

УДК 004.052.34

ВЛИЯНИЕ ПЛОТНОСТИ СВЯЗЕЙ ТРАНСПОРТНЫХ СЕТЕЙ НА ИХ ПРОВОДИМОСТЬ ПРИ БЛОКИРОВАНИИ УЗЛОВ И СВЯЗЕЙ

А. С. Алёшкин, к.т.н., доцент кафедры КБ-8 «Информационное противоборство», РТУ МИРЭА, Москва, Россия;

orcid.org/0000-0003-2190-700X, e-mail: antony@testor.ru

Д. О. Жуков, д.т.н., кафедра КБ-8 «Информационное противоборство», РТУ МИРЭА, Москва, Россия;

orcid.org/0000-0002-1211-5214, e-mail: zhukovdm@yandex.ru

С. А. Лесько, к.т.н., доцент кафедры КБ-3 «Управление и моделирование систем» РТУ МИРЭА, Москва, Россия;

orcid.org/0000-0002-6641-1609, e-mail: sergey@testor.ru

Целью работы является демонстрация изучения надежности и отказоустойчивости в работе транспортных сетей при помощи методов и подходов теории перколяции. Наземная транспортная инфраструктура может быть представлена в виде планарного или почти планарного графа. Для реальной транспортной сети почти планарность будет связана с наличием эстакад и многоуровневых развязок. В теории перколяции рассматривается решение задач нахождения долей блокированных узлов и блокированных связей, при которых они распадаются на несвязанные области, то есть теряют свойство пропускания дорожного трафика. Доля неблокированных узлов (в задаче узлов) или неразорванных связей (в задаче связей), при которой возникает проводимость между двумя произвольно выбранными узлами сети, называется порогом перколяции (протекания). Величина порога перколяции зависит от среднего числа связей, приходящихся на один узел сети (плотности), и является критерием надежности работы. Реальные транспортные сети имеют топологию более близкую к случайным сетям, чем к регулярным структурам. Порог блокирования у регулярных сетей в целом выше, чем у планарных сетей, построенных случайным образом. При одинаковой плотности сетей случайная планарная сеть (по возможности потери работоспособности) лишь немного уступает регулярным структурам. Увеличение плотности связей транспортных сетей повышает их надежность и пропускную способность. Используя карту транспортной сети города, можно определить среднее число связей, приходящихся на один узел такой сети, а затем рассчитать величину порога блокирования. Подобные расчеты можно использовать при проектировании и модернизации дорожной инфраструктуры, чтобы рассчитывать необходимое количество дополнительных связей.

Ключевые слова: транспортная сеть, плотность связей сети, порог перколяции сети, повышение надежности, повышение пропускной способности.

DOI: 10.21667/1995-4565-2019-70-76-90

Введение

Управление и балансировка потоков в транспортных сетях – одна из важнейших проблем современных мегаполисов. Урбанизация и развитие автотранспортной промышленности привели к возникновению огромных потоков автомобилей, движущихся в условиях сложившейся ограниченной дорожно-транспортной инфраструктуры, к возникновению заторов на дорогах, и как следствие, к потере времени, а также к увеличению выброса в атмосферу вредных веществ.

Всё это влечёт за собой необходимость разработки моделей и методов управления и балансировки транспортными потоками. В обобщенном смысле необходимо решить динамическую задачу перераспределения потоков (трафика) в транспортных сетях с учетом их топологии. Проблема заключается в том, что число транспортных средств постоянно растет и

вследствие этого применяемые модели управления устаревают и дают сбои. Таким образом, возникает необходимость либо поиска новых инструментов управления, либо модернизации физической основы (ширина и протяженность дорог, число полос и т.д.) существующей транспортной сети. Рассмотрим некоторые из существующих подходов к управлению трафиком в транспортных системах, которые условно делятся на локальные и системные.

Локальное управление осуществляется на основе статистически оцененных характеристик транспортных потоков. Результат обеспечивается получением оценки эффективности функционирования транспортных потоков на одном транспортном узле без учета соседних. Системное управление обеспечивает оптимизацию функционирования транспортных потоков в зоне, включающей в себя множество транспортных узлов, и, как правило, производится с учетом макрохарактеристик потоков. Изменение управляющих воздействий на одном транспортном узле неизбежно вызывает изменение характеристик транспортных потоков на соседних. Обычным является конфликт целей локального и системного методов управления. Поэтому, если в сети применяются одновременно оба метода управления, то они разделяются по времени действия. Время, отводимое для локального управления, выбирается таким образом, чтобы ограничить воздействие транспортных потоков на соседних транспортных узлах.

Не останавливаясь подробно на истории развития моделей анализа и управления транспортными потоками (модель Гриншилдса, Ричардса, Гриндберга, Эль Хозаини, Андервуда, Дрэйка, Пайпса, оптимальной скорости, «умного» водителя, следования за лидером, клеточные автоматы и другие) и различных способах их классификации, рассмотрим некоторые из моделей, которые были созданы в последнее время.

Например, в работе [1] была исследована модель потока в сетях на основе гиперболической системы законов сохранения с разрывным потоком. Исследование данной модели показало, что она может быть реализована за короткий промежуток времени, поскольку для управления решением не требуются дополнительные процедуры. Созданная модель позволяет автоматически выбрать решение, при котором максимизируется поток вдоль каждого пути (пользовательский оптимум), т.е. нет необходимости для вычисления максимального потока, который мог бы быть переданным по узлу (глобальный оптимум), как это происходит в стандартных подходах.

В работе [2] авторы разработали метод прогнозирования краткосрочного трафика на шоссе. В этом исследовании было произведено сравнение эффективности нескольких алгоритмов: модель прогнозирования Вольтерра, RBFNN (radial basis function network – радиальная базовая функциональная сеть). По результатам сравнения была выбрана модель Вольтерра, в которой для упрощения программирования алгоритмов данные трафика были нормализованы.

В работе [3] авторами был разработан алгоритм определения точных средних скоростей движения потока на дороге с использованием данных мобильного детектора для измерения скорости перемещения. Созданный алгоритм определяет средние скорости движения на дорожном участке, игнорируя повторяющиеся записи, а затем применяется фильтр для сбора времени поездок, чтобы компенсировать выборку, по времени превышающую ограничение скорости на дороге. Однако используемый метод включает ошибки, например вызванные задержкой связи, дублированием записей и других факторов.

В статье [4] авторы провели исследование проблемы калибровки и проверки моделей макроскопического трафика дорожного движения. Было рассмотрено и сопоставлено в общей сложности десять различных алгоритмов (относительно их способности сходиться к решению) для разных наборов данных. Особенно эффективными, как с точки зрения скорости конвергенции, так и с точки зрения обобщения решений, оказались алгоритмы оптимизации с помощью роя частиц (PSO).

В статье [5] авторы использовали гибридную гауссову регрессию (GPR), оптимизированную с помощью алгоритма роя частиц (PSO) для прогнозирования неопределенного, нелинейного и сложного трафика внутри дорожного туннеля.

