

УДК 519.766.2

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НЕЧЕТКОСТИ ПРИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЯХ НАД НЕЧЕТКИМИ ЧИСЛАМИ LR-ТИПА

К. В. Бухенский, к.ф.-м.н., доцент, проректор по учебной работе РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0003-2602-2112, e-mail: bukhensky.k.v@rsreu.ru

А. Н. Конюхов, к.п.н., доцент кафедры ВМ РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0002-1523-7110, e-mail: chronos@bk.ru

А. Б. Дюбуа, к.ф.-м.н., доцент кафедры ВМ РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0002-5924-4128, e-mail: abd-69@mail.ru

А. С. Сафoshкин, ст. преподаватель кафедры ВМ РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0002-1419-979X, e-mail: safoshkin.a.s@rsreu.ru

***Цель работы** – исследовать преобразования нечеткости нечетких множеств (НМ) при функциональных отображениях НМ и в результате линейных операций над ними (сложение НМ и умножение на действительное число). В качестве НМ взяты нечеткие числа (НЧ) LR-типа, применяемые для описания термов лингвистических переменных в системах нечеткого логического вывода. Дифференцированы понятия спрэдовой и математической нечеткости. В качестве меры математической нечеткости НМ выбран индекс нечеткости Ягера с линейной метрикой. Показана инвариантность индекса математической нечеткости относительно линейных функциональных преобразований НМ, а также относительно операции сложения НЧ LR-типа с одинаковыми функциями формы. Выведена расчетная формула для значения индекса нечеткости суммы при сложении чисел LR-типа с различными произвольными функциями формы. Проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие корректность теоретических выводов.*

***Ключевые слова:** нечеткое множество, нечеткое число LR-типа, функция принадлежности, функция формы, индекс математической нечеткости, спрэдовая нечеткость, принцип расширения Заде, альфа-сечение нечеткого множества.*

DOI: 10.21667/1995-4565-2020-71-137-150

Введение

Система нечеткого вывода (fuzzy inference system, FIS) является центральным звеном управления техническими устройствами на нечеткой логике. FIS обрабатывает антецеденты, представленные нечеткими множествами (НМ) – термами лингвистических переменных, возвращая нечеткий консеквент в соответствии с заложенной базой нечетких правил и применяемым алгоритмом нечеткого вывода [1].

На сегодняшний день достаточно глубоко проработана проблема математического обеспечения FIS, разработаны различные алгоритмы нечеткого логического вывода (типа Мамдани, Ларсена, Такаги-Сугено-Канга и др.) [2].

Определенным недостатком существующих моделей нечеткого вывода является оперирование преимущественно в терминах «спрэдовой» нечеткости (от англ. «spread» – разброс), определяемой длиной носителя нечеткого термина и его α -уровневым сечениям. Однако обработка такого рода нечеткости сводится к операциям над промежутками действительной числовой оси, что относится к предмету интервальной математики, т.е. к четким вычислениям.

Вместе с тем известно, что «эффекты нечеткости» в математических процедурах обработки данных определяются отнюдь не спрэдовой нечеткостью, а тем, насколько значительно степени принадлежности элементов нечеткого множества в своей совокупности отличаются как от нуля, так и от единицы, т.е. насколько они близки к 0,5. В таких точках (точках перехода) нечеткость, определяемая степенью принадлежности элемента множеству, максимальна. В связи с этим введены и используются такие понятия, как «мера нечеткости» НМ и

«индексы нечеткости» НМ, позволяющие дифференцировать множества по нечеткости [3-6]. Будем называть такое понимание «математической нечеткостью» с целью отличия от спрэдовой нечеткости.

Имеются основания полагать, что адекватность нечеткого логического вывода может быть повышена, если в алгоритмах вывода, наряду со спрэдовой нечеткостью, учитывать математическую нечеткость термов, обрабатываемых в FIS [7-9].

В статье изложены основные результаты исследования преобразований математической нечеткости в результате линейных операций над нечеткими числами. Этот этап является промежуточным, но необходимым для понимания особенностей влияния математической нечеткости антецедентов и применяемых алгоритмов на результат вывода в FIS.

Теоретическая часть

По Л. Заде нечеткое подмножество $\tilde{A}$ универсального множества U – это совокупность всех пар вида $\tilde{A} = \{ \langle x \in U, \mu_{\tilde{A}}(x) \rangle \}$, где $\mu_{\tilde{A}}(x)$ – функция принадлежности (ФП) элемента x множеству $\tilde{A}$, $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x) \leq 1$ [10]. Для краткости будем именовать любое нечеткое подмножество универсума нечетким множеством (НМ).

Понятия носителя, ядра, высоты НМ, выпуклого НМ можно найти, например, в [11, 12].

Определение нечеткого числа (НЧ): это нечеткое множество $\tilde{A}$, заданное своей функцией принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ на универсуме $U = \mathbb{R}$ – множестве всех действительных чисел, удовлетворяющее, по меньшей мере, следующим трем свойствам: 1. $\tilde{A}$ – нормальное НМ, т.е. $\text{height}(\tilde{A}) = 1$; 2. $\tilde{A}$ – выпуклое НМ; 3. $\text{supp}(\tilde{A})$ – ограниченное множество [11]. Обозначение нечетких чисел: $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$.

Обычно FIS оперирует термами, представляющими собой числа LR-типа (англ. left-right). Рабочее определение таких НЧ (униmodalный случай) дадим через ФП вида

$$\mu_{LR}(x) = [m, ls, rs]_{LR}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{ls}\right), & \text{если } m-ls \leq x \leq m, \quad ls > 0, \\ R\left(\frac{x-m}{rs}\right), & \text{если } m < x \leq m+rs, \quad rs > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (1)$$

где m – ядро НЧ; ls и rs – левый и правый спрэды НЧ; $L(t), R(t): [0,1] \rightarrow [0,1]$ – левая и правая функции формы, т.е. непрерывные убывающие функции, удовлетворяющие условиям $R(0) = L(0) = 1$ и $R(1) = L(1) = 0$, [11]. Множество всевозможных функций формы обозначим $F[0,1]$, а запись $f(t) \in F[0,1]$ будем понимать, что $f(t)$ является функцией формы.

В качестве меры математической нечеткости НМ в настоящем исследовании в виду удобства преобразований и вычислений выбран индекс нечеткости (*index of fuzziness*) Ягера с линейной метрикой Хэмминга [12]:

$$if(\tilde{A}) = 1 - \frac{1}{b-a} \int_a^b |2\mu_{\tilde{A}}(x) - 1| dx, \quad (2)$$

где $(a, b) = \text{supp}(\tilde{A})$ – носитель НМ $\tilde{A}$.

Спрэдовую нечеткость $sf(\tilde{u})$ будем трактовать как длину носителя НЧ $\tilde{u}$, причем в случае чисел LR-типа (1) это сумма длин левого и правого спрэдов:

$$sf(\tilde{u}) = \text{length}(\text{supp}(\tilde{u})) = b - a = ls + rs, \quad (3)$$

где $a = m - ls$, $b = m + rs$.

Отличие спрэдовой нечеткости от математической можно проиллюстрировать на следующем примере. Рассмотрим несколько вариантов термина некоторой лингвистической пере-

менной с одинаковой спрэдовой нечеткостью в виде промежутка $\text{supp}(\tilde{u}) = (a, b)$, с ядром $\text{core}(\tilde{u}) = m$, описываемых различными ФП (рисунок 1).

