

УДК 05.13.17

ЗАДАЧА ВЫЧИСЛЕНИЯ КОЛИЧЕСТВА ИНФОРМАЦИИ, СОДЕРЖАЩЕЙСЯ В НЕПРЕРЫВНОМ СИГНАЛЕ

Г. А. Шерозия, д.ф.-м.н., директор ООО «Спектро-Аналитик», Рязань, Россия;

orcid.org/0000-0003-2777-851X, e-mail: fizik@nitigroup.ru

М. Г. Шерозия, к.б.н., научный сотрудник в НИЛ «OpenLab Нейробиологии» Центра научной деятельности и аспирантуры Института фундаментальной медицины и биологии, Казань, Россия,

orcid.org / 0000-0001-6024-7978, e-mail: sherozia@yandex.ru

Акцентируется внимание на том, что известное выражение для дифференциальной энтропии

$$H = - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log p(x) dx$$

приводит к ряду непреодолимых трудностей. В том числе из него выводится выражение для информационной пропускной способности канала связи

$$I = f_m \log\left(\frac{F}{W} + 1\right),$$

которое также имеет некоторые недостатки, в том числе из этого выражения вытекает возможность пропуска каналом связи бесконечной информации при отсутствии шумов. При оценке информации, содержащейся в непрерывном сигнале, предложено опираться на теорему об отсчетах Шеннона – Котельникова. Если по отсчетам можно восстановить исходную функцию, а по функции можно установить все отсчеты, то очевидно, что совокупность отсчетов содержит всю информацию, которая есть в функции. Поэтому установить, какая информация содержится в непрерывном сигнале, можно по отсчетам, соответствующим этому сигналу, и по формулам Шеннона для дискретного случая.

Цель работы: Вывод формулы для оценки информации, содержащейся в непрерывном сигнале.

Ключевые слова: количество информации, содержащейся в непрерывном сигнале; пропускная способность канала связи; теорема об отсчетах Шеннона – Котельникова; дифференциальная энтропия; определение максимальной частоты в сигнале; аддитивность; инвариантность; неравномерные отсчеты; нулевая функция.

DOI: 10.21667/1995-4565-2020-73-59-70

Как известно [1], количество информации, содержащейся в непрерывном сигнале $x = \varphi(t)$, рассматриваемом как случайная функция времени [2], принято определять на основании дифференциальной энтропии:

$$H = - \int_{x=-\infty}^{\infty} p(x) \log p(x) dx, \quad (1)$$

где $p(x)$ – плотность распределения вероятности встретить амплитуду сигнала « x ».

Выражение (1) было постулировано Шенноном в своей классической статье [1] по аналогии с общепринятым и очевидным соотношением для энтропии сообщения, состоящего из дискретных сигналов:

$$H = - \sum_{i=1}^{i=k} p_i \log p_i, \quad (2)$$

где k – количество букв в языке, p_i – вероятность встретить букву « i » в сообщении.

Для упрощения дальнейшего изложения считаем, что после приема сигнала степень неопределенности уменьшается до нуля и принятая информация (I) равна начальной энтропии сигнала, умноженной на количество букв в сообщении (N).

$$I = -N \sum_{i=1}^{i=k} p_i \log p_i. \quad (3)$$

Известно, что выражение (1) имеет определенные недостатки [2-8]:

а) если x -амплитуда и сигнал нормирован, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1, \quad (4)$$

то $p(x)$ является размерной величиной и соответственно под $\log$ в выражении (1) оказывается величина, имеющая размерность $/2/$. В некоторых работах [2, 5] предпринимались попытки исправить данную проблему, введя некоторый размерный интервал l_x , и тогда выражение для энтропии запишется в виде

$$H(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log(p(x)l_x) dx. \quad (5)$$

Однако, как будет показано ниже, такое исправление не может снять все проблемы выражения (1). В частности, чтобы получить из (5) выражение (2), предполагается, что $l_x \delta(0) = 1$. То есть l_x в разных случаях может принимать разные значения, что не может считаться корректным;

б) в некоторых случаях выражение (1) приводит к отрицательным значениям для H и I . Например, для $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ в [1] получено следующее выражение для энтропии: $H = \log \sqrt{2\pi e \sigma^2}$.

Очевидно, что при $\sigma^2 < \frac{1}{2\pi e}$, $H < 0$. Однако известно, что и H , и I не могут быть отрицательными величинами;

в) кроме того, очевидно, что при $\sigma \rightarrow 0$, $H \rightarrow -\infty$. То есть $\delta(x)$ образная последовательность функций на основе Гауссовской функции приводит к расходимости в выражении для дифференциальной энтропии.

Это означает, что выражение (1) имеет еще один недостаток. А именно, для некоторых видов $p(x)$, H и I расходятся. В то же время на основании общих представлений об информации очевидно, что качественно $\delta(x)$ как распределение плотности вероятности по амплитудам соответствует постоянному сигналу, в котором не может содержаться количество информации больше, чем несколько бит. То есть должно быть $I(\delta(x-v)) \rightarrow 0(1)$ При $x \rightarrow v$. Очевидно, что при $x = \varphi(t) = v$, $p(x) \rightarrow \delta(x-v)$;

г) неинвариантность дифференциальной энтропии.