В работе [6] авторы в экспериментальных и эмпирических исследованиях рассмотрели нестабильность транспортного потока. Для определения нестабильности трафика авторы рассматривали конкуренцию между стохастическими нарушениями, которые имеют тенденцию не стабилизировать поток трафика, и адаптацией водителей к изменяющимся скоростям, которые стремятся стабилизировать поток трафика.

В работе [7] авторами была разработана модификация алгоритма для оптимизации маршрута транспортировки в отношении потока трафика в уличной сети. Работа основана на модифицированном ant-алгоритме (алгоритме движения муравьёв), который является одним из наиболее эффективных полиномиальных алгоритмов поиска для решения проблем оптимизации маршрута.

В статье [8] проведен структурный анализ маршрутов общественного транспорта с точки зрения тарифов и режимов работы. Чтобы обеспечить более разумные и логичные результаты для разных структур, был предложен расширенный алгоритм вычисления маршрута.

В статье [9] авторы разработали алгоритм работы транспортной сети, основанный на их представлении в виде предфрактального графа. Поиск решений многокритериальной задачи нахождения оптимального пути можно осуществлять алгоритмами, которые позволяют искать оптимальные решения по нескольким критериям, если существование такого критерия доказано, или на основе решения, с заданными отклонениями от оптимального. В данной работе был использован алгоритм выделения наибольших максимальных цепей (алгоритм ВНМЦ) на произвольном графе.

В статье [10] было рассмотрено использование экспертной системы и регулятора на основе модуля нечеткой логики в системах управления транспортными потоками на перекрестке.

В статье [11] авторы разработали методику управления дорожным движением на основе разработанных показателей эффективности дорожного движения, таких как мощность транспортного потока, мощность дороги, коэффициент использования мощности дороги.

В статье [12] авторами были рассмотрены вопросы управления насыщенными транспортными потоками с использованием прогнозирующей модели на отдельном перекрестке и в пределах транспортной области. На основании решения задачи, базирующееся на основе алгоритма управления с использованием прогнозирующей модели, которое обеспечивает распределение остаточной очереди, возникающей из-за превышения транспортным спросом пропускной способности пересечения, по всем входящим транспортным связям при длительном нахождении пересечения в режиме перенасыщения происходит накопление достаточно большой очереди. В этом случае предотвратить возникновение общесетевого затора возможно только путем уменьшения транспортного спроса на входах в перекресток.

Автор статьи [13] рассмотрел возможности применения основной сетевой диаграммы транспортного потока для прогнозирования условий функционирования улично-дорожной сети в городах. Модель транспортного потока, рассмотренная автором, опирается на использование обобщенной модели Пайпса для определения зависимости между скоростью и плотностью для расчета характеристик транспортного потока. Анализ модели показал, что при управлении дорожным движением в городах необходимо ограничивать состояния с высоким уровнем накопления автомобилей в сети и применять соответствующие стратегии управления.

В статье [14] авторы рассмотрели характер распределения интервалов в транспортном потоке в зависимости от удаленности от предыдущего регулируемого перекрестка. По итогам исследования авторы пришли к выводу, что более подходящим для описания временных интервалов внутри групп в потоке является нормированное распределение Эрланга.

Проведенный краткий обзор по разработке моделей, созданных за последнее время, показывает, что, несмотря на все их разнообразие нет исследований, которые рассматривали бы общие свойства структуры транспортных сетей, определяющие их проводимость в целом. А также нет работ, которые связывали бы вместе характеристики динамических процессов и структурные особенности (топологию) транспортных систем.

Поэтому целью нашей работы является изучение влияния плотности связей транспортных сетей на их проводимость при блокировании узлов и/или связей.

Постановка задачи

Значительные показатели плотности автотранспортных средств на единицу площади всех имеющихся дорог ведут к неизбежному возникновению больших скоплений машин на тех или иных элементах дорожно-транспортной сети (перекрестки и дороги), т.е. к возникновению заторов (пробок). Основное количество всех исследований транспортного трафика, его анализ и разработка моделей управления направлены на решение этой проблемы на локальном уровне, не рассматривая всю транспортную сеть в целом.

Дорожно-транспортная сеть современных мегаполисов имеет очень большую, сложную и разветвленную структуру, которая может быть представлена в виде графа (узлы – перекрестки дорог, а ребра – дороги). При моделировании трафика необходимо учитывать динамику изменения загруженности дорог (суточное изменение интенсивности потоков) и тот факт, что все элементы графа транспортной сети (узлы и ребра) обладают разными характеристиками (пропускная способность).

Если пойти по пути создания подробной модели графа транспортной сети с подробным описанием атрибутов его элементов (число полос на дорогах, их протяженность, число направлений на перекрестках и т.д.), что требуется для их локального управления, то такая модель будет чрезвычайно сложной и трудно реализуемой для практических целей.

На наш взгляд, более приемлемым является создание перколяционной модели транспортной сети, на основании которой можно обеспечить работоспособность всей структуры в целом, несмотря на то, что её отдельные элементы могут быть заблокированы вследствие образования пробок. В данном случае под обеспечением работоспособности и надежности мы будем понимать, что между двумя любыми произвольными узлами сети имеется хотя бы один свободный путь из незаблокированных элементов графа.

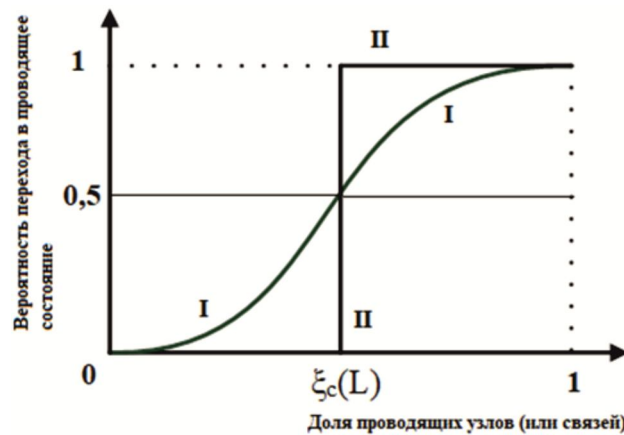
Перколяционные свойства сетевых транспортных структур Методы теории перколяции

В теории перколяции (теория вероятности на графах) изучают решение задачи узлов и задачи связей [15-18] для сетей с различной, как регулярной, так и случайной, структурой. Использование понятия долей заблокированных узлов или связей является эквивалентным понятию вероятности нахождения случайно выбранного узла (или связи) в заблокированном состоянии. Поэтому можно принять, что величина порога перколяции определяет вероятность прохождения через всю сеть в целом, если заблокирована (исключена) некоторая часть её узлов (или связей), т.е. задана средняя вероятность блокирования единичного узла (или связи).

Достижение порога перколяции в сети соответствует кластеру, в котором есть связи между любыми его произвольными узлами. Образовывается так называемый бесконечный или стягивающий проводящий кластер.

