

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 004.925.86

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ КОМПОЗИЦИИ АЛГОРИТМОВ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФРАКТАЛЬНЫХ СТРУКТУР

К. А. Майков, д.т.н., профессор кафедры «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии» МГТУ им. Н.Э.Баумана, Москва, Россия;

orcid.org/0000-0003-1864-2397, e-mail: maikov@bmstu.ru

А. Н. Пылькин, д.т.н., профессор кафедры ВПМ РГРТУ, Рязань, Россия;

orcid.org/0000-0001-9925-2870, e-mail: pylkin.a.n@rsreu.ru

С. Н. Кузьменко, к.ф.м.н., доцент кафедры математики, физики и информатики ФГБОУ ВО «КГМТУ», Керчь, Россия;

orcid.org/0000-0002-1039-1274, e-mail: ksn1160@mail.ru

А. А. Теплов, аспирант кафедры «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии» МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия;

orcid.org/0000-0002-1785-6089, e-mail: teploff.aa@gmail.com

Анализ методов построения известных геометрических фракталов позволил выявить алгебраические особенности композиции фрактальных алгоритмов, основным понятием которых являются фрактальные операторы f_i , формализующие базовые операции построения фракталов определенного типа. Для геометрических фракталов результатом применения операторов является структура с изломами треугольной, квадратной, трапециевидальной и т.п. форм. Для операторов вводятся операции умножения и сложения, а также понятие единичного, нулевого и обратного оператора, что позволяет дать определение периодическим и квазипериодическим фрактальным структурам. При бесконечно большом числе сомножителей – базисных операторов, в произведении можно получить предельное обобщение понятия фрактала, как структуры без самоподобия, но с закономерно уменьшающимся масштабом. Фрактальные операторы f_i обладают сложными коммутационными свойствами. Придание стохастического характера базисным операторам f_i позволяет вычислять стохастические фракталы, анализировать закономерности их структуры. Для периодических фракталов, а также объединения фракталов вводится средняя или обобщенная размерность. Предложен алгоритм формирования периодических и стохастических фрактальных структур, отличительной особенностью которого является реализация вероятностного выбора базового геометрического примитива на текущем итерационном цикле. Программная реализация предложенного алгоритма подтвердила правомочность алгебраического подхода при изучении и моделировании фракталов со сложной структурой.

Ключевые слова: геометрические фракталы, стохастические фракталы, алгоритмы построения фракталов, алгебра фрактальных операторов.

DOI: 10.21667/1995-4565-2020-71-117-127

Введение

Известны два подхода изучения фракталов: естественно-научный [1, 8] и модельный [1]. При изучении естественных процессов структура фрактала зависит от его природы, определяется экспериментально и в общем случае является стохастической. В этом случае основные фрактальные соотношения для линейных фракталов – число измерений [2]

$$N = C\varepsilon^{-D} \quad (1)$$

и длина фрактальной линии [2, 8]

$$L = C\varepsilon^{1-D} \quad (2)$$

содержат неопределенные множители C , масштаб ε может изменяться плавно в пределах от минимального $\varepsilon_{\min}$ до максимального $\varepsilon_{\max}$ значений, характерных для конкретной задачи [3].

Размерность фракталов D испытывает значительные колебания в зависимости от доступного диапазона масштабов ε . Все это усложняет анализ общих закономерностей при изучении фрактальных структур.

В альтернативном подходе (модельном) при математическом моделировании и программном формировании фракталов вышесказанные недостатки отсутствуют. В частности, фракталы строятся последовательно, в соответствии с заданными алгоритмами. Коэффициент C имеет конкретные значения, а его величиной можно управлять, например, выбором первоначальной длины фрактальной линии. Масштабу ε можно придавать заданные дискретные значения. Размерность регулярных (не стохастических) фракталов D строго определяется на каждом шаге моделирования заданным алгоритмом построения. Как следствие, общие закономерности теории фракталов на таких моделях выявлять проще. А знание общих закономерностей позволяет решать прикладные задачи [4, 5], которые в данном случае могут быть сформулированы как возможность вычислять фрактальные структуры «с заранее заданными свойствами». При вычислении фрактальных структур можно выделить две актуальные задачи: алгоритмическая сложность вычисления и масштабная инвариантность. Одними из широкоиспользуемых методов решения поставленных задач является применение методов L-систем или систем Линденмайера [6]. Предлагаемый в настоящей работе альтернативный подход и концепция L-систем имеют следующие отличительные особенности. В L-системах фрактал вычисляется в каждом цикле «с нуля», а в предлагаемом методе – не с самого начала, а на основе вычисленного кортежа на предыдущем цикле формирования, что позволяет вычислять фракталы динамически и на лету управлять значением масштабной инвариантности, уточняя ее с каждой итерацией. Анализ структуры фракталов в L-системах на практике является трудоемкой задачей из-за громоздкости их символьного представления, которое инкрементируется в каждой итерации. В предлагаемом методе фрактальных операторов представление фрактала значительно сокращается, т.к. все тождественные операции одного цикла заменяются одним символом.