В работе [3] получено выражение для дифференциальной энтропии при переходе от координат « x » к координатам « y ».

$$H_p(y) = H_p(x) - \int p(x) \log \left[J \left(\frac{x}{y} \right) \right] dx, \quad (6)$$

где J – якобиан преобразования плотности распределения вероятности

$$p(y) = p(x) \left| J \left(\frac{x}{y} \right) \right|.$$

То есть дифференциальная энтропия неинвариантна относительно преобразования координат. Рассмотрим инвариантность разности энтропий. Пусть:

$$H_p(x) = - \int p(x) \log p(x) dx;$$

$$H_\varphi(x) = - \int \varphi(x) \log \varphi(x) dx,$$

тогда из выражения (6):

$$H_p(y) = H_p(x) - \int p(x) \log \left[J \left(\frac{x}{y} \right) \right] dx;$$

$$H_\varphi(y) = H_\varphi(x) - \int \varphi(x) \log \left[J \left(\frac{x}{y} \right) \right] dx,$$

и для разности двух энтропий имеем:

$$H_p(y) - H_\varphi(y) = H_p(x) - H_\varphi(x) - \int [p(x) - \varphi(x)] \log J \left(\frac{x}{y} \right) dx,$$

то есть не только сама энтропия изменяется при преобразовании координат, но и разность энтропий тоже меняется. Таким образом, формула для дифференциальной энтропии (и информации) неинвариантна относительно преобразований координат. Очевидно, что исходная формула для энтропии в дискретном случае инвариантна. На указанные факты также обращалось внимание в работе [5];

д) из постулированной формулы для дифференциальной энтропии Шеннон получил не менее известную формулу для информационной пропускной способности канала связи

$$I = f_m \log \left(\frac{F}{W} + 1 \right), \quad (7),$$

где f_m – максимальная частота сигнала, пропускаемого каналом связи, F – мощность сигнала, W – мощность шума. Однако в ряде работ [6-8] авторы утверждают, что в выражении (7) должен присутствовать множитель «2» ($I = 2f_m \log \left(\frac{F}{W} + 1 \right)$). Кроме того, есть определенные сомнения в возможности передачи по каналу связи неограниченного объема информации по мере неограниченного роста $\frac{F}{W}$. Так как выражение (7) однозначно следует из постулированного соотношения (1), то и все потенциальные недостатки (7) вытекают из (1).

Для того, чтобы проанализировать происхождение указанных трудностей (а-д) рассмотрим вывод выражения (1), приведенный, например, в [3].

В дискретном случае энтропия, приходящаяся на один символ сообщения, определяется как

$$H = - \sum_{i=1}^K p_i \log p_i,$$

где p_i – вероятность появления i -го символа, если всего в языке K символов. Эта формула Шеннона является общепризнанной, как некоторый параметр, характеризующий количество информации в сообщении.

Соответственно автор [3] в непрерывном случае, когда $p(x)$ – плотность вероятности, определяет энтропию непрерывного распределения $p(x)$ следующим образом:

$$H = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} (- \sum_i p(x_i) \Delta x_i \log [p(x_i) \Delta x_i]),$$

где весь промежуток от $-\infty$ до $+\infty$ разбивается на малые приращения Δx_i . Преобразуя последнее выражение, можно записать:

$$\begin{aligned} H &= \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} (- \sum_i p(x_i) \log [p(x_i) \Delta x_i] \Delta x_i) + \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} (- \sum_i p(x_i) [\log \Delta x_i] \Delta x_i) = \\ &= - \int p(x) \log p(x) dx + \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} (- \sum_i p(x_i) [\log \Delta x_i] \Delta x_i). \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{Для случая, когда все } \Delta x_i \text{ одинаковы, второй член в выражении (8) легко преобразуется:} \\ - \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} (\sum_i p(x_i) [\log \Delta x_i] \Delta x_i) = - \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \log \Delta x_i \sum_i p(x_i) \Delta x_i = - \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \log \Delta x_i \int p(x) dx = \\ = - \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \log \Delta x_i \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Далее автор отбрасывает расходящийся член в выражении (8) на том основании, что информация определяется как разность энтропий начального и конечного состояний и расходящиеся члены взаимно компенсируются и окончательное выражение для энтропии имеет привычный вид:

$$H = - \int p \log p dx.$$

Однако очевидно, что операции с расходящимися членами требуют особой осторожности и можно предположить, что проблемы, обозначенные в начале статьи (а-д), возникают именно в силу пренебрежения расходящимся членом в выражении (8). Кроме того, если для конечного состояния изначально известно, что $H=0$, то компенсация расходящихся членов также невозможна.

Кроме указанных соображений, есть еще один повод усомниться в корректности вывода, приведенного в [3]. Дело в том, что вывод формулы для дифференциальной энтропии основан на формуле для энтропии, приходящейся на один символ в сообщении

$$H = - \sum_{i=1}^k p_i \log p_i.$$

Но понятие «один символ» в случае сообщения, представляющего собой протяженный непрерывный сигнал, требует отдельного определения. Поэтому представляется более корректным для определения энтропии (информации) непрерывного сигнала использовать более общее выражение для информации, а именно:

$$I = -N \sum_{i=1}^k p_i \log p_i,$$

где k – количество символов в языке, N – число символов в сообщении. Очевидно, что повторение вывода, приведенного в [3] с учетом выражения (3), приведет к появлению множителя N и перед первым слагаемым в выражении (8). Очевидно также, что при $\Delta x_i \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$

и первое слагаемое в выражении (8) также будет стремиться к ∞ . То есть методика вывода дифференциальной энтропии, приведенная в [3], приводит к выводу о том, что энтропия и информация, соответствующие непрерывному сигналу, бесконечны. Однако из самых общих качественных соображений очевидно, что информация, содержащаяся в конечном во времени непрерывном сигнале, конечна. А следовательно вывод формулы для дифференциальной энтропии, приведенный в [3] требует более тщательного анализа.

Проведем такой анализ, основываясь на теореме Шеннона – Котельникова [1, 4, 9] об отсчетах (sampling theorem). В частности для функции одиночного сообщения (single message function), когда $x = \varphi(t) \neq 0$ при $t \geq 0$ и при $t \leq T$.