Для структур конечного размера проводимость может возникать при разной доле проводящих узлов (или связей, см. рисунок 1). Однако если размер сети L устремить к бесконечности, то область перехода в проводящее состояние становится компактной (см. рисунок 1, кривая I для структуры небольшого размера, II – бесконечная сеть).

Для структур конечного размера величину порога перколяции $\xi_c(L)$ можно определять по заданному значению вероятности перехода сети в проводящее состояние. На рисунке 1 эта вероятность выбрана равной 0,5 (50 %). Однако можно взять, например, значение 0,95 или 0,99 (тогда порог перколяции будет соответствовать заданному критерию надежности работы сети), т.е. можно определять, при какой доле заблокированных узлов и/или связей сеть в целом потеряет необходимый уровень работоспособности.



**Рисунок 1 – Вероятность возникновения перколяции
в зависимости от величины доли проводящих узлов (или связей)**
**Figure 1 – Percolation probability depending
on proportion size of conducting nodes (or connections)**

При заданном значении надежности работы (вероятность перехода или нахождения в проводящем состоянии) можно определить долю узлов (или связей) которые находятся в не-блокированном состоянии.

Доля заблокированных узлов (или связей), при которой исчезает проводимость сети [которую можно рассчитать по формуле: единица минус доля проводящих узлов (или связей)], задает блокирование всей сети в целом, значение которой можно связать с макрохарактеристиками трафика в транспортной системе в данный момент времени. В простейшем случае можно дать следующую оценку. Принятый уровень интенсивности беззаторового движения (обозначим его как q_{max}) для городов Европы составляет 600 – 900, в США – до 1300 автомобилей на полосу в час, в городах России этот показатель составляет 300 – 700 автомобилей на полосу в час. Соответственно, зная общую протяженность дорог мегаполиса и количество полос на них, а также динамику суточной численности транспортных средств, можно рассчитать на основе этих данных средний для всей сети уровень интенсивности движения в любой момент времени (обозначим его как $q(t)$). Тогда средняя вероятность ($P(t)$) блокирования элемента сети в момент времени t может быть определена следующим образом:

$$P(t) = \begin{cases} \frac{q(t)}{q_{max}}, & q(t) \leq q_{max}; \\ 1, & q(t) > q_{max}. \end{cases}$$

Далее, используя полученную оценку вероятности блокирования элемента сети, можно определить в данный момент времени t состояние её надежности и работоспособности в целом, а также проанализировать суточную динамику их изменений и при необходимости изменить структуру (например, плотность связей) транспортной системы необходимым образом (то, как надежность работы транспортной сети связана, например, с плотностью её связей, мы обсудим в статье ниже).

Для точных оценок средней вероятности блокирования могут быть использованы различные макроскопические математические модели транспортных потоков (модели Гриншилдса, Ричардса, Гриндберга, Эль Хозаини, Андервуда, Дрэйка, Пайпса, оптимальной скорости, «умного» водителя, следования за лидером, клеточные автоматы и другие).

Основной проблемой при исследовании перколяционных свойств сетевых структур, имеющих случайное строение, является то, что в настоящее время для этого не существует общих аналитических методов и их изучение возможно в основном только с привлечением методов компьютерного моделирования. Для изучения перколяционных свойств планарных сетевых структур, имеющих случайное строение, сначала необходимо построить их топологический граф, что само по себе является достаточно трудной задачей.

Алгоритм построения планарных сетей, имеющих случайное строение

Для построения планарной сети со случайным числом связей для каждого узла (плотностью сети) можно использовать следующий алгоритм [19]:

1. Задаем общее количество узлов N и количество связей E .
2. Генерируем список S , состоящий из N узлов со случайными координатами (x, y) .
3. Выбираем узел n_0 с наименьшими координатами по x , если их несколько, то с наибольшей координатой y .
4. Сортируем список узлов S по возрастанию расстояния L от узла n_0 :

$$L = \sqrt{(n_{0x} - n_{ix})^2 + (n_{0y} - n_{iy})^2}.$$

5. Объединяем первые три узла n_0, n_1, n_2 из списка S в первый треугольник, добавляя ребра. Совершая обход по часовой стрелке, начиная с ребра между первым и вторым узлом в списке, добавляем ребра треугольника в циклический список H .

6. Последовательно обрабатываем все узлы из списка S .

а) Берем первый необработанный узел n_i .

б) В списке H берем последнее ребро V , узлы которого n_a и n_b вместе с n_i будут образовывать левый поворот, то есть выполняется следующее условие: $(n_{ix} - n_{ax}) * (n_{by} - n_{ay}) - (n_{iy} - n_{ay}) * (n_{bx} - n_{ax}) > 0$.

в) Среди ребер H находим первое ребро V_L не удовлетворяющее условию левого поворота (находящиеся перед ребром V , левее него).

г) Среди ребер H находим первое ребро V_R не удовлетворяющее условию левого поворота (находящиеся после ребра V , правее него).

д) Последовательно обрабатываем ребра, находящиеся в списке H между V_L и V_R . Каждое из этих ребер вместе с узлом n_i образует новый треугольник добавлением новых ребер между ними.

е) Удаляем из списка H все ребра между V_L и V_R .

ж) Из первого добавленного треугольника берем ребро между n_i и точкой ребра, отсутствующей в следующем обработанном треугольнике, которое добавляем в список H .

з) Из последнего добавленного треугольника берем ребро между n_i и точкой ребра, отсутствующей в предыдущем обработанном треугольнике, которое добавляем в список H .

7. Удаляем из текущего графа ребра, пока их количество не станет равно E . Ребра выбираем случайно, но удаляем их только в том случае, если между узлами этого ребра остается путь и без него.

Отдельно рассмотрим сортировку вершин по часовой стрелке:

1. Находим центр многоугольника: $\bar{R} = \frac{\sum \bar{r}_i}{i}$.

2. Смещаем все вершины так, чтобы центр был в начале координатных осей.

3. Берем точку отсчета [например, радиус – вектор $OA = (0, 1)$].

4. Находим углы между векторами от центра до каждой вершины и OA [приводим углы к диапазону $(0, 360)$].

5. Сортируем углы по возрастанию и получаем необходимый нам поворот по часовой стрелке.

Алгоритм расчета порогов перколяции сетей

Использованный нами алгоритм определения порога перколяции сетей состоит из следующих шагов [19]:

1. Выбираем случайно два узла сети A и B с учетом ограничения, что между ними должен быть хотя бы один промежуточный узел.

2. Задаем величину вероятности блокирования единичного узла (для задачи узлов) или связи (для задачи связей) и случайным образом блокируем долю узлов сети (или связей), равную данной вероятности.

3. Проверяем наличие в сети хотя бы одного «свободного» пути (путь из неисключённых узлов или связей) от узла A до узла B . Если свободного пути нет (число «свободных» путей равно 0), записываем 0. В противном случае записываем 1.