В настоящей работе исследуются алгебраические особенности композиции фрактальных алгоритмов на примере геометрических фракталов. Показано, что использование предложенных закономерностей позволяет эффективно изучать и моделировать фракталы со сложной структурой.

Алгебраические особенности композиции фрактальных алгоритмов

Рассмотрим особенности построения геометрического фрактала на примере «Кривой Коха» [7]. Традиционный алгоритм построения таких фракталов состоит в делении элементарных отрезков на m частей и замене их на n таких отрезков. Построение начинается с отрезка единичной длины и после k циклов формирования получаем фрактал с минимальным масштабом

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{m}\right)^k. \quad (3)$$

Число таких элементов

$$N = n^k, \quad (4)$$

а длина фрактальной линии

$$L = \left(\frac{n}{m}\right)^k. \quad (5)$$

Размерность фрактала выражается как

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N}{\ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)} = \frac{\ln n}{\ln m}. \quad (6)$$

Из соотношений (3-6) алгебраические особенности фрактального алгоритма могут быть выражены следующим образом. Введем понятие фрактального оператора

$$f(m, n, l) = f, \quad (7)$$

который определяется числами m , n и множеством l , на котором действует, т.е. отрезком фрактальной линии в данном цикле его применения. Для геометрических фракталов каждому оператору соответствует геометрический примитив: для линейных фракталов – это ломаная линия с изломами треугольной, квадратной, трапециевидальной и т.п. форм. Применению оператора (7) в k циклах соответствует произведение k таких операторов, что может быть выражено как обобщенный оператор вида

$$F_k = f^k. \quad (8)$$

Определяемый соотношениями (3-8) алгоритм можно представить в следующей обобщенной формулировке. В каждом цикле будем менять одно или оба из чисел m_i и n_i . Как следствие, получим минимальный масштаб

$$\varepsilon = \frac{1}{m_1 m_2 \dots m_k}. \quad (9)$$

Число таких элементов

$$N = n_1 n_2 \dots n_k, \quad (10)$$

и соответствующую длину фрактальной линии

$$L = \frac{n_1 n_2 \dots n_k}{m_1 m_2 \dots m_k}, \quad (11)$$

с обобщенной размерностью

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N}{\ln \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)} = \frac{\ln(n_1 n_2 \dots n_k)}{\ln(m_1 m_2 \dots m_k)}. \quad (12)$$

Обобщенный оператор k циклов в общем случае содержит произведение k различных операторов отдельных циклов

$$F_{ks} = \prod_{i=1}^k f_i = f_1 f_2 \dots f_k. \quad (13)$$

Дополнительный индекс s в операторе (13) характеризует конкретный набор операторов f_i и порядок их следования. При циклическом применении обобщенного оператора (13) z раз получаем z -периодический фрактал, характеризуемый оператором

$$(F_{ks})^z = \left(\prod_{i=1}^k f_i \right)^z = (f_1 f_2 \dots f_k)^z. \quad (14)$$

Таким образом, период фрактала – это минимальная последовательность циклов построения фрактала, характеризуемая одной последовательностью операторов вида (13). Характеристики периодического фрактала, соответствующие (9-12), определяется как

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{m_1 m_2 \dots m_k} \right)^z, \quad (15)$$

$$N = n_1 n_2 \dots n_k, \quad (16)$$

$$L = \left(\frac{n_1 n_2 \dots n_k}{m_1 m_2 \dots m_k} \right)^z, \quad (17)$$

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = \frac{\ln(n_1 n_2 \dots n_k)^z}{\ln(m_1 m_2 \dots m_k)^z} = \frac{\ln(n_1 n_2 \dots n_k)}{\ln(m_1 m_2 \dots m_k)}. \quad (18)$$

В соотношении с (18) видно, что размерность периодического фрактала совпадает с размерностью одного его периода. На рисунке 1 показаны примеры фрактальных линий, сформированных как произведение трех фрактальных операторов $f_1 f_2 f_3$, которым соответствуют базовые геометрические примитивы с треугольным, квадратным и трапециевидальным изломами. Рисунок 1 хорошо иллюстрирует некоммутативность фрактальных операторов, т.е. зависимость их действия от порядка сомножителей. При перестановке операторов в произведении можно получить $3! = 6$ различных фрактальных линий (на рисунках 1, а, в показаны две из них). Следует отметить, что обобщенная размерность (18) при таких перестановках не изменяется. Исследование коммутационных свойств фрактальных операторов представляет самостоятельную задачу и не рассматривается в данной работе.