А кроме того, когда спектр $\varphi(t)$ не содержит частот выше f_m , теорема об отсчетах утверждает, что

$$\varphi(t) = \sum_{i=0}^{N_m} x_i \frac{\sin \pi(2f_m t - i)}{\pi(2f_m t - i)}. \quad (9)$$

Причем $x_i = \varphi\left(t_i = \frac{i}{2f_m}\right)$. Таким образом, ограниченный по времени и по частотам непрерывный сигнал полностью определяется дискретным рядом N своих значений ($N = T \times 2f_m + 1 = N_m + 1$). Причем эти значения (отсчеты) берутся через равные промежутки времени, определяющиеся максимальной частотой спектра сигнала ($\Delta t = \frac{1}{2f_m}$).

Таким образом, согласно теореме Шеннона – Котельникова информация, содержащаяся в N отсчетах, полностью определяет все параметры сигнала $\varphi(t)$ и позволяет его воспроизвести. Согласно представлениям Колмогорова об информации, если один объект позволяет воспроизвести второй объект и наоборот, то информации, заключенные в этих объектах, равны друг другу. Так как по сигналу могут быть полностью определены все параметры отсчетов, а по отсчетам могут быть определены все параметры сигнала, то, следовательно, информация, содержащаяся в сигнале $\varphi(t)$, равна информации, содержащейся в N отсчетах и наоборот (см также [4]).

Поэтому, если считать главной задачей вычисление пропускной способности канала связи, то это можно сделать наиболее корректно, опираясь на теорему об «отсчетах», исходя из физических характеристик сигнала и не прибегая к каким-либо промежуточным предположениям о формуле для энтропии непрерывного сигнала.

Будем исходить из формулы (3)

$$I = -N \sum_{i=1}^k p_i \log p_i$$

и из теоремы отсчетов, которая позволяет определить информацию, содержащуюся в непрерывном сигнале, как информацию, содержащуюся в дискретном ряде отсчетов. Тогда очевидно, что в данном случае количество букв в сообщении равно количеству отсчетов в непрерывном сигнале ($N = T \times 2f_m + 1$).

Рассмотрим сначала наиболее простой случай – сигнал без шума. В этом случае с первого взгляда кажется, что количество букв в эквивалентном языке ∞ , так как сигнал может принимать непрерывный ряд значений. Однако это не так, поскольку следует учитывать только те значения, которые реально встречаются в виде значений отсчетов. Остальные значения можно не учитывать, т. к. в сумму (3) они не входят и для них $p \log p = 0$. Так как нам необходимо оценить максимально возможное содержание информации в сигнале, будем рассматривать случай, когда значения всех отсчетов разные и все они равновероятны. То есть в данном случае количество «букв» в языке равно количеству «букв» в сообщении. Как известно [2], энтропия дискретного сообщения максимальна, когда все буквы встречаются равновероятно. То есть получается, что максимальная информация в непрерывном сигнале может быть рассчитана по числу отсчетов следующим образом ($p_i = \frac{1}{N}$):

$$I = -N \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{N} \log \left(\frac{1}{N} \right) \right) = N \log N. \quad (10)$$

И именно такое значение информации будет предельным для пропускной способности канала связи с предельной частотой пропускания f_m .

Для случая сигнала с шумом можно проделать аналогичное рассмотрение. В этом случае количество букв в сообщении по-прежнему будет N , а количество букв в языке будет равно количеству различных уровней сигнала. Поэтому, если обозначить средний уровень шума W , а средний уровень сигнала F , то количество букв в языке составит $K = \frac{F}{W}$, а количество информации в непрерывном сигнале для равновероятных различных уровней сигнала запишется в виде

$$I = -N \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{k} \log \left(\frac{1}{k} \right) \right) = N \log \left(\frac{F}{W} \right). \quad (11)$$

Крайние случаи (9) и (10) можно объединить общей формулой

$$I(\varphi(t)) = N \log \left(\frac{NF}{F+WN} \right). \quad (12)$$

Из этой формулы видно, что даже в случае $W = 0$ информация в сигнале не бесконечна, а ограничена количеством отсчетов или, говоря другим языком, информация, пропускаемая каналом связи, ограничена максимальной частотой сигнала, пропускаемой этим каналом связи, так как $N = 2Tf_m + 1$.

Отметим, что ни частотная, ни фазовая модуляции не позволяют увеличить количество пропускаемой каналом информации свыше значений (10) и (11). Такие виды модуляции приводят к девиации частот относительно несущей частоты f_0 , и спектр такого промодулированного сигнала будет иметь ширину Δf . Однако известно (смотри, например, [3]), что теорема отсчетов для сигнала, спектр которого изменяется в диапазоне Δf , требует для воспроизведения такого сигнала количество отсчетов $N_{\text{отсч}} = 2T\Delta f$.

Тогда, если вся полоса частот от «0» до $f_{\max}$ разбита на полосы Δf_i , то полное число отсчетов, необходимое для воспроизведения всех промодулированных сигналов составит $N_{\text{отсч}}^{\max} = \sum 2T\Delta f_i = 2T \sum \Delta f_i = 2Tf_{\max}$. Таким образом, информация и в этом случае будет определяться $f_{\max}$ и $N_{\text{отсч}}^{\max}$.

На основе предложенного простейшего вывода пропускной способности канала связи совершенно очевидно, что количество знаков в непрерывном сигнале не f_m , а $2f_m$. Тогда формулу Шеннона (7) следует записать в виде

$$I = 2f_m \log \sqrt{\frac{F}{W}}.$$

То есть по Шеннону получается, что количество уровней сигнала не $\frac{F}{W}$, а $\sqrt{\frac{F}{W}}$. В принципе, конечно, статистическая обработка сигнала, вычитание среднего уровня шумов сделает неустранимым только флуктуации шума, т. е. $\sqrt{W}$. Но и в этом случае количество различных уровней сигнала будет $\frac{F}{\sqrt{W}}$, но не $\sqrt{\frac{F}{W}}$.