4. Увеличиваем значение величины вероятности блокирования единичного узла (для задачи узлов) или связи (для задачи связей) на некоторую величину. Затем случайным образом блокируем долю узлов сети (или связей), равную заданной величине вероятности. Далее определяем, какие конкретно узлы сети оказались исключёнными.

5. Возвращаемся к шагу 3, пока не будут перебраны все узлы сети.

6. Возвращаемся к пункту 2, и выполняем пункты 3-5 Q раз (например, делаем несколько сотен повторений). От первого и до последнего шагов (в случаях, когда вся сеть оказывается блокированной), по всем экспериментам. Находим число реализаций, при которых был найден хотя бы один «свободный» путь (назовем это число ξ). Например, на $h = 18$ шаге в 8, 12, 19, 56, 58, 76, 80 и 89 экспериментах из Q был хотя бы один «свободный» путь, тогда число $\xi(5) = 18$ (8 – суммарное число «свободных» путей). Находим для каждого шага величину $\bar{\rho}(h) = \xi(h) / Q$, где h – номер шага. Вычисляем средний размер кластеров исключённых узлов, количество таких кластеров и подобные параметры (по всем N экспериментам на каждом из шагов). Средний размер кластера можно определить как отношение суммы всех средних значений, полученных на данном шаге кластеризации (по всем Q экспериментам), к общему числу экспериментов Q . Для пояснения рассмотрим пример. Пусть на $h = 6$ шаге в 1-м эксперименте было получено 4 кластера, имеющих размер по 15 узлов, во 2-м 3 кластера, в 3-м 2 и т.д., в 100-м – 20. Тогда среднее число кластеров, имеющих размер 10 блокированных узлов, будет равно: $(4 + 3 + 2 + \dots + 5) / 100$.

7. Далее возвращаемся к выполнению пункта 1, и повторяем выполнение шагов 2-6 ещё W раз. Для каждого из W опытов находим величину $\bar{p}_w(h) = \xi(h) / Q$. Индекс w определяет какое из W испытаний мы рассматриваем.

8. После окончания моделирования для каждого из h шагов находим величину $\langle \bar{\rho}(h) \rangle = \sum_{w=1}^{W=100} \bar{p}_w(h) / W$ – среднее значение величины вероятности прохождения через сеть в целом по неблокированным узлам (или связям для задачи блокирования связей) на каждом из шагов (с учетом различных возможных конфигураций путей).

Выполнение расчетов с использованием данного алгоритма позволяет получить массив данных для расчета зависимости величины среднего значения вероятности прохождения через сеть в целом $\langle \bar{\rho}(h) \rangle$ от доли блокированных узлов сети (или доли блокированных связей для задачи блокирования связей) при различном среднем числе связей, приходящихся на один узел (топологической плотности сети).

Определение зависимости порогов перколяции сетей от их плотности (среднего числа связей в расчете на один узел)

Отметим, что величины порогов перколяции планарных сетей с разной плотностью для задачи блокирования узлов были определены нами ранее в работах [20-22], где для проведения численного моделирования были использованы сети, состоящие из 100000 узлов. Для проведения численных экспериментов при решении задачи связей нами были использованы сети, имеющие 5000 узлов, такая оптимизация была связана с необходимостью задействовать значительные вычислительные мощности для решения задачи.

В качестве уровня определения порога перколяции сетевых структур было выбрано значение вероятности перехода сети в проводящее состояние, равное 0,5 (см. рисунок 1). Однако ещё раз отметим, что можно взять, например, другое значение вероятности перехода 0,95

или 0,99 (тогда порог перколяции будет задавать критерий надежности работы сети), т.е. можно определять, при какой доле заблокированных узлов и/или связей сеть в целом потеряет необходимый проектируемый уровень работоспособности.

Важно отметить, что для плоского графа среднее число связей, приходящихся на один узел (плотность сети), не может превышать значение 6. Это является следствием теоремы Эйлера [23], согласно которой для связного плоского графа должно выполняться равенство: $V - E + F = 2$, где V – число вершин в графе, E – число ребер, F – число областей, на которые граф делит плоскость.

На рисунке 2 представлены зависимости величин порогов перколяции планарных сетей от среднего числа связей, приходящихся на один узел выбранной сети (в задаче блокирования узлов [19] и в задаче блокирования связей).

Для выявления влияния плотности сетевых структур на величину их порогов перколяции необходимо проанализировать данные, представленные на рисунке 2, и получить функциональную зависимость, которая может описать влияние плотности сетей на величину порога перколяции. Это позволит, определив плотность связей реальных транспортных сетей, оценить величину порога перколяции и тем самым сделать вывод о надежности структуры сети, т.е. при какой доле заблокированных узлов и/или связей сеть в целом потеряет необходимый уровень работоспособности.

Полученные результаты можно будет использовать при строительстве транспортных сетей или их реконструкции с целью повышения пропускной способности и работоспособности.

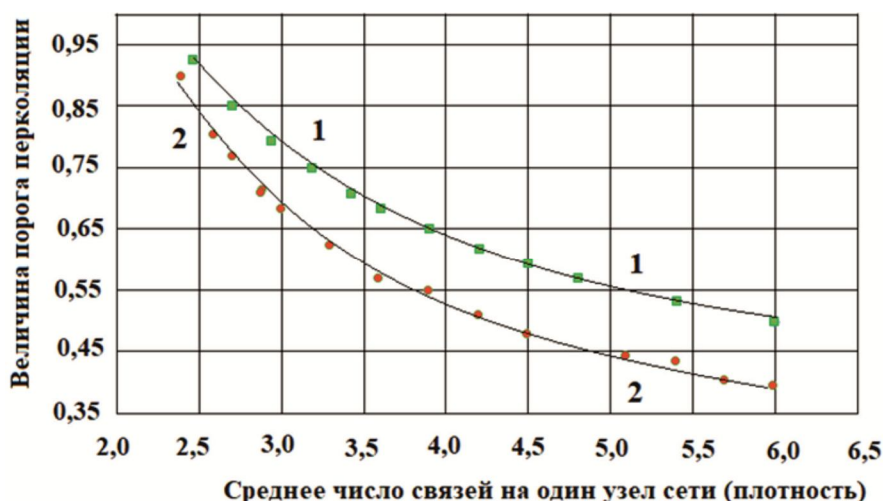


Рисунок 2 – Зависимость величин порогов перколяции планарных случайных сетей, от их плотности (кривая 1 – для задачи узлов, кривая 2 – для задачи связей)
Figure 2 – Value dependencies of percolation thresholds of planar random networks from their densities (curve 1-for node problem, curve 2-for connection problem)

В работах [24-26] на основе представлений Шкловского и де Жена о топологической структуре соединяющего кластера («скелет и мёртвые» концы) была получена функция условной вероятности протекания (перколяции) в решётки $Y(\xi, L)$, имеющая вид:

$$Y(\xi, L) = \frac{1}{1 + e^{-S(\xi, L)}}, \quad (1)$$

где $S(\xi, L) = \sum_i a_i (\xi^i - \xi_c^i(L))$ – многочлен степени i , a_i – его коэффициенты, ξ – доля заблокированных узлов, $\xi_c(L)$ – доля заблокированных узлов, соответствующая величине порога перколяции, и она зависит от размера сети L .

