В-третьих, значения различных видов индексов демонстрируют неодинаковую относительную вариацию при переходе от НМ с гауссовой гладкой ФП ко множеству с треугольной ФП: индекс Коско – 73,4 %; индекс Ягера – 65,2 %; индекс Кауфмана – 54,8 %; энтропийный индекс – 43,6 %.

В-четвертых, НМ с «усеченными» вариантами ФП имеют весьма близкие значения по каждому из четырех видов индексов: наибольшая относительная вариация (по индексу Коско) – 4,9 %, наименьшая (по энтропийному) – 3,2 %. В этом смысле такие НМ можно отнести к одному классу нечеткости.

В-пятых, для оценки статистической взаимосвязи индексов рассчитана матрица парных линейных коэффициентов корреляции для значений индексов из таблицы:

$$\left\| r\left(if_i, if_j\right) \right\| = \left\| \begin{matrix} 1 & 0,986 & 0,946 & 0,703 \\ 0,986 & 1 & 0,986 & 0,803 \\ 0,946 & 0,986 & 1 & 0,888 \\ 0,703 & 0,803 & 0,888 & 1 \end{matrix} \right\|,$$

где $i, j = \overline{1,4}$ – номер индекса (1 – индекс Коско; 2 – индекс Ягера; 3 – индекс Кауфмана; 4 – энтропийный индекс).

Весьма сильная, близкая к функциональной корреляционная линейная связь наблюдается попарно между значениями индексов Коско, Ягера и Кауфмана; значительно меньше сила связи каждого из указанных индексов с энтропийным, что, очевидно, связано с иной (информационной) природой последнего. Это дает основания полагать, что для исследований достаточно использовать только два из четырех индексов: кардинальный (наиболее «чувствительный» по критерию относительной вариации) и энтропийный.

На основании выявленных свойств индексов обоснован быстрый алгоритм расчета индексов нечеткости НЧ *LR*-типа, т.е. чисел вида:

$$\mu_{\widetilde{LR}}(x) = \widetilde{LR}[a;m;b](x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{x-a}{m-a}\right), \text{ если } x \in [a,m], \\ R\left(\dfrac{x-b}{m-b}\right), \text{ если } x \in (m,b], \\ 0 \quad \text{иначе,} \end{cases}$$

где m – ядро числа; $[a,b]$ – носитель числа; $L(t), R(t) : [0,1] \to [0,1]$ – две некоторые непрерывные неубывающие функции (функции формы), удовлетворяющие граничным условиям $L(0) = R(0) = 0$ и $L(1) = R(1) = 1$. НЧ *LR*-типа часто используются для описания центральных термов лингвистических переменных в базе нечетких правил.

Алгоритм требует наличия достаточно полного информационного массива значений индексов нечеткости для различных функций формы (предварительно рассчитанный по типу таблицы) и состоит из двух шагов.

1. Находим в таблице значения индекса нечеткости, соответствующие левой $if\left(\tilde{L}\right)$ и правой $if\left(\tilde{R}\right)$ функциям формы *LR*-числа.

2. Рассчитываем индекс нечеткости *LR*-числа по взвешенной формуле

$$if\left(\widetilde{LR}\right) = \frac{(m-a)if\left(\tilde{L}\right) + (b-m)if\left(\tilde{R}\right)}{b-a}$$

или

$$if\left(\widetilde{LR}\right) = \frac{\alpha if\left(\tilde{L}\right) + \beta if\left(\tilde{R}\right)}{\alpha + \beta},$$

где $\alpha = m - a$ и $\beta = b - m$ – левый и правый спрэды (показатели нечеткости) *LR*-числа соответственно.

Пример 1. Пусть для нечеткого правила требуется создать центральный терм в виде *LR*-числа с параметрами $a = 1, m = 5, b = 15$. Возьмем в качестве левой функции гауссову гладкую, а в качестве правой – линейную (рисунок 1). Расчетные значения индексов по взвешенному алгоритму:

$$if_C\left(\widetilde{LR}\right) = \frac{4 \cdot 0,192 + 10 \cdot 0,333}{14} = 0,293; \; if_{Y2}\left(\widetilde{LR}\right) = \frac{4 \cdot 0,256 + 10 \cdot 0,423}{14} = 0,375;$$

$$if_K\left(\widetilde{LR}\right)=\frac{4\cdot 0,323+10\cdot 0,5}{4+10}=0,449;\ if_H\left(\widetilde{LR}\right)=\frac{4\cdot 0,502+10\cdot 0,721}{4+10}=0,658,$$

которые согласуются с непосредственными (прямыми) численными оценками в пределах погрешности, связанной с округлениями на этапах составления таблицы и приближенными вычислениями интегралов (в совокупности не более 1,07 %).