Как показано в [12] индексы математической нечеткости (2) приведенных термов существенно различаются: 0,5 (треугольная); 0,391 (усеченная парабола); 0,323 (гауссова гладкая). Спрэдовая же нечеткость во всех случаях одинакова и равна $(b - a)$, (рисунок 1).

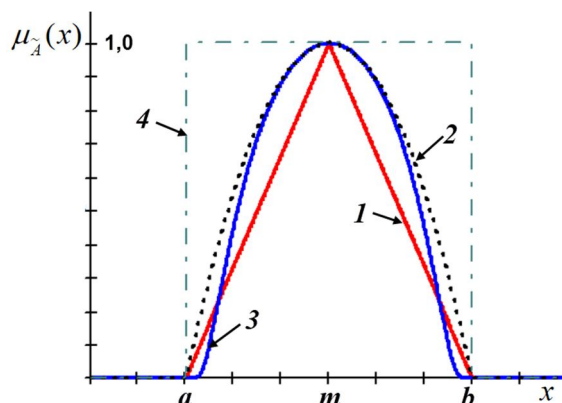


Рисунок 1 – Нечеткие числа (функции принадлежности: 1 – треугольная, 2 – усеченная парабола, 3 – гауссова гладкая) и четкий интервал (a, b) – 4. Индексы математической нечеткости: 0,5 (1); 0,391 (2); 0,323 (3); 0 (4).

Спрэдовая нечеткость во всех случаях $(b - a)$

Figure 1 – Fuzzy numbers (membership functions: 1 – triangle, 2 – clipped parabola, 3 – smooth Gaussian) and a crisp interval (a, b) – 4. Indices of math fuzziness: 0,5 (1); 0,391 (2); 0,323 (3); 0 (4). Spread vagueness equals $(b - a)$ for all cases

Несмотря на то, что в формулу индекса нечеткости (2) входит явно величина спрэдовой нечеткости $sf = (b - a)$, этот индекс в случае унимодальных НЧ не зависит от величины спрэда, а является лишь функцией кривых формы $L(t), R(t): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, [12]. Сказанное позволяет обозначать нечеткость унимодального НМ $\tilde{A}$ с помощью двухкомпонентного вектора нечеткости $\overline{tf}(\tilde{A})$ (total fuzziness):

$$\overline{tf}(\tilde{A}) = \left\| \begin{matrix} if(\tilde{A}) \\ sf(\tilde{A}) \end{matrix} \right\|. \quad (4)$$

Унимодальные НЧ обычно используются для описания центральных термов лингвистических переменных в FIS. Однако все выкладки и выводы в данной работе легко распространяемы и на случай крайних термов, как правило полимодальных.

Операции с нечеткими числами осуществлялись на основе принципа обобщения (расширения) Л. Заде [13].

Пусть задано отображение $f: X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$, где $X_i, Y \subseteq \mathbb{R}$ – универсальные множества, а $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ – декартово произведение множеств. Пусть $\tilde{A}_i$ – некоторые нечеткие подмножества универсумов $X_1, X_2, \dots, X_n$ соответственно. Отображение $\hat{f}$ называется нечетким обобщением отображения f , если его действие порождает нечеткое подмножество $\tilde{B} = \hat{f}(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \dots, \tilde{A}_n)$ универсума Y с функцией принадлежности

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup_{(x_1, \dots, x_n) \in f^{-1}(y)} \min(\mu_{\tilde{A}_1}(x_1), \dots, \mu_{\tilde{A}_n}(x_n)), & \text{если } f^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0, & \text{если } f^{-1}(y) = \emptyset, \end{cases} \quad (5)$$

где $f^{-1}(y) = \{(x_1, \dots, x_n) | f(x_1, \dots, x_n) = y\}$ – все прообразы элемента y , [14].

Результаты теоретического исследования

В качестве операндов (если не оговорено иное) рассматривались только унимодальные НЧ с непрерывными ограниченными носителями на универсуме $\mathbb{R}$. Полимодальный случай легко сводится к унимодальному, если учесть, что добавление элементов со степенями принадлежности $\mu(x)=1$ не вносит дополнительного вклада в абсолютную меру математической нечеткости, однако может увеличить мощность носителя, служащую базой для исчисления индекса математической нечеткости.

1. Рассмотрим сначала инъективное непрерывное отображение $f: X \rightarrow Y$ и его нечеткое обобщение $\hat{f}: \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}$, где $\tilde{A} \subseteq X$, $\tilde{B} \subseteq Y$, пользуясь принципом расширения (5). В таком случае прообраз элемента $y \in \tilde{B}$, т.е. $f^{-1}(y) = \{x \mid f(x) = y\}$ определен однозначно.

Пусть $\text{supp}(\tilde{A}) = (a, b)$, $a < b$ и $\text{supp}(\tilde{B}) = (c, d)$, $c < d$. В силу инъективности имеет место однозначное отображение носителя НМ $\tilde{A}$ на носитель НМ $\tilde{B}$ $f: \text{supp}(\tilde{A}) \rightarrow \text{supp}(\tilde{B})$, т.е. $f: ((a, b) \subseteq X) \rightarrow ((c, d) \subseteq Y)$ в случае $f \uparrow$ или $f: ((a, b) \subseteq X) \rightarrow ((d, c) \subseteq Y)$, если $f \downarrow$. Рассмотрим только первый случай (по второму рассуждения аналогичные).

Индекс математической нечеткости (2) для исходного НМ $\tilde{A}$

$$if(\tilde{A}) = 1 - \frac{1}{b-a} \int_a^b |2\mu_{\tilde{A}}(x) - 1| dx. \quad (6)$$

То же для образа – НМ $\tilde{B}$

$$if(\tilde{B}) = 1 - \frac{1}{d-c} \int_c^d |2\mu_{\tilde{B}}(y) - 1| dy, \quad (7)$$

который, пользуясь инъективностью $f \uparrow$, можно переписать следующим образом:

$$if(\tilde{B}) = 1 - \frac{1}{f(b)-f(a)} \int_{f(a)}^{f(b)} |2\mu_{\tilde{A}}(f^{-1}(y)) - 1| dy. \quad (8)$$

Произведя замену переменного $y = f(x)$, $x = f^{-1}(y)$ в интеграле (8), получим

$$if(\tilde{B}) = 1 - \frac{1}{f(b)-f(a)} \int_a^b |2\mu_{\tilde{A}}(x) - 1| f'(x) dx, \quad (9)$$

из чего следует, что, вообще говоря, $if(\tilde{B}) \neq if(\tilde{A})$ даже при инъективном отображении.

Однако, если преобразование линейное $y = kx + l$, ($k \neq 0$), то из (9) и (6) следует, что

$$if(\tilde{B}) = 1 - \frac{1}{kb-ka} \int_a^b |2\mu_{\tilde{A}}(x) - 1| (kx+l)' dx = 1 - \frac{1}{b-a} \int_a^b |2\mu_{\tilde{A}}(x) - 1| dx = if(\tilde{A}), \quad (10)$$

то есть математическая нечеткость НМ инвариантна относительно его линейного преобразования. Заметим, что мы нигде не использовали конкретный вид функции принадлежности, что делает данный вывод универсальным и применимым к любым НМ с ограниченным непрерывным носителем, а не только к НЧ.

Очевидно, что тем самым доказана также и инвариантность математической нечеткости относительно операции умножения НМ на действительное число $k \neq 0$, в то время как спредовая нечеткость изменяется в k раз.

2. Рассмотрим теперь преобразование нечеткости в результате операций сложения НЧ.