Многочлен $S(\xi, L)$ степени i может зависеть от топологических свойств сетевой структуры (плотность сети, пространственная симметрия, размерность и т.д.), которые можно задать при феноменологическом подходе описания с помощью коэффициентов a_i .

Основной проблемой при описании перколяции с использованием уравнения (1) является определение степени многочлена i и его коэффициентов. Совместное использование функции (1), а также методов алгебраической геометрии Ходжа [27] и теории подобия Каданова – Вильсона [28, 29] с использованием ренорм-групп (см., например, [15]), позволяет (в некоторых случаях) рассчитать теоретические значения порога перколяции для некоторых регулярных структур [24-26]. В теории Ходжа рассматриваются алгебраические многообразия (многожества, составленные из подмножеств, каждое из которых является множеством решений каких-либо полиномиальных уравнений). Геометрическим представлением алгебраических многообразий являются фигуры, называемые циклами Ходжа. Линейные комбинации таких геометрических фигур называются алгебраическими циклами [30].

Суть нашего подхода заключается в том, что можно отойти от использования методов алгебраической геометрии Ходжа и теории подобия Каданова – Вильсона с использованием ренорм-групп, выразить зависимость многочлена $S(\xi, L)$ степени i от условной вероятности $Y(\xi, L)$ протекания в решётке и определить влияние на эту зависимость топологических факторов. Воспользовавшись формулой (1), мы получаем:

$$\ln Y(\xi, L) = -\ln\{1 + e^{-S(\xi, L)}\},$$

где $S(\xi, L) = \sum_i a_i \{\xi^i - \xi_c^i(L)\}$ – многочлен степени i , a_i – его коэффициенты, ξ – текущее значение доли заблокированных узлов, $\xi_c(L)$ – доля заблокированных узлов, соответствующая величине порога перколяции (она зависит от размера сети L).

С учетом, что вблизи порога перколяции $\xi \approx \xi_c(L)$, величина многочлена $S(\xi, L)$ будет являться небольшой и $e^{-S(\xi, L)}$ можно разложить в ряд, ограничившись двумя его членами. Прделав преобразования, получим:

$$\ln Y(\xi, L) \approx 1 - S(\xi, L) = 1 - \sum_i a_i \{\xi^i - \xi_c^i(L)\} \quad (2)$$

Правая часть уравнения (2) может быть функцией (или функционалом) нескольких переменных, каждая из которых связана с определенным топологическим свойством сети. Например, одним из параметров может быть среднее число x связей (плотность сети).

Описанный подход позволяет проанализировать данные приведенные на рисунке 2, и представить их в виде зависимости натуральных логарифмов величин порогов перколяции $\ln P(x)$ от топологических характеристик, например обратной величины плотности сети ($1/x$) [единица, деленная на среднее число связей, приходящихся на один узел сети (см. рисунок 3)]. Как видно из рисунка 3, полученные зависимости имеют линейный вид и могут быть аппроксимированы линейными уравнениями.

Для планарных структур в задаче узлов зависимость натурального логарифма величины порога перколяции $\ln P(x)$ от обратной величины плотности сети ($1/x$) может быть описана уравнением:

$$\ln P_{node, unreg}(x) = \frac{2,52}{x} - 1,08 \quad (3)$$

с величиной коэффициента корреляции числовых данных и уравнения линейной зависимости, равного 0,99 (см. прямую 1 на рисунке 3);

в задаче связей:

$$\ln P_{bond, unreg}(x) = \frac{3,19}{x} - 1,44 \quad (4)$$

с величиной коэффициента корреляции числовых данных и уравнения линейной зависимости, равного 0,99 (см. прямую 2 на рисунке 3).

Особый интерес представляет сравнение перколяционных свойств случайных и регулярных планарных сетей. В частности, например, транспортная сеть Нью-Йорка или Мехико (как и многих других городов) имеет структуру, близкую к квадратной решетке. Возникает

вопрос, как именно могут различаться между собой пороги блокирования таких сетей при одинаковой плотности связей?



Рисунок 3 – Зависимость натурального логарифма величины порога перколяции ($\ln P(x)$) планарных случайных структур от обратной величины их плотности ($1/x$)
Figure 3 – Natural logarithm dependence of percolation threshold values ($\ln P(x)$) for planar random structures from inverse value of their density ($1/x$)



Рисунок 4 – Геометрическое представление некоторых регулярных сетевых структур
Figure 4 – Geometric representation of some regular network structures

Проиллюстрируем, что зависимости натуральных логарифмов величин порогов перколяции регулярных сетей от обратной плотности связей также очень хорошо описываются линейными уравнениями (см. рисунок 5). Для задачи узлов:

$$\ln P_{\text{node, reg}}(x) = \frac{1,98}{x} - 1,02 \quad (5)$$

с величиной коэффициента корреляции числовых данных и уравнения линейной зависимости, равного 0,99 (см. прямую 1 на рисунке 5);

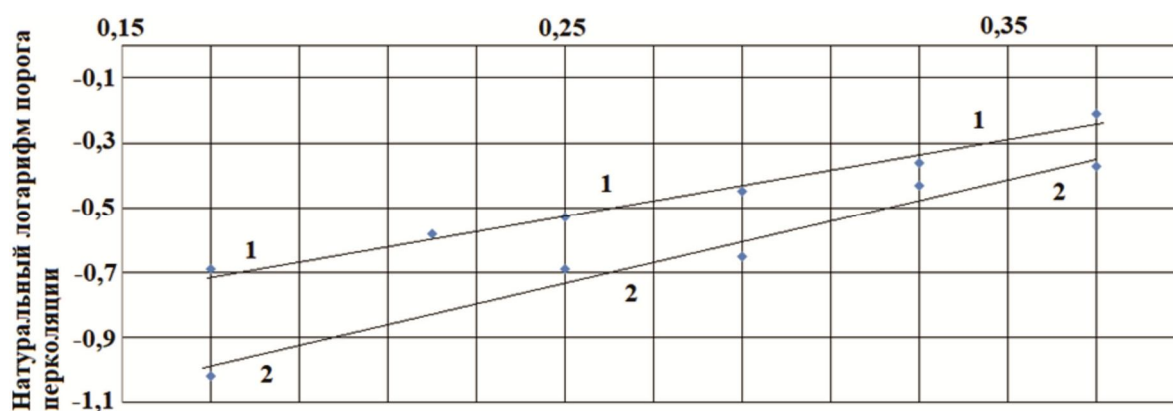


Рисунок 5 – Зависимость натурального логарифма величины порога перколяции ($\ln P(x)$) планарных регулярных структур от обратной величины их плотности ($1/x$)
Figure 5 – Natural logarithm dependence of percolation threshold value ($\ln P(x)$) for planar regular structures from inverse value of their density ($1/x$)

для задачи связей:

$$\ln P_{bond, reg}(x) = \frac{3,29}{x} - 1,56 \quad (6)$$

с величиной коэффициента корреляции числовых данных и уравнения линейной зависимости, равного 0,97 (см. прямую 2 на рисунке 5).