Поэтому формула Шеннона $I = 2f_m \log \sqrt{\frac{F}{W}}$ дополнительно показывает принципиальные проблемы постулированного соотношения $H = - \int p \log p \, dx$.

Таким образом, наиболее надежным способом оценки количества информации в непрерывном сигнале следует признать методику сведения непрерывного сигнала к дискретному на основании теоремы об отсчетах.

Однако с учетом чисто академических соображений представляет интерес попытка получения аналитического выражения для информации, содержащейся в непрерывном сигнале.

Пусть имеется непрерывный сигнал $x = \varphi(t)$, рассматриваемый как случайная функция времени, пусть $\varphi(t) \neq 0$ при $0 \leq t \leq T$, пусть максимальное значение x равно $x_{\max}$, а $x_{\min} = 0$ и пусть частотный спектр $\varphi(t)$ ограничен $f_{\max}$, пусть также известна $p(x)$ плотность распределения вероятности встретить амплитуду сигнала « x ».

Тогда на основании выражения (3) можно записать:

$$I(\varphi(t)) = -n \sum_{i=1}^n p(x_i) \Delta x \log[p(x_i) \Delta x].$$

Учитывая изложенное выше и теорему об отсчетах, очевидно, что процесс дискретизации и уменьшения Δx (и увеличения n) следует остановить при $\Delta x = \frac{x_{max}}{N}$, и при $n = N$, где $N = T \cdot 2 f_m + 1$. Очевидно также, что f_{max} для $\varphi(t)$ заведомо не меньше максимальной частоты в $p(x)$.

Отметим, что при дальнейшем уменьшении Δx , получаемое выражение не будет иметь отношения к информации в сигнале $\varphi(t)$, а будет характеризовать информацию, содержащуюся в увеличивающемся количестве отсчетов при $\Delta x \rightarrow 0$ и $n \rightarrow \infty$.

Если процесс дискретизации остановить при $n = N = T \cdot 2 f_m + 1$ и $\Delta x = \frac{x_{max}}{N}$, то выражение для информации приобретет следующий вид:

$$I(\varphi(t)) = -N \sum_{i=1}^N p(x_i) \frac{x_{max}}{N} \log \left(p(x_i) \frac{x_{max}}{N} \right)$$

с учетом, что $N \gg 1$, приведенную сумму можно за счет аппроксимации приближенно записать в виде

$$I(\varphi(t)) \approx -N \int_0^{x_{max}} p(x) \log \left(p(x) \frac{x_{max}}{N} \right) dx. \quad (13)$$

Рассмотрим некоторые свойства полученного выражения (13) для информации, содержащейся в непрерывном сигнале.

1. Из выражения (13) становится понятен физический смысл размерного интервала l_x , введенного в [2]. Из (12) получается, что $l_x = \frac{x_{max}}{N}$. И поэтому l_x уже не изменяется произвольно в различных случаях, а привязан к конкретным параметрам сигнала.

2. Под логарифмом в (13) находится безразмерная величина.

3. При $\varphi(t) = 0$, $I(\varphi(t)) = 0$.

4. $I(\varphi(t)) \geq 0$. Доказывается следующим образом: $I > 0$,

при $-\log \left(p(x) \frac{x_{max}}{N} \right) > 0$, т. е. при $\left(p(x) \frac{x_{max}}{N} \right) < 1$. Но так как $p(x) > 0$ и нормирована $\int_0^{x_{max}} p(x) dx = 1$ и $N \gg 1$, то $p(x) \frac{x_{max}}{N} < 1$ для любого x .

5. Прежде, чем рассмотреть остальные свойства выражения (13), рассмотрим возможные методы определения f_{max} в каком-либо сигнале. Очевидно, что любая методика фиксации f_{max} в реальном сигнале будет означать внесение определенной погрешности в сигнал. И определить, какая погрешность в какую часть сигнала будет внесена, в общем виде достаточно сложно. Тем более, что, например, для $\delta(t)$ Фурье образ $s(u) = 1$, т. е. f_{max} для этого случая равна бесконечности.

Однако при графическом рассмотрении этого вопроса проблема разрешается очень просто. Рассмотрим рисунок 1. Из рисунка очевидно, что если отсчеты выбраны так, что на самый короткий и резкий импульс придется не менее пяти отсчетов, то ошибка при воспроизведении такого импульса не превысит 20 %. Возможно, самая верхняя часть импульса будет сглажена, если отсчеты окажутся чуть смещенными относительно вершины импульса. Вся остальная, менее высокочастотная часть сигнала будет воспроизведена достаточно точно.

Таким образом, с удовлетворительным уровнем точности можно считать, что $f_{max} = \frac{\varphi'_{max}(t)}{\Delta \varphi}$, а самый короткий в сигнале импульс можно воспроизвести пятью отсчетами.

6. Оценим теперь исходя из формулы (13) информацию, содержащуюся в сигнале, имеющем в качестве плотности распределения по амплитудам дельта образную последовательность функций. В качестве такой последовательности возьмем простейший вариант на основе импульса треугольной формы и плотности распределения прямоугольной формы (рисунок 2).