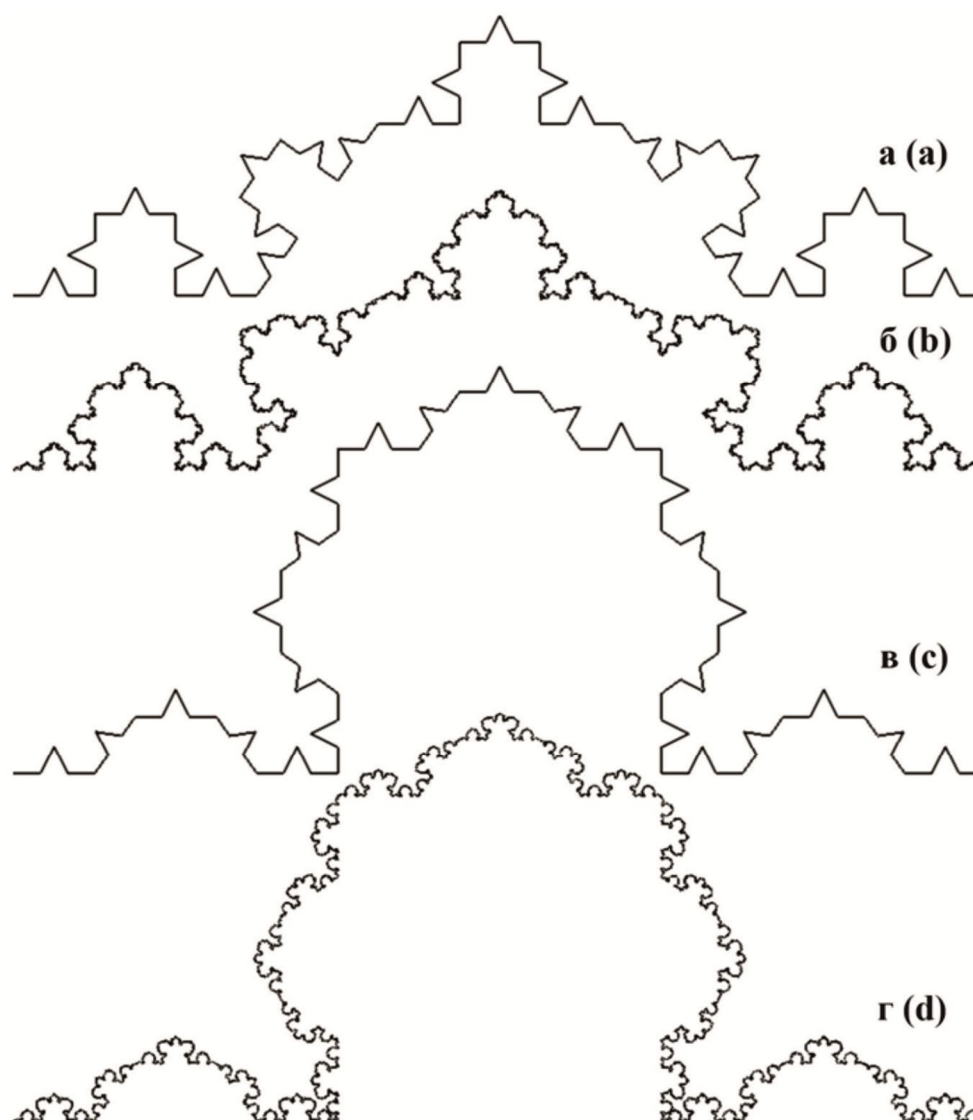


Рисунок 1 – Фрактальные структуры, сформированные на основе различных перестановок произведения трех фрактальных операторов $f_1 f_2 f_3$ (а, в). Периодические фракталы, полученные повторным применением тех же групп операторов (б, г)

Figure 1 – Fractal structures are formed on the basis of the product various permutations of three fractal operators $f_1 f_2 f_3$ (a, c). Periodic fractals obtained by repeated application of the same operator groups (b, d)

Если в произведении (13) число операторов f_i увеличить до бесконечности, то получим объект без самоподобия, но с закономерным изменением масштаба в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$, что представляет предельное обобщение понятия фрактала.

При деформации обобщенных операторов F_{ks} их z -кратные произведения будут генерировать не строго периодические, а квазипериодические фракталы.

Аддитивность длины фрактала позволяет ввести сумму фрактальных и обобщенных фрактальных операторов. При суммировании нескольких фрактальных линий длина полученной линии определяется как

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_r. \quad (19)$$

При применении на каждом участке линии фрактального оператора f_i линии сопоставляется сумма соответствующих операторов

$$F_{rs} = f_1 + f_2 + \dots + f_r. \quad (20)$$

При применении на каждом участке линии обобщенного оператора F_{ks} линии сопоставляется сумма обобщенных операторов

$$F_{ksr} = F_{k1} + F_{k2} + \dots + F_{kr}, \quad (21)$$

где, как и выше, индекс k характеризует число операторов f_i , s – их индивидуальный набор в обобщенных операторах, r – число обобщенных операторов в сумме.