Анализ полученных результатов показывает, что проводимость любых планарных сетей при одинаковых плотностях их связей оказывается выше в задаче блокирования связей по сравнению с задачей блокирования узлов. Порог перколяции (доля проводящих узлов или связей, при которой возникает проводимость) в задаче связей меньше, чем в задаче узлов.

Обсуждение полученных результатов

Сравнение данных, рассчитанных с использованием уравнений (3) и (4), с данными, которые рассчитаны с использованием уравнений (5) и (6) (с учетом погрешности при определении плотности транспортных сетей и численном моделировании), позволяет сделать ряд выводов:

1. Транспортные дорожные сети многих городов мира имеют структуру, более близкую к случайным, а не к регулярным планарным сетям.

2. Увеличение плотности сетей приводит к увеличению порога их блокирования.

В настоящее время для увеличения пропускной способности часто используется строительство эстакад и многоуровневых развязок. С точки зрения топологии сетей это является изменением их планарности. Ранее в работе [20] нами были изучены перколяционные свойства не планарных случайных сетей и для порога проводимости в задаче узлов было получено уравнение:

$$\ln P_{node, unreg}^{st}(x) = \frac{4,39}{x} - 2,41, \quad (7)$$

где $P_{node, unreg}^{st}(x)$ – величина порога перколяции, x – плотность сети.

Взяв в качестве примера плотность сети, равную 2,65 (среднее значение по смоделированным нами данным), для величины порога перколяции случайной не планарной сети получим значение 0,47. Следовательно, потеря проводимости такой структуры наступает в тот момент, когда доля заблокированных узлов становится больше 0,53. Таким образом, создание большого числа не планарных развязок и эстакад в транспортной сети может значительно повысить ее пропускную способность, однако это связано с существенными затратами на капитальное строительство.

Рассмотрим изменение топологии сети за счет появления многоуровневых развязок и эстакад и её влияние на потерю работоспособности при блокировании связей. Также в работе [20] для порога проводимости в задаче связей было получено уравнение:

$$\ln P_{bond, unreg}^{st}(x) = -\frac{6,58}{x} - 0,20 \quad (8)$$

где $P_{bond, unreg}^{st}(x)$ – величина порога перколяции, x – плотность сети.

В качестве примера возьмем сеть с плотностью, равной 2,65, и, для величины порога перколяции случайной не планарной сети получим 0,07. Следовательно, потеря проводимости такой структуры наступает, когда доля заблокированных связей становится больше 0,93. Таким образом, создание большого числа не планарных развязок и эстакад в транспортной сети и при блокировании связей также может существенно повысить ее пропускную способность.

Заключение и выводы

Для изучения надежности работы и отказоустойчивости транспортных сетей можно использовать методы теории перколяции. С таким подходом любая транспортная структура может быть представлена в виде планарного или почти планарного графа, в котором имеется

небольшая доля связей, не лежащих в одной плоскости (в реальной транспортной сети это связано с наличием эстакад и многоуровневых развязок).

В теории перколяции можно рассматривать решение задачи блокирования узлов и задачи блокирования связей для сетей с различной структурой. При решении задачи связей определяют их долю, которую нужно разорвать, чтобы сеть распалась минимум на две несвязанные области (или наоборот, долю проводящих связей, когда проводимость возникает). В задаче узлов определяют долю заблокированных узлов, при которой происходит распад сети на несвязанные области (или наоборот, долю проводящих узлов, когда проводимость возникает). Доля незаблокированных узлов (в задаче узлов) или неразорванных связей (в задаче связей), при которой возникает проводимость между двумя произвольно выбранными узлами сети, называется порогом перколяции (протекания). Для одной и той же структуры величины порогов перколяции при решении задачи связей и задачи узлов имеют разное значение. Величина порога перколяции зависит от среднего числа связей, приходящихся на один узел сети (плотности), и является критерием надежности её работы, т.е. определяет, при какой доле заблокированных узлов и/или связей сеть в целом потеряет необходимый уровень работоспособности.

Реальные транспортные сети имеют топологию, более близкую к случайным сетям, чем к регулярным, порог блокирования которых в целом выше, чем случайных планарных сетей. При одинаковой плотности сетей случайная планарная сеть (по возможности потери работоспособности) немного уступает регулярным структурам.

Зная общую протяженность дорог мегаполиса и количество полос на них, а также динамику суточной численности транспортных средств, можно рассчитать уровень интенсивности движения. А затем на его основе определить среднюю вероятность блокирования элемента сети в любой момент времени. Таким образом можно оценить состояние её надежности и работоспособности, а также проанализировать суточную динамику изменений и при необходимости - изменить структуру транспортной системы города.

Увеличение плотности связей транспортных сетей повышает их надежность и пропускную способность. Кроме того, для увеличения пропускной способности можно использовать строительство эстакад и многоуровневых развязок. С точки зрения топологии сетей это является изменением их планарности. Случайные не планарные сети имеют при одинаковой с планарными сетями плотности связей более высокие значения порогов блокирования. Создание небольшого числа не планарных развязок и эстакад в транспортной сети может существенно повышать пропускную способность.

Результаты, изложенные в данной статье, получены в рамках программы отбора научных проектов, выполняемых коллективами научных лабораторий, согласно письму Минобрнауки России от 3 июля 2019 года № МН-1037/АМ. Проект 2019-1393 «Разработка новых моделей анализа и прогнозирования динамики стохастических процессов в сложных системах, с учетом их самоорганизации и наличия памяти».

Библиографический список

1. **Briani M., Cristiani E.** An easy-to-use algorithm for simulating traffic flow on networks: Theoretical study, *Networks and Heterogeneous Media (NHM)*, vol. 9 no. 3, 2014, pp. 519-552.
2. **Hui M., Bai L., Li Y., Wu Q.** Highway Traffic Flow Nonlinear Character Analysis and Prediction, *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, pp. 20-27.
3. **Ahn G.-H., Ki Y.-K., Kim E.-J.** Real-time estimation of travel speed using urban traffic information system and filtering algorithm, *IET Intelligent Transport Systems*, 2014, no. 145, Edition 8, pp. 89-95.
4. **Poole A., Kotsialos A.** Swarm intelligence algorithms for macroscopic traffic flow model validation with automatic assignment of fundamental diagrams, *School of Engineering and Computing Sciences*, Durham University, 2015.
5. **Guo J., Chen F., Xu C.** Traffic Flow Forecasting for Road Tunnel Using PSO-GPR Algorithm with Combined Kernel Function, *Mathematical Problems in Engineering*, 2017, no. 2017, pp. 125-135.
6. **Jiang R., Jin C., Zhang H.** Experimental and empirical investigations of traffic flow instability, 2017.