Пусть $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ – нечеткие числа, заданные функциями принадлежности $\mu_{\tilde{u}}(x)$ и $\mu_{\tilde{v}}(y)$ соответственно на универсуме $U = \mathbb{R}$. Тогда из принципа расширения (5) вытекает, что суммой $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ будет нечеткое число $(\tilde{u} + \tilde{v})$ с функцией принадлежности

$$\mu_{(\tilde{u}+\tilde{v})}(z) = \sup_{\{(x,y)|x+y=z\}} \min(\mu_{\tilde{u}}(x), \mu_{\tilde{v}}(y)). \quad (11)$$

Для непрерывного случая удобнее переформулировать (11) в терминах α -сечений.

Пусть $f: X \rightarrow Y$ – непрерывное отображение, $\tilde{u}$ – нечеткое число, заданное на носителе X . Тогда для всех $0 \leq \alpha \leq 1$ имеет место $[\hat{f}(\tilde{u})]_{\alpha} = f(u_{\alpha})$. Т.е., α -сечения образа $\hat{f}(\tilde{u})$ совпадают с образами α -сечений, полученными в результате действия на них непрерывного отображения f , [15, 16].

Запишем произвольное α -сечение НЧ $\tilde{u} = [m_u, ls_u, rs_u]_{LR}$ (1) в виде промежутка

$$u_{\alpha} = [\underline{u}_{\alpha}, \overline{u}_{\alpha}] = [m_u - ls_u L^{-1}(\alpha), \overline{u}_{\alpha} = m_u + rs_u R^{-1}(\alpha)], \quad 0 \leq \alpha \leq 1 \quad (12)$$

замечая, что существование однозначных обратных функций $L^{-1}(\alpha)$ и $R^{-1}(\alpha)$ обеспечено монотонностью непрерывных функций формы $L(t)$ и $R(t)$.

Полагая для начала, что у числа $\tilde{v} = [m_v, ls_v, rs_v]_{LR}$ левая и правая функции формы тождественны таковым для числа $\tilde{u}$, α -сечения НЧ $\tilde{v}$ имеют вид

$$v_{\alpha} = [\underline{v}_{\alpha}, \overline{v}_{\alpha}] = [m_v - ls_v L^{-1}(\alpha), m_v + rs_v R^{-1}(\alpha)], \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (13)$$

В соответствии с α -уровневым подходом для любых $0 \leq \alpha \leq 1$ справедливо

$$\begin{aligned} (\tilde{u} + \tilde{v})_{\alpha} &= u_{\alpha} + v_{\alpha} = [\underline{u}_{\alpha} + \underline{v}_{\alpha}, \overline{u}_{\alpha} + \overline{v}_{\alpha}] = \\ &= [(m_u + m_v) - (ls_u + ls_v)L^{-1}(\alpha), (m_u + m_v) + (rs_u + rs_v)R^{-1}(\alpha)] = \\ &= ([m_u + m_v, ls_u + ls_v, rs_u + rs_v]_{LR})_{\alpha}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из равенства всех α -сечений в левой и правой части (14) следует

$$\tilde{u} + \tilde{v} = [m_u, ls_u, rs_u]_{LR} + [m_v, ls_v, rs_v]_{LR} = [m_u + m_v, ls_u + ls_v, rs_u + rs_v]_{LR}, \quad (15)$$

т.е. сумма двух НЧ LR -типа с одинаковыми с каждой стороны функциями формы дает также НЧ LR -типа с теми же функциями формы. Но и значения индекса математической нечеткости являются функцией формы, как было установлено нами ранее в [12].

Индексы нечеткости операндов рассчитаем по взвешенной формуле:

$$if(\tilde{u}) = \frac{ls_u if(L) + rs_u if(R)}{ls_u + rs_u}, \quad if(\tilde{v}) = \frac{ls_v if(L) + rs_v if(R)}{ls_v + rs_v}, \quad (16)$$

где $if(L)$, $if(R)$ – индексы нечеткости НЧ с функциями формы L и R соответственно [12].

В то же время для результата

$$if(\tilde{u} + \tilde{v}) = \frac{(ls_u + ls_v)if(L) + (rs_u + rs_v)if(R)}{ls_u + rs_u + ls_v + rs_v}. \quad (17)$$

Из (16) и (17) вытекает, что

$$if(\tilde{u} + \tilde{v}) = \frac{(ls_u + rs_u)if(\tilde{u}) + (ls_v + rs_v)if(\tilde{v})}{ls_u + rs_u + ls_v + rs_v}, \quad (18)$$

или в приведенной форме

$$if(\tilde{u} + \tilde{v}) = s_u^* if(\tilde{u}) + s_v^* if(\tilde{v}), \quad (19)$$

где $0 \leq s_u^* \leq 1$, $0 \leq s_v^* \leq 1$ – относительные доли спрэдов НЧ $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ в спрэде суммы $(\tilde{u} + \tilde{v})$.

Анализ (19) показывает, что

$$\min\{if(\tilde{u}), if(\tilde{v})\} \leq if(\tilde{u} + \tilde{v}) \leq \max\{if(\tilde{u}), if(\tilde{v})\}, \quad (20)$$

то есть значение индекса математической нечеткости суммы НЧ LR -типа с одинаковыми с каждой стороны функциями формы $L_u(t) \equiv L_v(t) \equiv L(t)$ и $R_u(t) \equiv R_v(t) \equiv R(t)$ заключено между значениями индексов нечеткости слагаемых. Если же кроме того $L(t) \equiv R(t)$, то есть

функции формы слева и справа одного типа, то $if(\tilde{u}) = if(\tilde{v}) = if(\tilde{u} + \tilde{v})$. Как следствие математическая нечеткость инвариантна относительно операции сложения для любых НЧ LR -типа одного класса (например, треугольных, гауссовых, квадратичных, гармонических и др.).

3. Исследуем теперь кросс-классовый случай, то есть сложение НЧ с различными функциями формы с каждой стороны: $L_u(t) \neq L_v(t)$, $R_u(t) \neq R_v(t)$.

По аналогии с (14) запишем α -сечение суммы $\tilde{w} = \tilde{u} + \tilde{v}$:

$$(\tilde{w})_\alpha = \left[m_u + m_v - (ls_u L_u^{-1}(\alpha) + ls_v L_v^{-1}(\alpha)), m_u + m_v + (rs_u R_u^{-1}(\alpha) + rs_v R_v^{-1}(\alpha)) \right], \quad (21)$$

т.е. в каждом сечении результата $\tilde{w} = \tilde{u} + \tilde{v}$ величина спрэда зависит от α .

Покажем, что $\tilde{w} = \tilde{u} + \tilde{v}$ является нечетким числом LR -типа, то есть существуют функции формы $L_w(t), R_w(t) \in F[0,1]$ такие, что

$$\begin{cases} ls_w L_w^{-1}(\alpha) = ls_u L_u^{-1}(\alpha) + ls_v L_v^{-1}(\alpha) \\ rs_w R_w^{-1}(\alpha) = rs_u R_u^{-1}(\alpha) + rs_v R_v^{-1}(\alpha) \\ 0 \leq \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (22)$$

Дальнейшие выкладки приводим для левой функции формы (для правой аналогично).

Сначала покажем, что $(L(t) \in F[0,1]) \Leftrightarrow (L^{-1}(\alpha) \in F[0,1])$. Действительно

$$\begin{cases} L(t): [0,1] \rightarrow [0,1] \\ L(t) \in C[0,1] \\ L(0) = 1, L(1) = 0 \\ L(t) \downarrow 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L^{-1}(\alpha): [0,1] \rightarrow [0,1] \\ L^{-1}(\alpha) \in C[0,1] \\ L^{-1}(1) = 0, L^{-1}(0) = 1 \\ L^{-1}(\alpha) \downarrow 0 \leq \alpha \leq 1, \end{cases} \quad (23)$$

что следует из свойств обратной функции, монотонности и непрерывности функции формы.