При использовании операторов f_i в (20) на отрезках l_i фрактальной линии соотношение (19) можно представить в виде

$$C\varepsilon_m^{1-D} = C_1\varepsilon_1^{1-D_1} + C_2\varepsilon_2^{1-D_2} + \dots + C_r\varepsilon_r^{1-D_r}, \quad (22)$$

где $\varepsilon_m = \min\{\varepsilon_i\}$ – минимальный масштаб из всех, действующих на участках l_i . Отсюда получаем выражение для обобщенной или средней размерности суммарной фрактальной линии

$$D = \frac{\ln\left(\frac{C_1\varepsilon_1^{1-D_1} + C_2\varepsilon_2^{1-D_2} + \dots + C_r\varepsilon_r^{1-D_r}}{C\varepsilon_m}\right)}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon_m}\right)}. \quad (23)$$

В пределе при $\varepsilon_m \rightarrow 0$ и условии, что основные масштабы ε_i имеют один порядок с ε_m , получаем

$$D = \max\{D_i\}, \quad (24)$$

означающее, что в предельном случае фрактал с максимальной размерностью преобладает над остальными в сумме (19). Анализ размерности для периодических операторов (21) аналогичен и отличается лишь трудоемкостью.

Для полноты описания алгебраических особенностей композиции фрактальных алгоритмов необходимо ввести нулевой и единичный операторы. Произведение нулевого оператора f_0 на любую последовательность операторов равно нулю. Сумма операторов вида (20) не изменяется при включении в нее нулевых операторов. При произведении оператора f_e на операторы вида (13, 14) исключает влияние на результат. В сумме вида (20) действие этого оператора приводит к увеличению длины фрактала на отрезок l_i , согласно его аргументу. Очевидно, что свойства этих операторов совершенно аналогичны свойствам нуля и единицы в алгебре чисел. Обратный оператор определяется стандартным образом:

$$f_i \bar{f}_i = \bar{f}_i f_i = f_e. \quad (25)$$

Стохастизация фрактальных алгоритмов

Из рассмотренного выше следует, что в основе формализации геометрических особенностей фрактальных алгоритмов лежат фрактальные операторы f_i . Для построения стохастических

ческих фракталов необходимо придать вероятностный характер базовым операторам f_i . Структура таких операторов имеет следующий вид:

$$f_i = \begin{cases} f_{i1}, & \text{если } p_1 \leq p \leq p_2 \\ f_{i2}, & \text{если } p \geq p_2 \\ \dots & \\ f_{ir}, & \text{если } \dots \end{cases}, \quad (26)$$

где f_{ir} – возможные значения оператора f_i , условия их реализации определяются вероятностями p_k и совокупностью дополнительных условий, характеризующих конкретную задачу. Стохастичность и многовариантность резко возрастают в произведении операторов вида (13, 14). Причина этого может быть проиллюстрирована следующим образом. Действие оператора (26) равносильно сумме его возможных значений f_{ir} , аналогичной (20),

$$f_{i1} + f_{i2} + \dots + f_{ir}. \quad (27)$$

При циклическом применении стохастических операторов вида (26) будут получаться сложные комплексы операторов вида (21). Такая структура обобщенного оператора соответствует вычислению стохастической фрактальной структуры, каждая часть которой имеет возрастающее с каждым циклом число участков различной структуры и размерности.

На рисунке 2 представлены два стохастических фрактала со структурой оператора (20) вида

$$f_i = \begin{cases} f_{i1}, & \text{если } p \geq p_1 \\ f_e, & \text{если } p \leq p_1 \end{cases}, \quad (28)$$

где для одной кривой применение оператора f_{i1} соответствует геометрический примитив с треугольным, а второй – с квадратным изломами. Вероятность p определяется конфигурацией фрактала (28). Граничное значение вероятности p_1 для верхнего рисунка равнялось 0,15, а для нижнего – увеличивалось до 0,3. Наличие единичного оператора в структуре (28) указывает на то, что с каждым циклом структура фрактала деградирует. Определение количественной оценки степени стохастичности фракталов такого типа требует дополнительных теоретических исследований и выходит за рамки данной статьи.

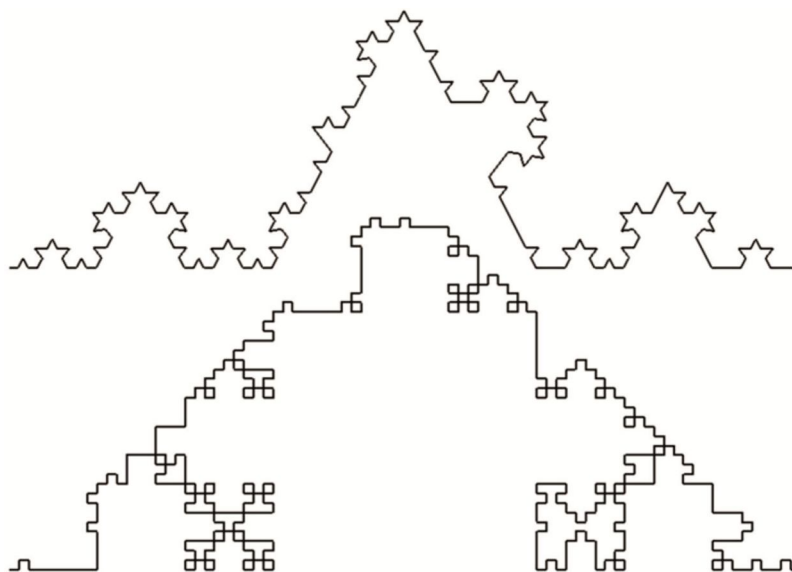


Рисунок 2 – Примеры стохастических фракталов, соответствующих стохастическому оператору (28) для двух геометрических примитивов: с треугольным (вверху) и квадратным (внизу) изломами