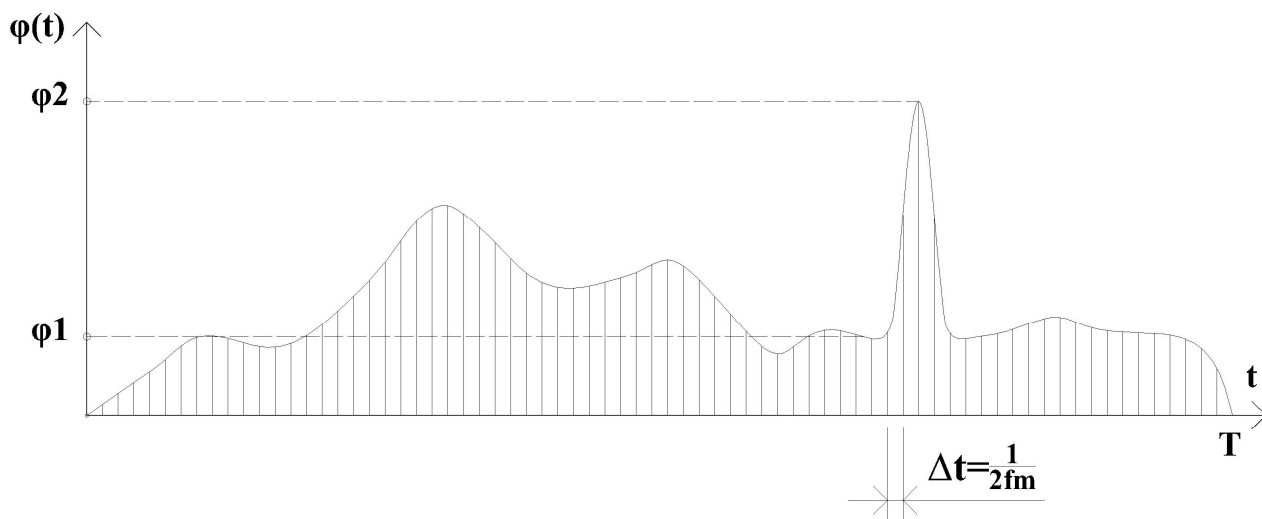


Рисунок 1 – Графическое определение $f_{\max}$ при точности воспроизведения наиболее короткого импульса в сигнале около 20 %

Figure 1 – Graphical determination of $f_{\max}$ with the accuracy of reproducing the shortest pulse in a signal of about 20 %

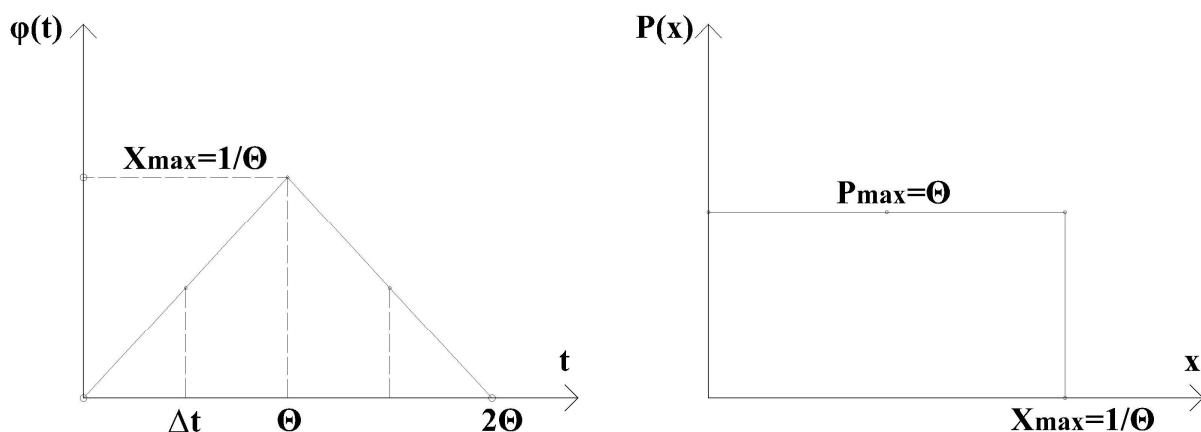


Рисунок 2 – Нормированная плотность распределения вероятности по амплитудам для нормированного импульса треугольной формы

Figure 2 – Normalized density of probability distribution over the amplitudes for a normalized pulse of triangular shape

Подставляя в (13) значения N , $X_{\max}$, $p(x)$, взятые из рисунка 2, получаем для $I \approx 5 \log 5$, то есть значение для I не зависит от длительности импульса и, когда $\Theta \rightarrow \infty$ и $p(x) \rightarrow \delta(t)$, количество информации не изменяется и остается фиксированным. Конкретное значение для I в данном случае является приближенным, так как в самом принципе выбора N заложена определенная погрешность ($\sim 20\%$) воспроизведения формы сигнала. Отметим также, что из приведенных результатов видно, что на один отсчет приходится около одного бита информации.

Из рисунка 2 и формулы (13) следует еще один важный результат. Если $\Theta \rightarrow 0$, то $\varphi(t) \rightarrow \delta(t)$, а $p(x) \rightarrow 0$, но при этом $\int_0^\infty p(x) dx = 1$.

И для этого случая выражение для информации остается прежним, а именно $I = 5 \log 5$, т. е. информация в импульсе $\varphi(t) = \delta(t)$ такая же как в импульсе, для которого $p(x) = \delta(x)$.

Следует обратить отдельное внимание на пару функций, показанных на рисунке 2:

$\varphi(t)$ и $p(x)$. Когда одна из них обращается в δ -функцию, другая превращается в нулевую функцию $z(x)$ (zero function), которая при любых значениях аргумента равна нулю, но $\int_0^\infty z(x) dx = 1$. Такая разновидность обобщенных функций, по-видимому, встречается не только в теории информации, но и в других областях науки.

Например Фурье-образ Гауссова импульса $f(t) = e^{-\pi(t/\theta)^2}$ при $\theta \rightarrow 0$

$c(v) = \theta e^{-\pi(v\theta)^2} \rightarrow Z(v)$ (например, [10]).

Классическое выражение для принципа неопределенности $\Delta x \Delta p \sim \hbar$ также в своей динамике напоминает пару из δ и z функций.

Перечислим кратко некоторые очевидные свойства Z функций:

а) $z(x) = 0$ при $0 \leq x < \infty$.

б) $\int_0^\infty z(x) dx = 1$.

в) $\delta(x)z(x) = \begin{cases} 1, & \text{при } x = 0 \\ 0, & \text{при } x \neq 0. \end{cases}$

г) $\int_0^\infty \delta(x) \cdot z(x) dx = 0$.