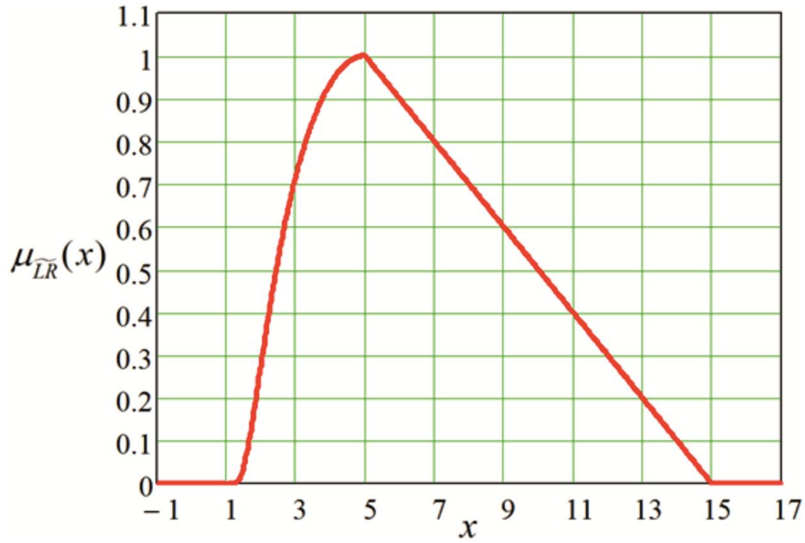

Рисунок 1 – Нечеткое число $\widetilde{LR}[1;5;15]$ для взвешенного расчета индексов нечеткости (функции формы: левая – гауссова гладкая, правая – линейная)

Figure 1 – Fuzzy number $\widetilde{LR}[1;5;15]$ for fuzziness indices weighted calculation (shape functions: left – smooth Gaussian, right – linear)

Существенным достоинством предложенного алгоритма (помимо простоты) является его применимость к решению обратной задачи создания нечеткого числа с заданным наперед значением индекса нечеткости.

Пусть необходимо генерировать терм в виде LR-числа с тремя заданными параметрами: $\mathrm{core}(\widetilde{LR})=m,$ один из спрэдов (для определенности левый) α, требуемое значение индекса нечеткости $if\left(\widetilde{LR}\right)$. Варьировать можно функции формы и величину второго спрэда β.

В таблице выбираем две функции формы – левую и правую так, чтобы $if\left(\tilde{L}\right)<if\left(\widetilde{LR}\right)<if\left(\tilde{R}\right)$. Естественно, не рассматриваем тривиальный случай $if\left(\tilde{L}\right)=if\left(\widetilde{LR}\right)$ или $if\left(\tilde{R}\right)=if\left(\widetilde{LR}\right)$. Тогда

$$if\left(\widetilde{LR}\right)=\frac{\alpha if\left(\tilde{L}\right)+\beta if\left(\tilde{R}\right)}{\alpha+\beta},$$

откуда

$$\beta=\alpha\frac{if\left(\tilde{L}\right)-if\left(\widetilde{LR}\right)}{if\left(\widetilde{LR}\right)-if\left(\tilde{R}\right)}.$$

Пример 2. Пусть для нечеткого правила системы нечеткого вывода требуется создать терм в виде числа LR-типа с параметрами $m=9,\ \alpha=5,$ имеющий значение кардинального индекса нечеткости Коско $if_C\left(\widetilde{LR}\right)=0,26.$ В качестве функций формы выберем левую – гармоническую ФП с $if_C\left(\tilde{L}\right)=0,222,$ правую – линейную ФП с $if_C\left(\tilde{R}\right)=0,333.$ Рассчитываем величину правого спрэда

$$\beta = 5 \cdot \frac{0,222 - 0,260}{0,260 - 0,333} \approx 2,6.$$

Искомое число – $\widetilde{LR}[4;9;11,6]$ с функцией принадлежности

$$\mu_{\widetilde{LR}}(x) = \begin{cases} 0,5\left(1 + \cos\left(\pi \dfrac{x-9}{5}\right)\right), \text{ если } 4 \le x \le 9, \\ \dfrac{11,6 - x}{2,6}, \text{ если } 9 < x \le 11,6, \\ 0 \quad \text{иначе,} \end{cases}$$

график которой приведен на рисунке 2.