Вернемся к системе условий (22), первое уравнение которой должно выполняться при всех $0 \leq \alpha \leq 1$, в т.ч. $ls_w L_w^{-1}(0) = ls_u L_u^{-1}(0) + ls_v L_v^{-1}(0)$, т.е.

$$ls_w = ls_u + ls_v. \quad (24)$$

Из (22) и (24) следует, что

$$L_w^{-1}(\alpha) = \frac{ls_u L_u^{-1}(\alpha) + ls_v L_v^{-1}(\alpha)}{ls_w} = \frac{ls_u L_u^{-1}(\alpha) + ls_v L_v^{-1}(\alpha)}{ls_u + ls_v}, \quad (25)$$

где $L_u^{-1}(\alpha), L_v^{-1}(\alpha) \in F[0,1]$.

То же через приведенные спрэды:

$$L_w^{-1}(\alpha) = ls_u^* L_u^{-1}(\alpha) + ls_v^* L_v^{-1}(\alpha), \quad (26)$$

где $0 \leq ls_u^* \leq 1$, $0 \leq ls_v^* \leq 1$ – относительные доли левых спрэдов НЧ $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ соответственно в левом спрэде суммы – НЧ $\tilde{w}$. Очевидно, что $ls_u^* + ls_v^* = 1$.

Легко убедиться, что для (26) выполняются все условия (23), т.е. $L_w^{-1}(\alpha) \in F[0,1]$. Следовательно, также в силу (23) и $L_w(t) \in F[0,1]$.

Запишем в приведенной форме индекс математической нечеткости (2), обусловленный вкладом левой функции формы $L(t)$ некоторого НЧ $\tilde{q} = [m_q, ls_q, rs_q]_{LR}$:

$$if(L) = 1 - \frac{1}{ls_q} \int_{m_q - ls_q}^{m_q} \left| 2L\left(\frac{m_q - x}{ls_q}\right) - 1 \right| dx = 1 - \int_0^1 |2L(t) - 1| dt. \quad (27)$$

Если $tp(L)$ – точка перехода (англ. transition point) функции формы $L(t)$, т.е. $L(tp(L)) = 0.5$, то (27) можно переписать в виде

$$if(L) = 1 - \int_0^{tp(L)} (2L(t) - 1) dt + \int_{tp(L)}^1 (2L(t) - 1) dt = 2tp(L) - \int_0^{tp(L)} 2L(t) dt + \int_{tp(L)}^1 2L(t) dt. \quad (28)$$

Поскольку $L^{-1} \in F[0, 1]$, то по аналогии с (27)

$$if(L^{-1}) = 1 - \int_0^1 |2L^{-1}(\alpha) - 1| d\alpha, \quad (29)$$

После замены переменного $\alpha = L(t)$ в (29) с учетом $L'(t) < 0$ (функция формы убывающая) и интегрирования по частям, получим

$$if(L^{-1}) = 1 - \int_1^0 |2t - 1| L'(t) dt = 1 - \int_0^1 |(2t - 1)L'(t)| dt = \int_0^{1/2} 2L(t) dt - \int_{1/2}^1 2L(t) dt. \quad (30)$$

Полагая в (30) для определенности $tp(L) \leq 1/2$, имеем

$$if(L^{-1}) = \int_0^{tp(L)} 2L(t) dt + \int_{tp(L)}^{1/2} 2L(t) dt - \int_{1/2}^1 2L(t) dt = 2tp(L) + 4 \int_{tp(L)}^{1/2} L(t) dt - if(L). \quad (31)$$

Если в (30) $tp(L) > 1/2$, то, выполняя аналогичные преобразования, получим

$$if(L^{-1}) = \int_0^{1/2} 2L(t) dt - \int_{1/2}^{tp(L)} 2L(t) dt - \int_{tp(L)}^1 2L(t) dt = 2tp(L) - 4 \int_{1/2}^{tp(L)} L(t) dt - if(L), \quad (32)$$

что эквивалентно (31).

Итак, без ограничения общности установлена связь между индексами математической нечеткости исходной функции формы и обратной к ней:

$$if(L^{-1}) = 2tp(L) - 4 \int_{1/2}^{tp(L)} L(t) dt - if(L). \quad (33)$$

В соответствии с (33) обратная по отношению к левой функция формы НЧ – результата операции $\tilde{w} = \tilde{u} + \tilde{v}$ имеет индекс нечеткости

$$if(L_w^{-1}) = 2tp(L_w) - 4 \int_{1/2}^{tp(L_w)} L_w(t) dt - if(L_w). \quad (34)$$

С другой стороны в силу (26) и (29)

$$\begin{aligned} if(L_w^{-1}) &= if(ls_u^* L_u^{-1}(\alpha) + ls_v^* L_v^{-1}(\alpha)) = 1 - \int_0^1 |2ls_u^* L_u^{-1}(\alpha) + 2ls_v^* L_v^{-1}(\alpha) - 1| d\alpha = \\ &= 2 - 2tp(L_w^{-1}) - \int_0^{tp(L_w^{-1})} (2ls_u^* L_u^{-1}(\alpha) - 1) d\alpha - \int_0^{tp(L_w^{-1})} (2ls_v^* L_v^{-1}(\alpha) - 1) d\alpha + \\ &+ \int_{tp(L_w^{-1})}^1 (2ls_u^* L_u^{-1}(\alpha) - 1) d\alpha + \int_{tp(L_w^{-1})}^1 (2ls_v^* L_v^{-1}(\alpha) - 1) d\alpha. \end{aligned} \quad (35)$$

Выполняя замены переменных в интегралах выражения (35) соответственно $\alpha = L_u(t)$ и $\alpha = L_v(t)$, затем интегрируя по частям, получим после несложных преобразований:

$$\begin{aligned} if(L_w^{-1}) &= 2ls_u^* \int_0^{tp(L_u)} L_u(t) dt + 4ls_u^* \int_{tp(L_u)}^{L_u^{-1}(tp(L_w^{-1}))} L_u(t) dt - 2ls_u^* \int_{tp(L_u)}^1 L_u(t) dt + \\ &+ 2ls_v^* \int_0^{tp(L_v)} L_v(t) dt + 4ls_v^* \int_{tp(L_v)}^{L_v^{-1}(tp(L_w^{-1}))} L_v(t) dt - 2ls_v^* \int_{tp(L_v)}^1 L_v(t) dt. \end{aligned} \quad (36)$$

С учетом (28) из (36) следует

$$\begin{aligned}
if(L_w^{-1}) &= 2ls_u^*tp(L_u) - ls_u^*if(L_u) + 2ls_v^*tp(L_v) - ls_v^*if(L_v) + \\
&+ 4ls_u^* \int_{tp(L_u)}^{L_u^{-1}(tp(L_w^{-1}))} L_u(t)dt + 4ls_v^* \int_{tp(L_v)}^{L_v^{-1}(tp(L_w^{-1}))} L_v(t)dt = \\
&= 2tp(L_w) - ls_u^*if(L_u) - ls_v^*if(L_v) + 4ls_u^* \int_{tp(L_u)}^{L_u^{-1}(tp(L_w^{-1}))} L_u(t)dt + 4ls_v^* \int_{tp(L_v)}^{L_v^{-1}(tp(L_w^{-1}))} L_v(t)dt.
\end{aligned} \tag{37}$$