д) $\int_0^\infty z'(x) dx = 0$.

ж) Если $\varphi(x) \leq \text{const}$ при $0 < x < x_0$ и $\varphi(x) = 0$ при $x > x_0$, то $\int_0^{x_0} \varphi(x)z(x)dx = 0$, $\int_0^\infty \varphi(x)z(x)dx = 1$

з) Если $0 < \Psi(x) < C_0$ ($C_0 - \text{const}$) при $0 < x < \infty$, то $\int_0^\infty \psi(x)z(x)dx < C_0$.

При определении $p(x)$ по $\varphi(t)$ с использованием рисунка 2 было учтено, что в простейшем случае, когда $x=\varphi(t)$ имеет обратную функцию $t = \Psi(x)$ или состоит из кусков, для каждого из которых имеется обратная функция, то $p(x)$ можно определить по формуле $p(x) = \frac{d\Psi}{dx}$. Для упрощения вычислений можно учесть, что производная от обратной функции равна производной самой функции в минус первой степени. В работе [2] вопрос восстановления вида плотности вероятности для случайной функции времени рассмотрен подробно в частности для случая простой цепи Маркова. Однако описанная процедура достаточно сложная и для практических применений перспективнее по $\varphi(t)$ установить отсчеты, а затем воспользоваться формулами для дискретного случая.

7. Аддитивность выражений (1) и (2) легко доказывается [1] для случая независимых событий, когда $p(i, j) = p(i) \cdot p(j)$. В этом случае легко видеть, что

$$H(x, y) = H(x) + H(y).$$

Однако с практической точки зрения важнее вопрос об аддитивности информации для двух наложившихся друг на друга сообщений. В [1] рассмотрена вероятность длинного сообщения, состоящего из N символов, когда вероятность каждого символа p_i . Тогда символ « i » встретится в сообщении примерно $p_i N$ раз. А для вероятности всего сообщения получаем:

$$P_p = P_1^{p_1 N} * P_2^{p_2 N} * \dots * P_n^{p_n N},$$

где n – количество различных видов букв в сообщении. Из последней формулы легко получить

$$I_p = \log \frac{1}{P_p} = -N \sum_{i=1}^n p_i \log p_i. \quad (14)$$

Предположим теперь, что имеется второе сообщение, состоящее из M букв, каждая из которых встречается в этом выражении с вероятностью p_j . Для этого сообщения вероятность запишется:

$$P = P_{1j}^{p_{1j} M} * P_{2j}^{p_{2j} M} * \dots * P_{kj}^{p_{kj} M},$$

где k – количество различных видов букв во втором сообщении. Если все виды букв в сообщении «один» и «два» независимы, то, записав вероятность объединенного сообщения, легко получить:

$$I_\Sigma = \log \frac{1}{P_p} + \log \frac{1}{P_j} = I_p + I_j.$$

Для случая непрерывных сигналов ситуация с аддитивностью аналогичная случаю дискретных сигналов.

Однако вопрос независимости конкретных сигналов требует отдельного рассмотрения. Например, очевидно, что, если два непрерывных сигнала, имеющих одну и ту же несущую

частоту, наложатся, то в общем сигнале различить информацию от каждого из сложенных сигналов будет проблематично. Видимо, эти сигналы уже нельзя будет считать независимыми. Аналогичная ситуация будет с двумя текстами, состоящими из одинаковых букв, имеющих разные вероятности в каждом из текстов. В связи с рассмотренной ситуацией, по-видимому, можно предложить следующий критерий независимости сообщений: сообщения являются независимыми, если после объединения имеется техническая процедура их разъединения.

8. Инвариантность информации при преобразовании переменных.

Как ранее отмечалось в ряде работ (например [5]) обращалось внимание на неинвариантность выражения (1) для дифференциальной энтропии.

Рассмотрим инвариантность информации при преобразовании переменных, основываясь на полученном в настоящей статье выражении для информации в непрерывном сообщении

$$I(\varphi(t)) = -N \int_0^{x_{\max}} p(x) \log \left[p(x) \frac{x_{\max}}{N} \right] dx.$$

В качестве первого этапа рассмотрения проанализируем инвариантность информации, содержащейся в $\varphi(t)$ и оцениваемой на основании теоремы об отсчетах. Как уже указывалось по теореме Шеннона-Котельникова

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^N x_i \frac{\sin \pi(2f_m t - i)}{\pi(2f_m t - i)}.$$

Здесь $x_i = \varphi\left(t_i = \frac{i}{2f_m}\right)$, $\Delta t = \frac{i}{2f_m}$, а число отсчетов N .

Перейдем теперь от координаты t к координате β : $t = \Psi(\beta)$ и пусть Ψ имеет обратную функцию γ , т. е. $\beta = \gamma(t)$. Тогда выражение (8) преобразуется к виду:

$$\varphi(\Psi(\beta)) = \sum_{i=1}^N x_i \frac{\sin \pi(2f_m \Psi(\beta) - i)}{\pi(2f_m \Psi(\beta) - i)},$$

где $x_i = \varphi(\Psi_i(\beta) = \frac{i}{2f_m})$. Отсюда $\beta_i = \gamma\left(\frac{i}{2f_m}\right)$. То есть в этой системе координат шаги отсчетов будут переменными. Отсчеты с переменным шагом в теории и практике известны уже довольно давно (например, [11]).

Однако как до преобразования, так и после него сигнал полностью определяется своими отсчетами. В преобразованном случае отсчеты располагаются неравномерно, но опять полностью определяют функцию $\varphi(\Psi(\beta))$. Так как в обоих случаях и количество, и амплитуды отсчетов одинаковы, то можно утверждать, что подход к информации в непрерывном сигнале, основанный на теореме отсчетов, инвариантен относительно преобразования координат, как это показано на рисунке 3.