Figure 2 – Examples of stochastic fractals corresponding to the stochastic operator (28) for two geometric primitives: with triangular (top) and square (bottom) fractures

На рисунке 3 представлены четыре цикла формирования стохастического фрактала со структурой оператора (20) вида

$$f_i = \begin{cases} f_{i1}, & \text{если } 0 \leq p \leq p_1 \\ f_{i2}, & \text{если } p_1 \leq p \leq p_2, \\ f_{i3}, & \text{если } p_3 \leq p \leq 1 \end{cases} \quad (29)$$

где оператору f_{i1} соответствует геометрический примитив с квадратным, оператору f_{i2} – с треугольным, оператору f_{i3} – с трапециевидальным изломами. Граничные значения вероятностей имели значения $p_1 = 0,25$; $p_2 = 0,5$; $p_3 = 0,25$. Сравнение с рисунком 2 указывает на усложнение фракталов при отсутствии в структуре стохастических операторов единичного оператора.

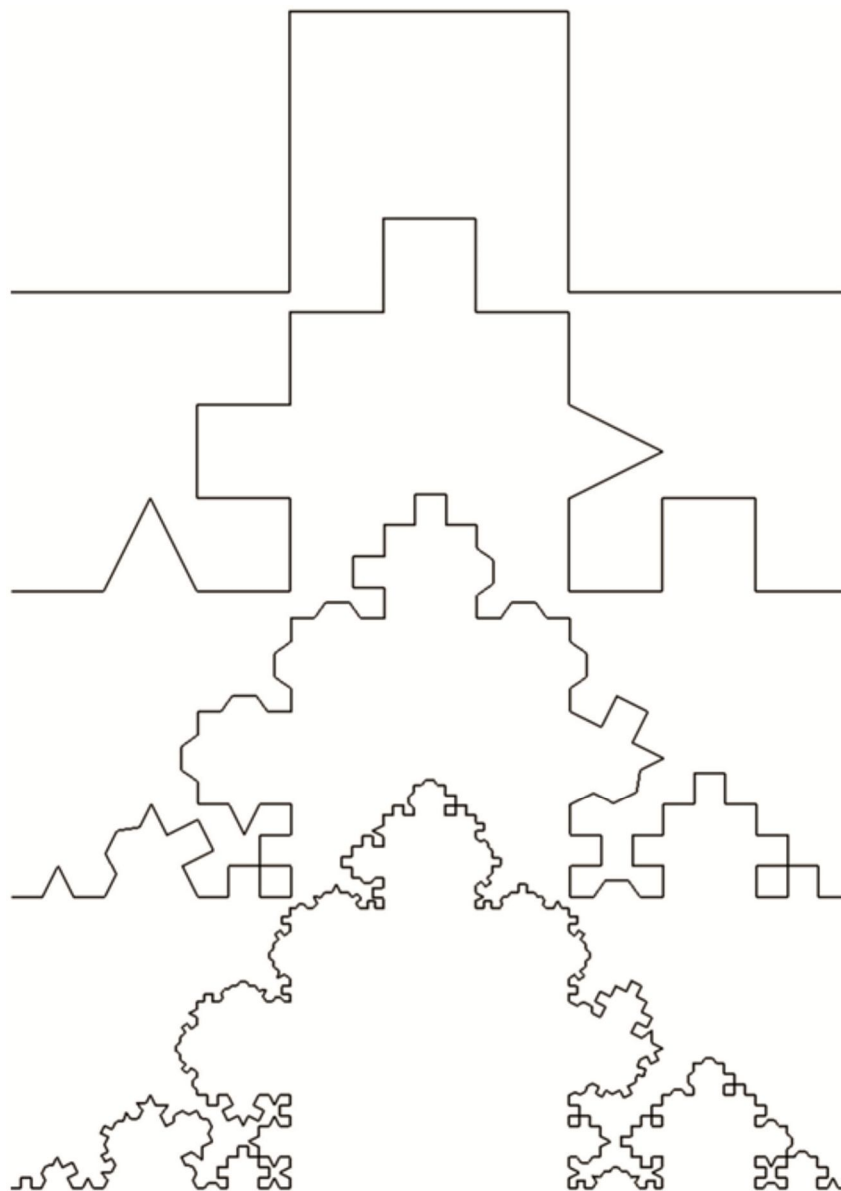


Рисунок 3 – Четыре цикла формирования стохастического фрактала, соответствующего стохастическому оператору (29)