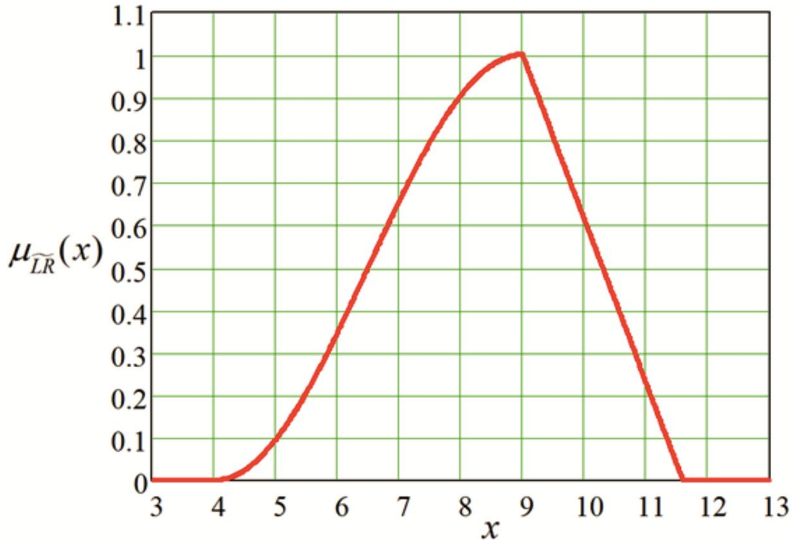

Рисунок 2 – Нечеткое число $\widetilde{LR}[4;9;11,6]$ со значением индекса нечеткости $if_C\left(\widetilde{LR}\right) = 0,26$ (функции формы: левая – гармоническая, правая – линейная)

Figure 2 – Fuzzy number $\widetilde{LR}[4;9;11,6]$ having fuzziness index value $if_C\left(\widetilde{LR}\right) = 0,26$ (shape functions: left – harmonic, right – linear)

Для увеличения диапазона рабочих значений индексов нечеткости модельных НМ из таблицы можно использовать модификаторы нечеткости (растяжения, размытия) [7, 8], обсуждение которых выходит за рамки данной работы.

Заключение

Обоснован и верифицирован алгоритм расчета индексов нечеткости унимодальных нечетких чисел LR-типа, основанный на таблице индексов модельных нечетких множеств и взвешивании вклада функций формы по длине носителя в суммарную нечеткость.

Предложенный алгоритм позволяет существенно сократить время оценки индексов, так как, по сути, сведен к единственной операции взвешенного усреднения. Аналитическая ценность данного подхода заключается в возможности простого решения обратной задачи (генерирование числа с предопределенным значением индекса нечеткости), а также в возможности прослеживать преобразования нечеткости при оперировании с нечеткими числами.

Параллельно исследованы четыре известные формы индексов нечеткости и выявлена весьма высокая линейная корреляционная зависимость $(r > 0,94)$ значений трех из четырех индексов на модельных множествах. Следовательно, для практического применения целесообразно сократить количество используемых индексов.

Путем численных экспериментов установлено, что индексы нечеткости, исчисленные по предложенным рабочим формулам, являются функциями лишь формы, то есть не зависят от длины носителя нечеткого числа. Поэтому данные индексы могут служить количественным основанием классификации нечетких множеств.

Результаты исследования могут быть использованы для повышения адекватности систем нечеткого вывода за счет дополнительного учета индексов нечеткости при описании термов лингвистических переменных в базе нечетких правил.

Библиографический список

1. **Zadeh L.A.** Fuzzy sets. Information and control. 1965, vol. 8, pp. 338-353.

2. **Bede B.** Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. London: Springer, 2013. 276 p.

3. **De Luca A., Termini S.** A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory. Information and control. 1972, vol. 20, pp. 301-312.