Для выполнения дальнейших преобразований продифференцируем (26):

$$dL_w^{-1}(\alpha) = ls_u^*dL_u^{-1}(\alpha) + ls_v^*dL_v^{-1}(\alpha). \tag{38}$$

Выполняя замену переменных в двух интегралах (37) $L_u(t) = \alpha$, $t = L_u^{-1}(\alpha)$ и $L_v(t) = \alpha$, $t = L_v^{-1}(\alpha)$ соответственно, получим

$$if(L_w^{-1}) = 2tp(L_w) - ls_u^*if(L_u) - ls_v^*if(L_v) + 4ls_u^* \int_{1/2}^{tp(L_w^{-1})} \alpha dL_u^{-1}(\alpha) + 4ls_v^* \int_{1/2}^{tp(L_w^{-1})} \alpha dL_v^{-1}(\alpha). \tag{39}$$

Используя (38), имеем

$$if(L_w^{-1}) = 2tp(L_w) - ls_u^*if(L_u) - ls_v^*if(L_v) + 4 \int_{1/2}^{tp(L_w^{-1})} \alpha dL_w^{-1}(\alpha). \tag{40}$$

После замены в интеграле (40) переменного $L_w^{-1}(\alpha) = t$, $\alpha = L_w(t)$ имеем

$$if(L_w^{-1}) = 2tp(L_w) - 4 \int_{1/2}^{tp(L_w)} L_w(t)dt - ls_u^*if(L_u) - ls_v^*if(L_v). \tag{41}$$

Однако в соответствии с (32)

$$if(L_w^{-1}) = 2tp(L_w) - 4 \int_{1/2}^{tp(L_w)} L(t)dt - if(L_w). \tag{42}$$

Сравнивая два последних выражения, приходим к выводу, что

$$if(L_w) = ls_u^*if(L_u) + ls_v^*if(L_v). \tag{43}$$

Аналогично для правой функции формы

$$if(R_w) = ls_u^*if(R_u) + ls_v^*if(R_v). \tag{44}$$

Итак, из (17), (43), (44), (18) и (19) следует

$$\begin{aligned}
if(\tilde{w}) &= if(\tilde{u} + \tilde{v}) = \frac{(ls_u + ls_v)if(L_w) + (rs_u + rs_v)if(R_w)}{ls_u + ls_v + rs_u + rs_v} = \\
&= \frac{\frac{ls_u if(L_u) + rs_u if(R_u)}{ls_u + rs_u} (ls_u + rs_u) + \frac{ls_v if(L_v) + rs_v if(R_v)}{ls_v + rs_v} (ls_v + rs_v)}{ls_u + ls_v + rs_u + rs_v} = \\
&= \frac{if(\tilde{u})(ls_u + rs_u) + if(\tilde{v})(ls_v + rs_v)}{ls_u + ls_v + rs_u + rs_v} = s_u^*if(\tilde{u}) + s_v^*if(\tilde{v}),
\end{aligned} \tag{45}$$

где $0 \leq s_u^* \leq 1$, $0 \leq s_v^* \leq 1$ – относительные доли спредов НЧ $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ соответственно в спреде суммы – НЧ $\tilde{w} = \tilde{u} + \tilde{v}$. Очевидно, что $s_u^* + s_v^* = 1$.

Окончательно преобразование вектора нечеткости при сложении произвольных унимодальных НЧ LR-типа имеет вид

$$\overline{tf}(\tilde{w}) = \overline{tf}(\tilde{u} + \tilde{v}) = \left\| \frac{if(\tilde{w})}{sf(\tilde{w})} \right\| = \left\| \frac{\frac{sf(\tilde{u})}{sf(\tilde{u}) + sf(\tilde{v})} if(\tilde{u}) + \frac{sf(\tilde{v})}{sf(\tilde{u}) + sf(\tilde{v})} if(\tilde{v})}{sf(\tilde{u}) + sf(\tilde{v})} \right\|, \tag{46}$$

где $if(\tilde{q})$ – математическая нечеткость $\tilde{q}$ (2); $sf(\tilde{q})$ – спрэдовая нечеткость $\tilde{q}$ (3).

Результаты вычислительных экспериментов

Вычислительный эксперимент 1. Проверим положение (33) о связи индексов математической нечеткости функции формы $L(t)$ и обратной по отношению к ней – $L^{-1}(\alpha)$. Пусть функция формы некоторого нечеткого числа – усеченная парабола, т.е. $L(t) = 1 - t^2$. Тогда точка перехода функции формы $tp(L) = 1/\sqrt{2}$, индекс нечеткости $if(L) = 0,391$ [12]. Теоретическое значение индекса нечеткости обратной функции формы $L^{-1}(t) = \sqrt{1-t}$:

$$if(L^{-1}) = 2tp(L) - 4 \int_{1/2}^{tp(L)} L(t) dt - if(L) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{10}{3\sqrt{2}} + \frac{11}{6} - 0,391 = 0,5. \quad (47)$$

Прямое расчетное значение индекса по формуле (29) $if(L^{-1}) = 0,5$.

Вычислительный эксперимент 2. Пусть $\tilde{u}$ – НЧ с гауссовой гладкой функцией принадлежности с параметрами $a=1, m=3, b=5$, а $\tilde{v}$ – НЧ с треугольной ФП с параметрами $a=3, m=4, b=10$, (рисунок 2). Значения индексов математической нечеткости: $if(\tilde{u}) = 0,323$; $if(\tilde{v}) = 0,5$ [12].

Теоретическое значение индекса математической нечеткости суммы $(\tilde{u} + \tilde{v})$

$$if(\tilde{u} + \tilde{v}) = s_u^* if(\tilde{u}) + s_v^* if(\tilde{v}) = \frac{4}{11} \cdot 0,323 + \frac{7}{11} \cdot 0,5 = 0,436. \quad (48)$$

Значения степеней принадлежности суммы $(\tilde{u} + \tilde{v})$ рассчитывали в MathCad непосредственно в соответствии с принципом расширения Л.Заде (5) с шагом дискретизации 0,01 по аргументу. Расчетное значение индекса суммы: 0,436.

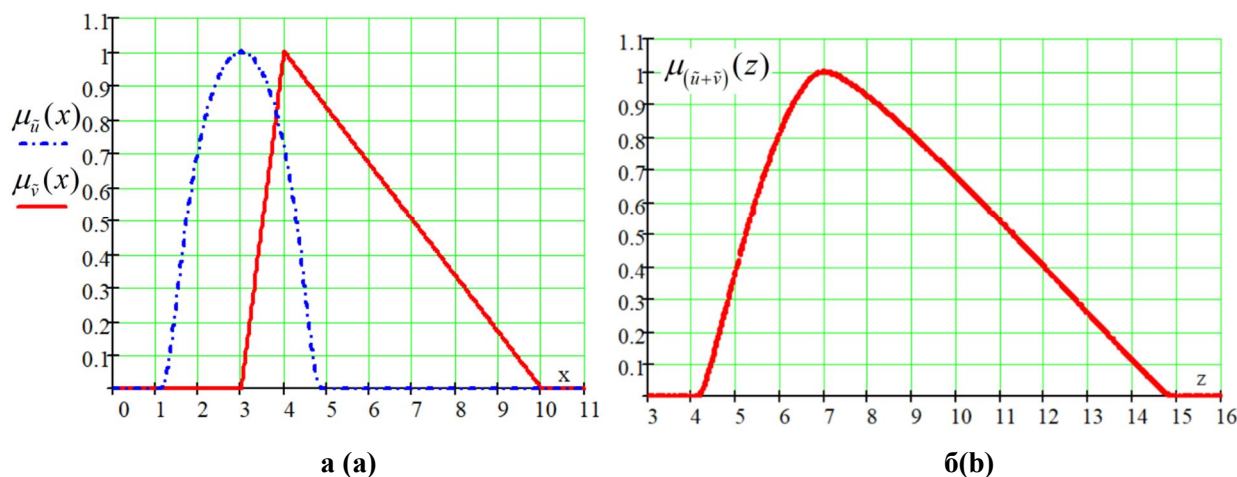


Рисунок 2 – (а) Нечеткие числа $\tilde{u}[3, 2, 2]_{LR}$ (гауссова гладкая функция формы, $if(\tilde{u}) = 0,323$) и $\tilde{v}[4, 1, 6]_{LR}$ (линейная функция формы, $if(\tilde{v}) = 0,5$). (б) $\tilde{u} + \tilde{v} = \tilde{w}[7, 3, 8]_{LR}$, $if(\tilde{w}) = 0,436$