Figure 3 – Four cycles of a stochastic fractal formation corresponding to the stochastic operator (29)

Алгоритм формирования периодических и стохастических фрактальных структур

Схема алгоритма формирования периодических и стохастических фрактальных структур представлена на рисунке 4 и состоит из трех независимых этапов, а именно:

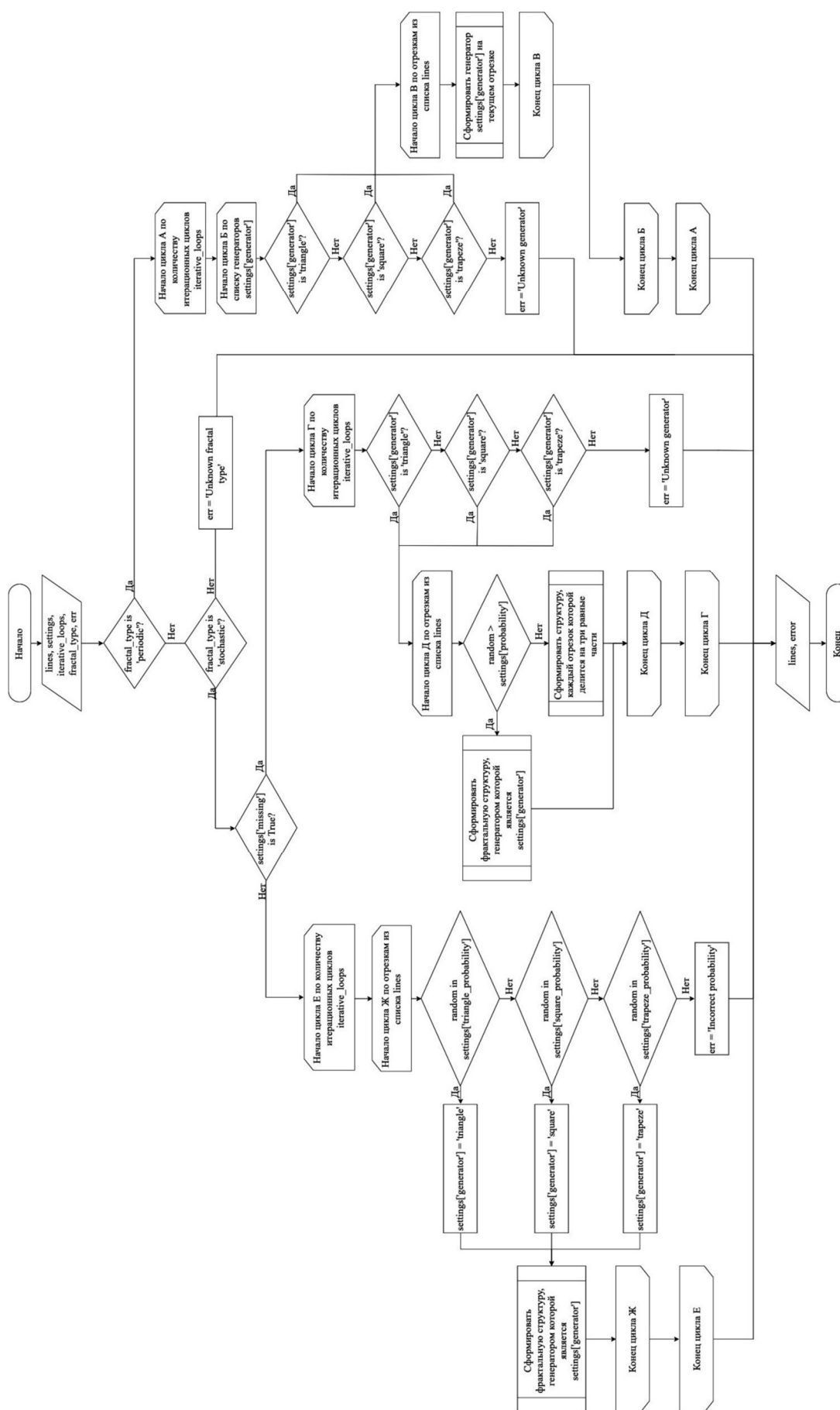


Рисунок 4 – Алгоритм формирования периодических и стохастических фрактальных структур
 Figure 4 – Algorithm of periodic and stochastic fractal structures formation

- формирование периодической фрактальной структуры с заданным количеством итерационных циклов N и очередностью применяемых базовых геометрических примитивов (треугольник, квадрат и трапеция);
- формирование стохастической фрактальной структуры с заданным количеством итерационных циклов N , с использованием базового геометрического примитива (треугольник, квадрат или трапеция) и с вероятностью от 0 до 1 пропуска его применения;
- формирование стохастической фрактальной структуры с заданным количеством итерационных циклов N и с вероятностью применения того или иного базового геометрического примитива на текущем рассматриваемом отрезке.