Рассмотрим теперь вопрос о инвариантности выражения (13) для информации. Пусть информация для непрерывного сигнала в координатах « x » равна

$$I(x) = -N \int_0^{x_{\max}} p(x) \log \left[p(x) \frac{x_{\max}}{N} \right] dx.$$

Пусть информация для того же сигнала, но в координатах « y » равна

$$I(y) = -N \int_0^{y_{\max}} p(y) \log \left[p(y) \frac{y_{\max}}{N} \right] dy.$$

Обозначим якобиан преобразования плотности распределения вероятности $J\left(\frac{x}{y}\right)$:

$$p(y) = \left| J\left(\frac{x}{y}\right) \right| \cdot P(x).$$

Отметим, что если фактически $\frac{x_{\max}}{N} = \Delta x$, то $\frac{y_{\max}}{N} = \Delta y = \left| J\left(\frac{y}{x}\right) \right| \frac{y_{\max}}{N}$. Тогда получаем:

$$I(y) \approx -N \int_0^{x_{\max}} p(x) \left| J\left(\frac{x}{y}\right) \right| \log \left(P(x) \left| J\left(\frac{x}{y}\right) \right| \frac{x_{\max}}{N} \left| J\left(\frac{y}{x}\right) \right| \right) * \left| J\left(\frac{y}{x}\right) \right| dx = I(x).$$

Таким образом, выражение (13) для информации инвариантно относительно преобразования координат.

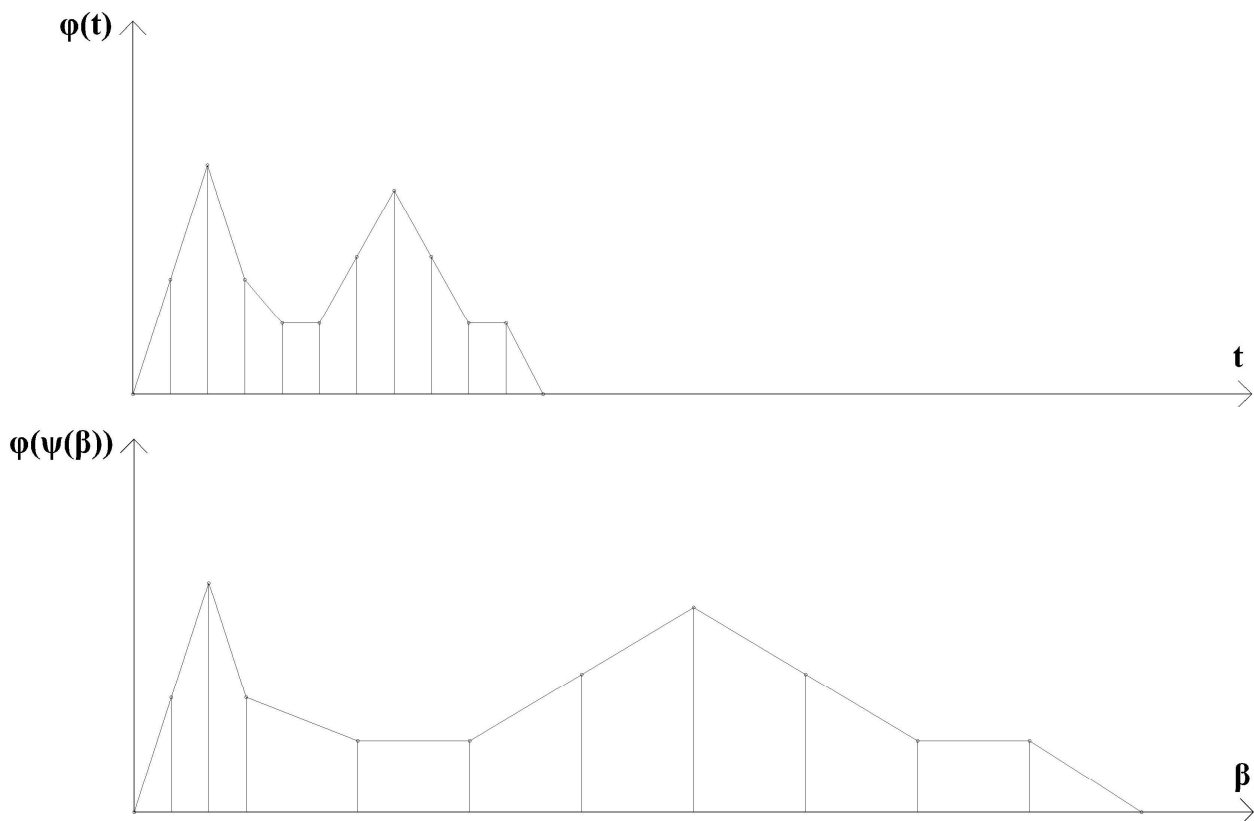


Рисунок 3 – Инвариантность информации в непрерывном сигнале при преобразовании координат

Figure 3 – Invariance of information in a continuous signal during coordinate transformation

Заключение

На основании вышеизложенного можно перечислить основные результаты настоящей статьи.

1. Обращено внимание на то, что известное выражение для дифференциальной энтропии

$$H = - \int_{x=-\infty}^{\infty} p(x) \log p(x) dx$$

приводит к ряду непреодолимых трудностей. В том числе из него выводится выражение для информационной пропускной способности канала связи

$$I = f_m \log \left(\frac{F}{W} + 1 \right),$$

которое также имеет некоторые недостатки, в том числе из этого выражения вытекает возможность пропуска каналом связи бесконечной информации при отсутствии шумов.