7. **Danchuk V., Bakulich O., Svatko V.** An Improvement in ant Algorithm Method for Optimizing a Transport Route with Regard to Traffic Flow, 2017, *Procedia Engineering*, no. 187, pp. 425-434.
8. **Pun L. S. C., Albert C., Chan W. F.** Optimal route computation for circular public transport routes with differential fare structure, *Travel Behaviour and Society*, 2016, no. 3, pp. 71-77.
9. **Барановская Т. П., Павлов Д. А.** Моделирование крупномасштабных транспортных сетей с применением методов многокритериальной оптимизации и учетом структурной динамики // Политематический сетевой электронный научный журнал кубанского государственного аграрного университета, 2016, № 120, с. 1686-1705.
10. **Павленко П. Ф.** Применение экспертной системы и модуля управления на основе нечеткой логики в адаптивном управлении транспортными потоками // Институт автоматики и информационных технологий НАН КР, 2014, № 2 (27), с. 92-97.
11. **Трубицын В. А., Голуб Д. И.** Управление транспортными потоками на основе соотношений мощностей транспортного потока и дороги. // Вестник Северокавказского федерального университета, 2013, № 2 (35), с. 89-92.
12. **Власов А. А., Чушкина Ж. А.** Управление насыщенными транспортными потоками // Региональная архитектура и строительство, 2014, № 4, с. 152-156.
13. **Зырянов В. В.** Особенности применения основной диаграммы транспортного потока на сетевом уровне, Энерго- и ресурсосбережение: промышленность и транспорт, 2013, № 21 (124), с. 71-74.
14. **Филиппова Д. М., Черняго А. Б., Слободчикова Н. А.** Распределение интервалов в транспортном потоке при организации координированного управления движением // Вестник Иркутского государственного технического университета, 2013, № 9 (80), с. 172-176.
15. **Grimmet G.** Percolation. – Berlin: Springer-Verlag, – 1989 (2nd ed., 1999).
16. **Sahimi M.** Applications of Percolation Theory. – London: Tailor & Francis, – 1992.
17. **Stauffer D., Aharony A.** Introduction to Percolation Theory. – London: Tailor & Francis, – 1992.
18. **Feder J.** Fractals. – Plenum Press, New York, London, – 1988.
19. **Zhukov D. O., Andrianova E. G., Lesko S. A.** The Influence of a Network's Spatial Symmetry, Topological Dimension, and Density on its Percolation Threshold. *Symmetry*, 2019, vol. 11, 920 p.
20. **Dmitry Zhukov, Tatiana Khvatova, Sergey Lesko, Anastasia Zaltsman.** Managing social networks: applying the Percolation theory methodology to understand individuals' attitudes and moods. *Technological Forecasting and Social Change*, vol. 123, pp. 234-245.
21. **Жуков Д. О., Хватова Т. Ю., Лесько С. А., Зальцман А. Д.** Влияние плотности связей на кластеризацию и порог перколяции при распространении информации в социальных сетях // Информатика и её применения, 12:2 (2018), с. 90-97.
22. **Khvatova T. Yu., Zaltsman A. D., Zhukov D. O.** Information processes in social networks: Percolation and stochastic dynamics. *CEUR Workshop Proceedings 2nd International Scientific Conference «Convergent Cognitive Information Technologies»*, Convergent 2017; vol. 2064, 2017, pp. 277-288.
23. **Trudeau Richard J.** Introduction to Graph Theory (Corrected, enlarged republication. ed.). 1993, New York: Dover Pub. 64 p.
24. **Галлямов С. Р.** Порог протекания простой кубической решетки в задаче узлов в модели решетки Бете // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2008, № 3, с. 109-115.
25. **Галлямов С. Р., Мельчуков С. А.** Об одном методе расчёта порогов протекания квадратной и алмазной решеток в перколяционной задаче узлов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2009, № 4, с. 33-44.
26. **Галлямов С. Р., Мельчуков С. А.** Идея Ходжа в перколяции: оценка порога протекания по элементарной ячейке // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2011, № 4, с. 60-79.
27. **Hodge W. V. D.** The theory and applications of harmonic integrals. – Cambridge, – 1952.
28. **Kadanoff L. P., Jotze W., Hamblen D., Hecht R., Lewis E. A. S, Palciauskas V. V., Rayl M., Swift J., Aspres D., Kane J.** Static Phenomena Near Critical Points: Theory and Experiment. *Rev. Mod. Phys.* 1967, vol. 39. no. 2, pp. 395-431
29. **Wilson K. G.** Renormalization group and critical phenomena. *Phys. Rev. B.* 1971, vol. 4, no. 9, pp. 3174-3183.
30. **Krasnov V. A.** Algebraic cycles on a real algebraic GM-manifold and their applications. *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics.* 1994, vol. 43, no. 1, pp. 141-160.

UDC 004.052.34

INFLUENCE OF TRANSPORT NETWORK CONNECTIONS DENSITY ON THEIR CONDUCTIVITY WHEN BLOCKING NODES AND COMMUNICATIONS

A. S. Alyoshkin, Ph.D (Tech.), assistant professor of KB-8 «Information Confrontation» department, RTU MIREA, Moscow, Russia;

orcid.org/0000-0003-2190-700X, e-mail: antony@testor.ru

D. O. Zhukov, Dr. Sc. (Tech.), Department of KB-8 «Information Confrontation», RTU MIREA, Moscow, Russia;

orcid.org/0000-0002-1211-5214, e-mail: zhukovdm@yandex.ru

S. A. Lesko, Ph.D (Tech.), associate professor of the KB-3 department «Control and Modeling of Systems» RTU MIREA, Moscow, Russia;

orcid.org/0000-0002-6641-1609, e-mail: sergey@testor.ru

The aim of the work is to demonstrate the study of reliability and fault tolerance in the operation of transport networks using methods and approaches of percolation theory. Ground transportation infrastructure can be represented as a planar or almost planar graph. For a real transport network, almost planarity will be associated with the presence of overpasses and multi-level interchanges. In the theory of percolation, we consider the solution of problems to find the shares of blocked nodes and blocked connections, in which they break up into unrelated areas, that is, they lose the property of transmitting road traffic. The fraction of non-blocked nodes (in a node problem) or unbroken bonds (in a connection problem), where conductivity arises between two arbitrarily selected network nodes, is called percolation (flow) threshold. A percolation threshold value depends on the average number of connections per network node (density), and is a criterion for reliable operation. Real transport networks have a topology closer to random networks than regular structures. Blocking threshold for regular networks is generally higher than for planar networks constructed at random. With the same network density, a random planar network (if possible loss of performance) is only slightly inferior to regular structures. An increase in the density of transport networks communications increases their reliability and throughput. Using the map of city transport network, you can determine an average number of connections per node of such a network, and then calculate blocking threshold. Similar calculations can be used in design and modernization of road infrastructure in order to calculate the required number of additional links.

Key words: transport network, network link density, network percolation threshold, increased reliability, increased throughput.