Figure 2 – (a) Fuzzy numbers $\tilde{u}[3, 2, 2]_{LR}$ (smooth Gaussian shape function, $if(\tilde{u}) = 0,323$) and $\tilde{v}[4, 1, 6]_{LR}$ (linear shape function, $if(\tilde{v}) = 0,5$). (b) $\tilde{u} + \tilde{v} = \tilde{w}[7, 3, 8]_{LR}$, $if(\tilde{w}) = 0,436$

Вычислительный эксперимент 3. Пусть $\tilde{u}$ – НЧ LR-типа с функциями формы соответственно $L_u(t) = 0,5(1 - \cos(\pi(t-1)))$ – гармоническая и $R_u(t) = \sqrt{1-t}$ – корень квадратный; параметры $m_u = 3, ls_u = 1, rs_u = 2$. Индексы нечеткости $if(L_u) = 0,363$; $if(R_u) = 0,5$.

Пусть $\tilde{v}$ – НЧ LR-типа с функциями формы: $L_v(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$ – усеченный кардинальный синус и $R_u(t) = 1 - t^2$ – усеченная парабола; параметры $m_v = 4$, $ls_v = 3$, $rs_v = 2$. Индексы нечеткости $if(L_v) = 0,405$; $if(R_v) = 0,391$ (рисунок 3).

Теоретические значения индексов математической нечеткости операндов и результата:

$$\begin{aligned} if(\tilde{u}) &= \frac{ls_u}{ls_u + rs_u} if(L_u) + \frac{rs_u}{ls_u + rs_u} if(R_u) = \frac{1}{3} \cdot 0,363 + \frac{2}{3} \cdot 0,5 = 0,454; \\ if(\tilde{v}) &= \frac{ls_v}{ls_v + rs_v} if(L_v) + \frac{rs_v}{ls_v + rs_v} if(R_v) = \frac{3}{5} \cdot 0,405 + \frac{2}{5} \cdot 0,391 = 0,399; \\ f(\tilde{u} + \tilde{v}) &= \frac{sf(\tilde{u})}{sf(\tilde{u}) + sf(\tilde{v})} if(\tilde{u}) + \frac{sf(\tilde{v})}{sf(\tilde{u}) + sf(\tilde{v})} if(\tilde{v}) = \frac{3}{8} \cdot 0,454 + \frac{5}{8} \cdot 0,399 = 0,420. \end{aligned} \quad (49)$$

Прямое расчетное значение индекса суммы: 0,420.

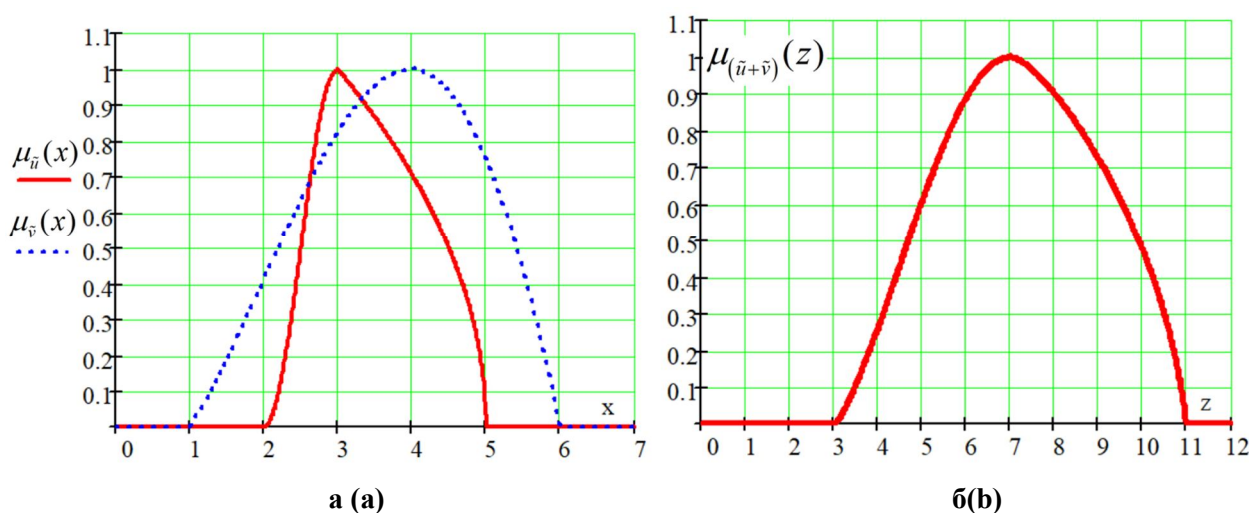


Рисунок 3 – (а) Нечеткие числа $\tilde{u}[3,1,2]_{LR}$ (функции формы: левая – гармоническая, правая – корень квадратный; $if(\tilde{u}) = 0,454$) и $\tilde{v}[4,3,2]_{LR}$ (функции формы: левая – усеченный кардинальный синус, правая – парабола; $if(\tilde{v}) = 0,399$). (б) $\tilde{u} + \tilde{v} = \tilde{w}[7,4,4]_{LR}$, $if(\tilde{w}) = 0,420$

Figure 3 – (a) Fuzzy numbers $\tilde{u}[3,1,2]_{LR}$ (shape functions: left – harmonic, right – square root; $if(\tilde{u}) = 0,454$) and $\tilde{v}[4,3,2]_{LR}$ (shape functions: left – clipped sinc, right – clipped parabola; $if(\tilde{v}) = 0,399$). (b) $\tilde{u} + \tilde{v} = \tilde{w}[7,4,4]_{LR}$, $if(\tilde{w}) = 0,420$

Вычислительный эксперимент 4. Теперь убедимся в применимости формулы (45) в случае полимодальных НЧ.

Пусть $\tilde{u}$ – унимодальный терм с функциями формы: $L_u(t) = 1 - t^3$ – усеченная кубическая парабола и $R_u(t) = 2 \exp(-t^2 \ln(2)) - 1$ – усеченная гауссова; параметры $m_u = 3$, $ls_u = 2$, $rs_u = 3$. Индексы нечеткости $if(L_u) = 0,309$; $if(R_u) = 0,406$.

Пусть $\tilde{v}$ – крайний правый полимодальный терм только с левой функцией формы $L_v(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t}$ – усеченный кардинальный синус; параметры $m_v = 6$, $ls_v = 4$, $rs_v = 2$. Индексы нечеткости $if(L_v) = 0,405$; $if(R_v) = 0$, (рисунок 4).