4. **Kosko B.** Fuzzy entropy and conditioning. Information Sciences. 1986, vol. 40, no. 2, pp. 165-174.

5. **Yager R.** On the measure of fuzziness and negation. Part I: membership in the unit interval. International Journal of General Systems. 1979, vol. 5, pp. 221-229.

6. **Кауфман А.** Введение в теорию нечетких множеств: пер. с франц. М.: Радио и связь, 1982. 432 с.

7. **Piegat A.** Fuzzy modeling and control. Heidelberg: Physica-Verlag GmbH, 2010. 728 p.

8. **Конюхов А.Н., Дюбуа А.Б.** Параметрическое исследование лингвистических модификаторов на нечетких множествах с ограниченными носителями // Современные технологии в науке и образовании – СТНО-2017 / под ред. О.В. Миловзорова. Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2017. Т. 2. С. 131-136.

UDC 519.766.26

A RAPID ALGORITHM OF FUZZINESS INDICES CALCULATION FOR UNIMODAL LR-TYPE FUZZY NUMBERS

K. V. Bukhensky, Ph.D. (Phys. and Math.), associate professor, deputy rector, RSREU, Ryazan, Russia;
orcid.org/0000-0003-2602-2112, e-mail: bukhensky.k.v@rsreu.ru
A. N. Konyukhov, Ph.D. (Ped. Sci.), associate professor, RSREU, Ryazan, Russia;
orcid.org/0000-0002-1523-7110, e-mail: chronos@bk.ru
A. B. Dubois, Ph.D. (Phys. and Math.), associate professor, RSREU, Ryazan, Russia;
orcid.org/0000-0002-5924-4128, e-mail: abd-69@mail.ru
A. S. Safoshkin, Lecturer, RSREU, Ryazan, Russia;
orcid.org/0000-0002-1419-979X, e-mail: safoshkin.a.s@rsreu.ru

The aim of the work is to *design rapid algorithm of fuzziness indices calculation for unimodal LR-type fuzzy numbers (FN). The sphere of application: fuzzy inference systems for devices using fuzzy control. The formulas of four known indices for fuzzy sets (FS) with discrete support were extended to continuous case. The table of fuzziness indices values for most commonly used sample FS described by their membership functions was calculated. It was shown that indices values appeared to be specific for each sample set and independent of FS's support length. Revealed properties of indices made possible to design a simple algorithm of fuzziness indices calculation for unimodal LR-type fuzzy numbers. It uses the table of indices and evaluates contribution of shape functions weighted by support length to overall fuzziness. The approach is also applicable for the solution of inverse problem of forming fuzzy number with predefined index of fuzziness value.*

Key words: *fuzzy set, membership function, LR-type fuzzy number, measure of fuzziness, fuzziness index, fuzzy inference system.*

DOI: 10.21667/1995-4565-2019-70-65-75

References

1. **Zadeh L.A.** Fuzzy sets. *Information and control*. 1965, vol. 8, pp. 338-353.

2. **Bede B.** *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. London: Springer, 2013. 276 p.

3. **De Luca A., Termini S.** A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory. *Information and control*. 1972, vol. 20, pp. 301-312.

4. **Kosko B.** *Fuzzy entropy and conditioning. Information Sciences*. 1986, vol. 40, no. 2. pp. 165-174.

5. **Yager R.** *On the measure of fuzziness and negation. Part I: membership in the unit interval. International Journal of General Systems*. 1979, vol. 5, pp. 221-229.

6. **Kaufmann A.** *Vvedenie v teoriju nechetkih mnozhestv. (Introduction to the theory of fuzzy subsets).* M.: Radio i svjaz', 1982, 432 p. (in Russian).

7. **Piegat A.** *Fuzzy modeling and control*. Heidelberg: Physica-Verlag GmbH, 2010. 728 p.

8. **Konyukhov A. N., Dubois A. B.** Parametricheskoe issledovanie lingvisticheskih modifikatorov na nechetkih mnozhestvah s ogranichennymi nositeljami (Parametric investigation of linguistic hedges on support-bounded fuzzy sets*). Sovremennye tehnologii v nauke i obrazovanii – STNO-2017* / pod red. O.V. Milovzorova. Rjazan': Rjazan. gos. radiotehn. un-t, 2017, vol. 2, pp. 131-136. (in Russian).