На первом этапе вычисляется произведение трех фрактальных операторов $f_1 f_2 f_3$. Трудоемкость данного этапа в лучшем и худшем случаях равна $O(G \cdot F)$, где: G – количество фрактальных операторов, участвующих в формировании фигуры (в данном случае $G = 3$); F – сумма трудоемкостей формирования базового геометрического примитива (в случае треугольника -4^N , квадрата и трапеции -5^N) и N – количество итерационных циклов применения произведения операторов (в данном случае $f_1 f_2 f_3$). Соответственно $O(G \cdot F) \rightarrow O(3 \cdot (4^N + 5^N + 5^N)) \rightarrow O(5^N)$.

На втором этапе вычисляется фрактальная структура с вероятностной величиной P , которая характеризует разбиение текущего отрезка на равные три части с последующим применением базового геометрического примитива (треугольника, квадрата или трапеции). В лучшем случае, т.е. при $P = 1$, трудоемкость принимает вид $O(3^N)$, в худшем при $P = 0$ и при выбранном примитиве: квадрат или трапеция – $O(5^N)$, где N – количество итерационных циклов.

Так как третий этап определяет вероятностное применение того или иного базового геометрического примитива на текущем, рассматриваемом отрезке, то трудоемкость в лучшем случае представляет собой – $O(4^N)$, если всегда будет выпадать треугольник, и $O(5^N)$, если примитив является квадратом или трапецией.

Вычисленные фрактальные структуры при помощи рассмотренного алгоритма, использующего предложенные алгебраические особенности композиции алгоритмов вычисления фрактальных структур, представлены на рисунках 1, 2 и 3 соответственно.

Программная реализация алгоритма формирования периодических и стохастических фрактальных структур выполнена на языке программирования Python 3.7 версии [9] с использованием развитых интегрируемых библиотек, таких как: Pygame [10], OpenGL [11], PyQt5 [12] и pyuic [13]. PyQt5 позволяет разрабатывать кроссплатформенные desktop-приложения на языке Python, а библиотека pyuic – генерировать Python код из файлов, созданных при помощи Qt Designer [14]. Pygame в связке с OpenGL предоставляют возможность визуализации сформированных фрактальных структур.

Заключение

Выявлены алгебраические особенности композиции фрактальных алгоритмов, основным понятием которых являются фрактальные операторы f_i , представляющие собой основные операции для построения фракталов определенного типа. Фрактальные операторы формализуют генерацию на заданных участках фрактала базовых примитивов в форме ломаных линий с треугольными, квадратными, трапецеидальными и т.п. изломами. Обоснована целесообразность введения нулевого, единичного и обратного операторов, а также операции их суммирования и умножения. Применение указанных алгебраических особенностей композиции позволило ввести понятия периодических и квазипериодических фракталов. При бесконечно большом числе различных операторов в произведении получено предельное обобщение понятия фрактала, как структуры без самоподобия, но с закономерно уменьшающимся масштабом. Выявлено, что фрактальные операторы f_i обладают сложными коммутационны-

ми свойствами: при изменении порядка операторов получаются различные по форме, но имеющие одинаковую размерность фракталы. Придание стохастического характера базовым операторам f_i позволяет вычислять стохастические фракталы, анализировать закономерности усложнения их структуры. Для периодических фракталов, а также объединения фракталов введены термины средней или обобщенной размерности. Реализация алгоритма формирования периодических и стохастических фрактальных структур подтвердила эффективность предложенного алгебраического подхода при изучении и моделировании фракталов со сложной структурой.

Библиографический список

1. **Балханов В. К.** Основы фрактальной геометрии и фрактального исчисления; под ред. Ю.Б. Башкуев. – Улан-Удэ: Изд-во Бурятского госуниверситета, 2013. – 224 с.
2. **Мандельброт Б.** Фрактальная геометрия природы. – М.: Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
3. **Морозов А. Д.** Введение в теорию фракталов. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 160 с.
4. **Теплов А. А., Майков К. А.** Алгоритм синтеза трехмерных фрактальных динамических структур // Cloud of Science. 2018. Т. 5. № 3. С. 551-562.
5. **Теплов А. А., Майков К. А.** Сравнительный анализ алгоритмов триангуляции Делоне применительно к формированию трехмерных фрактальных объектов // Известия высших учебных заведений. Проблемы полиграфии и издательского дела, 2017. № 5. С. 25-38.
6. **Hanan J. S.** Parametric L-systems and their application to the modelling and visualization of plants. - PhD thesis, University of Regina, June 1992.
7. **Федер Е.** Фракталы: пер. с англ. – М.: Мир, 1991. – 254 с.
8. **Шредер М.** Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 528 с.
9. **Python.** [Электронный ресурс] URL: <https://www.python.org/downloads/release/python-373/>
10. **PyGame.** [Электронный ресурс] URL: <https://www.pygame.org/>
11. **OpenGL.** [Электронный ресурс] URL: <https://www.opengl.org/>
12. **PyQt5.** [Электронный ресурс] URL: <https://www.riverbankcomputing.com/software/pyqt/download5>
13. **Pyuic.** [Электронный ресурс] URL: <https://github.com/baoboa/pyqt5/tree/master/pyuic>
14. **Qt Designer.** [Электронный ресурс] URL: <https://doc.qt.io/qt-5/qt designer-manual.html>