Теоретические значения индексов математической нечеткости операндов и результата

$$\begin{aligned}
 if(\tilde{u}) &= \frac{ls_u}{ls_u + rs_u} if(L_u) + \frac{rs_u}{ls_u + rs_u} if(R_u) = \frac{2}{5} \cdot 0,309 + \frac{3}{5} \cdot 0,406 = 0,367; \\
 if(\tilde{v}) &= \frac{ls_v}{ls_v + rs_v} if(L_v) + \frac{rs_v}{ls_v + rs_v} if(R_v) = \frac{4}{6} \cdot 0,405 + \frac{2}{6} \cdot 0 = 0,27; \\
 f(\tilde{u} + \tilde{v}) &= \frac{sf(\tilde{u})}{sf(\tilde{u}) + sf(\tilde{v})} if(\tilde{u}) + \frac{sf(\tilde{v})}{sf(\tilde{u}) + sf(\tilde{v})} if(\tilde{v}) = \frac{5}{11} \cdot 0,367 + \frac{6}{11} \cdot 0,27 = 0,314.
 \end{aligned} \tag{50}$$

Прямое расчетное значение индекса суммы: 0,314.

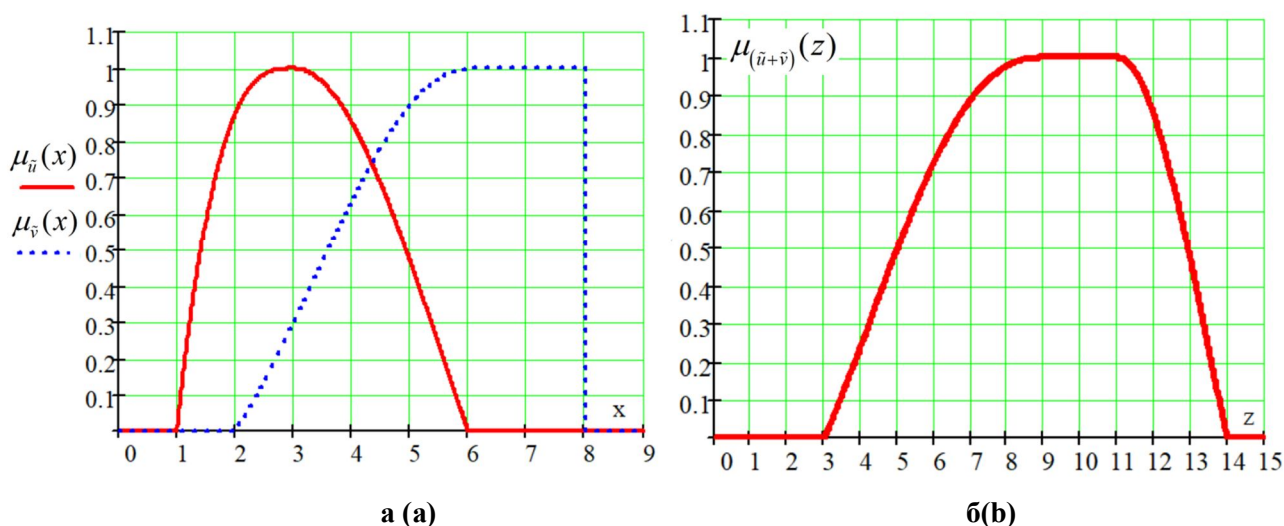


Рисунок 4 – (а) Нечеткие числа $\tilde{u}[3,2,3]_{LR}$ (функции формы: левая – усеченная кубическая парабола, правая – усеченная гауссова; $if(\tilde{u}) = 0,367$) и $\tilde{v}[6,4,2]_L$ (функция формы: левая – усеченный кардинальный синус; $if(\tilde{v}) = 0,27$). (б) $\tilde{u} + \tilde{v} = \tilde{w}$; $if(\tilde{w}) = 0,314$

Figure 4 – (a) Fuzzy numbers $\tilde{u}[3,2,3]_{LR}$ (shape functions: left – clipped cubic parabola, right – clipped Gaussian; $if(\tilde{u}) = 0,367$) and $\tilde{v}[6,4,2]_L$ (shape function: left – clipped sinc; $if(\tilde{v}) = 0,27$). (b) $\tilde{u} + \tilde{v} = \tilde{w}$; $if(\tilde{w}) = 0,314$

Заключение

Данная работа является промежуточной в исследовании проблем алгебры нечеткости. Раскрытие закономерностей преобразования нечеткости в ходе операций над НЧ имеет как теоретический, так и практический интерес. Первый заключается в углублении понимания различий между классической и нечеткой математикой. Второй – в поиске возможностей повышения адекватности систем нечеткого вывода за счет дополнительного учета нечетких свойств термов лингвистических переменных в алгоритмах нечеткого вывода.

Зафиксировано принципиальное отличие между спрэдовой нечеткостью НЧ, порождаемой размахом носителя НЧ и обрабатываемой по обычным правилам интервальной математики, и математической (истинной) нечеткостью, отражающей отличия нечеткого множества от четкого, обусловленные величинами степеней принадлежности элементов. В качестве меры спрэдовой нечеткости принята длина носителя НЧ, а математической нечеткости – индекс нечеткости Ягера с линейной метрикой. Показана независимость спрэдовой и математической нечеткости для унимодальных НЧ LR-типа.

Для исследования отображений НМ применялся принцип расширения (обобщения) Л. Заде. Изучено влияние инъективных отображений НМ с непрерывным ограниченным носителем на нечеткость образа. Обнаружена инвариантность индекса математической нечеткости относительно линейных отображений НМ и, как следствие, при умножении НМ на ненулевое действительное число.

Доказана инвариантность значений индекса нечеткости для операций сложения НЧ LR-типа с одинаковыми функциями формы. Показано, что в случае сложения НЧ с произвольными функциями формы индекс математической нечеткости суммы заключен в пределах от наименьшего до наибольшего из значений индексов слагаемых. Получена расчетная формула индекса математической нечеткости результата сложения: он определяется как средневзвешенное по спрэдам значение индексов нечеткости операндов в спрэде суммы. Все вышеперечисленное полностью применимо и к полимодальным НЧ, используемым при описании крайних термов лингвистических переменных.

Логическим продолжением данной работы станет исследование преобразований нечеткости при нелинейных операциях – умножении и делении НЧ LR-типа, действии на термы лингвистических модификаторов [17], а также распространение полученных результатов на нечеткие отношения.