DOI: 10.21667/1995-4565-2019-70-76-90

References

1. **Briani M., Cristiani E.** An easy-to-use algorithm for simulating traffic flow on networks: Theoretical study. *Networks and Heterogeneous Media (NHM)*, vol. 9 no. 3, 2014, pp. 519-552.
2. **Hui M., Bai L., Li Y., Wu Q.** Highway Traffic Flow Nonlinear Character Analysis and Prediction, *Mathematical Problems in Engineering*, 2015, pp. 20-27.
3. **Ahn, G.-H., Ki, Y.-K., Kim, E.-J.** Real-time estimation of travel speed using urban traffic information system and filtering algorithm. *IET Intelligent Transport Systems*, 2014, no. 145, Edition 8, pp. 89-95.
4. **Poole A., Kotsialos A.** Swarm intelligence algorithms for macroscopic traffic flow model validation with automatic assignment of fundamental diagrams. *School of Engineering and Computing Sciences, Durham University*, 2015.
5. **Guo J., Chen F., Xu C.** Traffic Flow Forecasting for Road Tunnel Using PSO-GPR Algorithm with Combined Kernel Function. *Mathematical Problems in Engineering*, 2017, no. 2017, pp. 125-135.
6. **Jiang R., Jin C., Zhang H.** *Experimental and empirical investigations of traffic flow instability*. 2017.
7. **Danchuk V., Bakulich O., Svatko V.** An Improvement in ant Algorithm Method for Optimizing a Transport Route with Regard to Traffic Flow. *Procedia Engineering*. 2017, no. 187, pp. 425-434.
8. **Pun L. S. C., Albert C., Chan W. F.** Optimal route computation for circular public transport routes with differential fare structure. *Travel Behaviour and Society*. 2016, no. 3, pp. 71-77.

9. **Baranovskaya T. P., Pavlov D. A.** Modelirovanie krupnomasshtabnyh transportnyh setej s primeneniem metodov mnogokriterial'noj optimizacii i uchetom strukturnoj dinamiki. *Politematicheskij setevoy elektronnyj nauchnyj zhurnal kubanskogo gosudarstvennogo agrarnogo universiteta*. 2016, no. 120, pp. 1686-1705. (in Russian).
10. **Pavlenko P. F.** Primenenie ekspertnoj sistemy i modulya upravleniya na osnove nechetkoj logiki v adaptivnom upravlenii transportnymi potokami. *Institut avtomatiki i informacionnyh tekhnologij NAN KR*. 2014, no 2 (27), pp. 92-97. (in Russian).
11. **Trubicyn V. A., Golub D. I.** Upravlenie transportnymi potokami na osnove sootnoshenij moshchnostej transportnogo potoka i dorogi. *Vestnik Severokavkazskogo federal'nogo universiteta*. 2013, no. 2 (35), pp. 89-92. (in Russian).
12. **Vlasov A. A., Chushkina Zh. A.** Upravlenie nasyshchennymi transportnymi potokami. *Regional'naya arhitektura i stroitel'stvo*. 2014, no. 4, pp. 152-156. (in Russian).
13. **Zyryanov V. V.** Osobennosti primeneniya osnovnoj diagrammy transportnogo potoka na setevom urovne. *Energo- i resursosberezhenie: promyshlennost' i transport*. 2013, no. 21 (124), pp. 71-74. (in Russian).
14. **Filippova D. M., Chernyago A. B., Slobodchikova N. A.** Raspredelenie intervalov v transportnom potoke pri organizacii koordinirovannogo upravleniya dvizheniem. *Vestnik Irkutskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. 2013, no. 9 (80), pp. 172-176. (in Russian).
15. **Grimmet G.** *Percolation*. Berlin: Springer-Verlag, 1989 (2nd ed., 1999).
16. **Sahimi M.** *Applications of Percolation Theory*. London: Taylor & Francis, 1992.
17. **Stauffer D., Aharony A.** *Introduction to Percolation Theory*. London: Taylor & Francis, 1992.
18. **Feder J.** *Fractals*. Plenum Press, New York, London, 1988.
19. **Zhukov D. O., Andrianova E. G., Lesko S. A.** *The Influence of a Network's Spatial Symmetry, Topological Dimension, and Density on its Percolation Threshold. Symmetry*. 2019, vol. 11, 920 p.
20. **Dmitry Zhukov, Tatiana Khvatova, Sergey Lesko, Anastasia Zaltsman.** Managing social networks: applying the Percolation theory methodology to understand individuals' attitudes and moods. *Technological Forecasting and Social Change*. Vol. 123, pp. 234-245.
21. **Zhukov D. O., Hvatova T. Yu., Les'ko S. A., Zal'cman A. D.** Vliyanie plotnosti svyazej na klasifizaciyu i porog perkolyacii pri rasprostranenii informacii v social'nyh setyah. *Informaciya i eyo primeniya*. 12:2 (2018), pp. 90-97. (in Russian).
22. **Khvatova T. Yu., Zaltsman A. D., Zhukov D. O.** Information processes in social networks: Percolation and stochastic dynamics. *CEUR Workshop Proceedings 2nd International Scientific Conference «Convergent Cognitive Information Technologies»*, *Convergent*. 2017, vol. 2064, pp. 277-288.
23. **Trudeau Richard J.** *Introduction to Graph Theory* (Corrected, enlarged republication. ed.). 1993, New York: Dover Pub. 64 p.
24. **Gallyamov S. R.** Porog protekaniya prostoj kubicheskoj reshetki v zadache uzlov v modeli reshetki Bete. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki*. 2008, no. 3, pp. 109-115. (in Russian).
25. **Gallyamov S. R., Mel'chukov S. A.** Ob odnom metode raschyota porogov protekaniya kvadratnoj i almaznoj reshetok v perkolyacionnoj zadache uzlov. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki*. 2009, no. 4, pp. 33-44. (in Russian).
26. **Gallyamov S. R., Mel'chukov S. A.** Ideya Hodzha v perkolyacii: ocenka poroga protekaniya po elementarnoj yachejke. *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye nauki*. 2011, no. 4, pp. 60-79. (in Russian).
27. **Hodge W. V. D.** *The theory and applications of harmonic integrals*. Cambridge. 1952.
28. **Kadanoff L. P., Jotze W., Hamblen D., Hecht R., Lewis E. A. S., Palciauskas V. V., Rayl M., Swift J., Aspres D., Kane J.** Static Phenomena Near Critical Points: Theory and Experiment. *Rev. Mod. Phys.* 1967, vol. 39, no. 2, pp. 395-431
29. **Wilson K. G.** Renormalization group and critical phenomena. *Phys. Rev. B*. 1971, vol. 4, no. 9, pp. 3174-3183.
30. **Krasnov V. A.** Algebraic cycles on a real algebraic GM-manifold and their applications. *Russian Academy of Sciences. Izvestiya Mathematics*. 1994, vol. 43, no. 1, pp. 141-160.