UDC 004.925.86

ALGEBRAIC FEATURES OF FRACTAL STRUCTURE CALCULATION ALGORITHMS

K. A. Maikov, Dr. Sc. (Tech.), full professor, Informatics and control systems Department, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia;

orcid.org/0000-0003-1864-2397, e-mail: maikov@bmstu.ru

A. N. Pylkin, Dr. Sc. (Tech.), full professor, RSREU, Ryazan, Russia;

orcid.org/0000-0001-9925-2870, e-mail: pylkin.a.n@rsreu.ru

S. N. Kuzmenko, Ph.D. (Phys. and Math.), associate professor, Department of mathematics, physics and Informatics, Kerch state marine technological University, Kerch, Russia;

orcid.org/0000-0002-1039-1274, e-mail: ksn1160@mail.ru

A. A. Teplov, post-graduate student, Informatics and control systems Department, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia;

orcid.org/0000-0002-1785-6089, e-mail: teploff.aa@gmail.com

The analysis of the methods to construct known geometric fractals allowed revealing algebraic features of fractal algorithms composition, namely fractal operators f_i , which are the basic operations to construct fractals of a certain type. The result of using operators for geometric fractals is the structure with fractures

of triangular, square, trapezoidal, etc. forms. Multiplication and addition operations are introduced for the operators, as well as the concept of unit, zero and inverse operator which allows us to define periodic and quasi-periodic fractal structures. In the product with an infinitely large number of cofactors-basis operators it is possible to obtain ultimate generalization of the concept of fractal as a structure without self-similarity, but with naturally decreasing scale. Fractal operators f_i have complex switching properties. Giving stochastic character to basic operators f_i allows calculating stochastic fractals and analyzing regularities of their structure. For periodic fractals, as well as the union of fractals, average or generalized dimension is introduced. An algorithm to form periodic and stochastic fractal structures is proposed, a distinctive feature of which is the implementation of probabilistic choice of basic geometric primitive on current iterative cycle. Software implementation of the algorithm proposed confirmed the validity of algebraic approach in study and modeling of fractals with complex structure.

Key words: geometric fractals, stochastic fractals, algorithms to construct fractals, algebra of fractal operators.

DOI: 10.21667/1995-4565-2020-71-117-127

References

1. **Balhanov V. K.** *Osnovy fraktal'noj geometrii i fraktal'nogo ischislenija pod red. Ju. B. Bashkuev* – Ulan-Udje: Izd-vo Burjatskogo gosuniversiteta, 2013. 224 p. (in Russian).
2. **Mandel'brot B.** *Fraktal'naja geometrija prirody*. Moskva: Institut komp'juternyh issledovanij, 2002. 656 p. (in Russian).
3. **Morozov A. D.** *Vvedenie v teoriju fraktalov*. Moskva-Izhevsk: Institut komp'juternyh issledovanij, 2002. 160 p. (in Russian).
4. **Teplov A. A., Maikov K. A.** *Algoritm sinteza trehmernyh fraktal'nyh dinamicheskikh struktur*. Cloud of Science. 2018, vol. 5, no 3, pp. 551-562. (in Russian).
5. **Teplov A. A., Maikov K. A.** *Sravnitel'nyj analiz algoritmov trianguljarii Delone primenitel'no k formirovaniju trehmernyh fraktal'nyh ob#ektov. Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij. Problemy poligrafii i izdatel'skogo dela*, 2017, no. 5, pp. 25-38. (in Russian).
6. **Hanan J. S.** *Parametric L-systems and their application to the modelling and visualization of plants*. PhD thesis, University of Regina, June 1992.
7. **Feder E.** *Fraktaly*: Per. s ang. M.: Mir, 1991. 254 p. (in Russian).
8. **Shreder M.** *Fraktaly, haos, stepennye zakony*. Miniatjury iz beskonechnogo raja. Izhevsk: NIC «Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika». 2001. 528 p. (in Russian).
9. **Python**. Retrieved from <https://www.python.org/downloads/release/python-373/>
10. **PyGame**. Retrieved from <https://www.pygame.org/>
11. **OpenGL**. Retrieved from <https://www.opengl.org/>
12. **PyQt5**. Retrieved from <https://www.riverbankcomputing.com/software/pyqt/download5>
13. **Pyuic**. Retrieved from <https://github.com/baoboa/pyqt5/tree/master/pyuic>
14. **Qt Designer**. Retrieved from <https://doc.qt.io/qt-5/qtdesigner-manual.html>