Библиографический список

1. **De Barros L. C., Bassanezi R. C.** A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics: Theory and Applications. New York: Springer, 2016. 304 p.
2. **Ojha, V., Abraham, A. and Snášel, V.** Heuristic design of fuzzy inference systems: a review of three decades of research. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*. 2019, vol. 85, pp. 845-864.
3. **De Luca A., Termini S.** A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory. *Information and control*. 1972, vol. 20, pp. 301-312.
4. **Kosko B.** Fuzzy entropy and conditioning. *Information Sciences*. 1986, vol. 40, no. 2, pp. 165-174.
5. **Yager R.** On the measure of fuzziness and negation. Part I: membership in the unit interval. *International Journal of General Systems*. 1979, vol. 5, pp. 221-229.
6. **Кауфман А.** Введение в теорию нечетких множеств: пер. с франц. М.: Радио и связь, 1982. 432 с.
7. **Nieradka G., Butkiewicz B.S.** A Method for Automatic Membership Function Estimation Based on Fuzzy Measures. In: Melin, P., Castillo, O., Aguilar, L.T., Kacprzyk, J., Pedrycz, W. (eds.). Heidelberg: Springer, 2007. LNCS (LNAI), vol. 4529, pp. 451-460.
8. **Piegat A.** Fuzzy modeling and control. Heidelberg: Physica-Verlag GmbH, 2010. 728 p.
9. **Бухенский К. В., Конюхов А. Н., Дюбуа А. Б., Сафошкин А. С.** Функция принадлежности нечеткого множества: психофизический подход. // II Международный научно-технический форум СТНО-2019. Сборник трудов / под ред. О.В. Миловзорова. Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2019. Т. 5. С. 51-56.
10. **Zadeh L. A.** Fuzzy sets. *Information and control*. 1965, vol. 8, pp. 338-353.
11. **Bede B.** Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. London: Springer, 2013. 276 p.
12. **Бухенский К. В., Конюхов А. Н., Дюбуа А. Б., Сафошкин А. С.** Быстрый алгоритм расчета индексов нечеткости для унимодальных нечетких чисел LR-типа // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2019. № 70. С. 65-75.
13. **Zadeh L. A.** The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning – I. *Information Sciences*. 1975, vol. 8, pp. 199-249.
14. **Конюхов А. Н., Дюбуа А. Б., Сафошкин А. С.** Основы теории нечетких множеств. Часть 2: учеб. пособие / А. Н. Конюхов, А. Б. Дюбуа, А. С. Сафошкин; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. Рязань, 2018. 108 с.
15. **H. Nguyen.** A Note on the Extension Principle for Fuzzy Sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1978, vol. 64, pp. 369-380.
16. **Abu Aarqob O. A., Shawagfeh N. T. and AbuGhneim O. A.** Functions Defined on Fuzzy Real Numbers According to Zadeh's Extension. *International Mathematical Forum*. 2008, vol. 3(16), pp. 763-776.
17. **Конюхов А. Н., Дюбуа А. Б.** Параметрическое исследование лингвистических модификаторов на нечетких множествах с ограниченными носителями // Современные технологии в науке и образовании – СТНО-2017 / под ред. О. В. Миловзорова. Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2017. Т. 2. С. 131-136.

UDC 519.766.2

FUZZINESS TRANSFORMATIONS ON LINEAR OPERATIONS WITH LR-TYPE FUZZY NUMBERS

K. V. Bukhensky, Ph.D. (Phys. and Math.), associate professor, deputy rector for academic work, RSREU, Ryazan, Russia;

orcid.org/0000-0003-2602-2112, e-mail: bukhensky.k.v@rsreu.ru

A. N. Konyukhov, Ph.D. (Ped.), associate professor, department of higher mathematics, RSREU, Ryazan, Russia;

orcid.org/0000-0002-1523-7110, e-mail: chronos@bk.ru

A. B. Dubois, Ph.D. (Phys. and Math.), associate professor, department of higher mathematics, RSREU, Ryazan, Russia;

orcid.org/0000-0002-5924-4128, e-mail: abd-69@mail.ru

A. S. Safoshkin, Lecturer, department of higher mathematics, RSREU, Ryazan, Russia;

orcid.org/0000-0002-1419-979X, e-mail: safoshkin.a.s@rsreu.ru

The aim of the work is to investigate fuzziness transformations on functional mapping fuzzy sets (FS) and on linear operations (FSs addition and multiplication FS by real number). FS are represented by LR-type fuzzy numbers (FN) used as linguistic variable term sets in fuzzy inference systems. The notions of spread vagueness and math fuzziness were differentiated. As a measure of FS's math fuzziness the Yager's index of fuzziness with linear metric was chosen. Math fuzziness index was shown to be invariant with respect to linear functional transformations of FSs as well as to addition of LR-type FNs with similar shape functions. The formula for math fuzziness index for the sum of LR-type FNs with different arbitrary shape functions is derived. In order to prove theoretical results numerical experiments were accomplished.

Key words: fuzzy set, LR-type fuzzy number, membership function, shape function, index of math fuzziness, spread vagueness, Zadeh's extension principle, alpha-cut of a fuzzy set.

DOI: 10.21667/1995-4565-2020-71-137-150

References

1. **De Barros L. C., Bassanezi R. C.** *A First Course in Fuzzy Logic. Fuzzy Dynamical Systems, and Bi-mathematics: Theory and Applications*. New York: Springer, 2016. 304 p.
2. **Ojha, V., Abraham, A. and Snášel, V.** Heuristic design of fuzzy inference systems: a review of three decades of research. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*. 2019, vol. 85, pp. 845-864.
3. **De Luca A., Termini S.** A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory. *Information and control*. 1972, vol. 20, pp. 301-312.
4. **Kosko B.** Fuzzy entropy and conditioning. *Information Sciences*. 1986, vol. 40, no. 2, pp. 165-174.
5. **Yager R.** On the measure of fuzziness and negation. Part I: membership in the unit interval. *International Journal of General Systems*. 1979, vol. 5, pp. 221-229.
6. **Kaufmann A.** *Vvedenie v teoriju nechetkih mnozhestv*. (Introduction to the theory of fuzzy subsets). M.: Radio i svjaz', 1982, 432 p. (in Russian).
7. **Nieradka, G., Butkiewicz, B. S.** *A Method for Automatic Membership Function Estimation Based on Fuzzy Measures*. In: Melin, P., Castillo, O., Aguilar, L.T., Kacprzyk, J., Pedrycz, W. (eds.) IFSA 2007. LNCS (LNAI), vol. 4529, pp. 451-460. Springer, Heidelberg (2007).
8. **Piegat A.** *Fuzzy modeling and control*. Heidelberg: Physica-Verlag GmbH, 2010. 728 p.
9. **Bukhensky K. V., Konyukhov A. N., Dubois A. B., Safoshkin A. S.** Funkcija prinadlezhnosti nechetkogo mnozhestva: psihofizicheskij podhod. *II Mezhdunarodnyj nauchno-tehnicheskij forum STNO-2019. Sbornik trudov pod red. O. V. Milovzorova. Rjazan': Rjazan. gos. radiotehn. un-t*, 2019, vol. 5, pp. 51-56. (in Russian).
10. **Zadeh L. A.** Fuzzy sets. *Information and control*. 1965, vol. 8, pp. 338-353.
11. **Bede B.** *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. London: Springer, 2013. 276 p.

12. **Bukhensky K. V., Konyukhov A. N., Dubois A. B., Safoshkin A. S.** Bystriy algoritm rascheta indeksov nechetkosti dlja unimodal'nyh nechetkih chisel LR-tipa. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2019, no. 70, pp. 68-75. (in Russian).
13. **Zadeh L. A.** The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. *I. Information Sciences*. 1975, vol. 8, pp. 199-249.
14. **Konyukhov A. N., Dubois A. B., Safoshkin A. S.** *Osnovy teorii nechetkih mnozhestv*. Chast' 2: ucheb. posobie (The basics of fuzzy sets. Part 2). A. N. Konjuhov, A. B. Djubua, A. S. Safoshkin; Rjazan. gos. radiotehn. un-t. Rjazan', 2018, 108 p.
15. **H. Nguyen.** A Note on the Extension Principle for Fuzzy Sets. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 1978, vol. 64, pp. 369-380.
16. **Abu Aarqob O. A., Shawagfeh N. T. and AbuGhneim O. A.** Functions Defined on Fuzzy Real Numbers According to Zadeh's Extension. *International Mathematical Forum*. 2008, vol. 3(16), pp. 763-776.
17. **Konyukhov A. N., Dubois A. B.** Parametricheskoe issledovanie lingvisticheskikh modifikatorov na nechetkih mnozhestvah s ogranichennymi nositeljami. *Sovremennye tehnologii v nauke i obrazovanii – STNO-2017* / pod red. O. V. Milovzorova. Rjazan': Rjazan. gos. radiotehn. un-t, 2017, vol. 2, pp. 131-136. (in Russian).