2. При оценке информации, содержащейся в непрерывном сигнале, предложено опираться на теорему об отсчетах Шеннона – Котельникова. Если по отсчетам можно восстановить исходную функцию, а по функции можно установить все отсчеты, то очевидно, что совокупность отсчетов содержит всю информацию, которая есть в функции. Поэтому установить, какая информация содержится в непрерывном сигнале, можно по отсчетам, соответствующим этому сигналу, и по формулам Шеннона для дискретного случая.

Шеннон предложил считать информацией содержащейся в сообщении, состоящем из дискретных символов, величину логарифма от обратной вероятности всего сообщения

$$I = \log \frac{1}{p} = -N \sum_{i=1}^n p_i \log p_i,$$

Из этого выражения при знании отсчетов непрерывного сигнала легко выводится, что максимальная информация пропускается каналом связи, имеющим максимальную частоту пропускания f_m без шумов равна

$I_{\max} = N \log N$, где N – число отсчетов ($N = T \times 2f_m + 1$, T – длительность сигнала) с шумами

$$I_{\max} = N \log \frac{F}{W},$$

объединенная формула

$$I_{\max} = N \log \frac{NF}{F + WN}.$$

3. Из того же выражения Шеннона (3) легко вывести оценочную формулу для информации, содержащейся в непрерывном сигнале:

$$I \approx -N \int_0^{x_{\max}} p(x) \log \left(p(x) \frac{x_{\max}}{N} \right) dx.$$

Анализ этой формулы для информации, содержащейся в непрерывном сигнале показал, что выражение (13) лишено недостатков формулы (1):

- под логарифмом безразмерная величина;
- информация всегда положительна;
- даже, когда $\varphi(t) = \delta(t)$ и $p(x) = \delta(x)$, соответствующая этим случаям информация является ограниченной величиной, равной нескольким битам;
- информация для независимых сообщений аддитивна. Предложен критерий независимости сообщений;
- информация инвариантна при преобразовании переменных;
- обращено внимание на пару функций $\varphi(t)$ и $p(x)$, которые могут образовать пару дополняющих друг друга обобщенных функций. Когда одна из них обращается в δ -функцию, другая превращается в нулевую функцию $z(x)$ (zero function), которая при любых значениях аргумента равна нулю, но $\int_0^{\infty} z(x) dx = 1$.

Авторы выражают благодарность за полезные обсуждения Денисову А. Е., Гатиной Н. Г. и Лаврову А. М.

Библиографический список

1. **Шеннон К.** Работы по теории информации и кибернетике пер. с англ. под ред. Р. Л. Добрушина, О.Б. Лупанова. М.: Издательство иностранной литературы, 1963. 829 с.
2. **Пугачев В. С.** Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления // изд. второе, переработанное и дополненное. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 883 с.
3. **Голдман С.** Теория информации: пер. с англ. М.: Издательство иностранной литературы. 1957, 448 с.
4. **Колмогоров А. Н.** Три подхода к понятию количества информации // Проблемы передачи информации. Т.1, вып.1, М., 1965. С 3-11.
5. **Стратонович Р. Л.** Теория информации. М.: Сов. Радио, 1975. 424 с.
6. **Худяков Г., Осипов А.** Развитие теории оценивания пропускной способности систем электро-и радиосвязи // Компоненты и технологии. 2011. № 7. С. 147-154.
7. **Tuller W. G.** Theoretical limitations on the of transmission of information, PIRE, 37,5,468-478, 1949.
8. **Найквист Х.** Некоторые факторы, влияющие на скорость телеграфа // Технический журнал Bell System. 1924. С. 324-346.
9. **Котельников В. А.** О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи // в сб. Всесоюзный энергетический комитет. Материалы к I Всесоюз. съезду по вопросам технической реконструкции дела связи и развития слаботочной промышленности. М.: Управление связи РККА. 1933. С. 1-19.
10. **Бриллюэн Л.** Наука и теория информации: пер. с англ. М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. 392 с.
11. Аналого-цифровое преобразование, аналоговые устройства / под ред. **Кестера У.** 2004. гл. 2. Newnes, глава 2, 2005.

UDC 05.13.17

CALCULATING THE AMOUNT OF INFORMATION CONTAINED IN A CONTINUOUS SIGNAL

G. A. Sheroziya, Dr. Sc (Phys. and Math), Director of Spectro-Analytic LLC, Ryazan, Russia; orcid.org/0000-0003-2777-851X, e-mail: fizik@nitigroup.ru

M. G. Sheroziya, Ph.D., Researcher at the Research Laboratory «OpenLab Neurobiology» of the Center for Scientific Activity and Postgraduate Studies, Institute of Fundamental Medicine and Biology, Kazan, Russia, orcid.org/0000-0001-6024-7978, e-mail: sherozia@yandex.ru

The article notes that the well-known expression for differential entropy

$$H = -\int_{-\infty}^{\infty} p(x) \log p(x) dx$$

leads to a number of insurmountable difficulties. In particular, an expression for information throughput of a communication channel being derived from it

$$I = f_m \log\left(\frac{F}{W} + 1\right),$$

also has some drawbacks, including the possibility of the communication channel to transmit infinite information in the absence of noise.

Evaluating the information contained in a continuous signal, the authors have proposed to rely on the Shannon-Kotelnikov theorem on samplings. If the original function can be restored from the samplings, and all the samplings can be set from the function, then the set of samplings obviously contains all the information presented in the function. Therefore, it is possible to establish what information is contained in a continuous signal by the samplings corresponding to this signal and by the Shannon formulas for a discrete case.

The aim of work is to derive a formula for evaluating the information contained in a continuous signal.

Key words: amount of information contained in a continuous signal; communication channel bandwidth; Shannon-Kotelnikov sampling theorem; differential entropy; determination of the maximum frequency in the signal; additivity; invariance; uneven samplings; zero function.

DOI: 10.21667/1995-4565-2020-73-59-70

References

1. **Shannon K.** *Raboty po teorii informacii i kibernetike* (Works on information theory and cybernetics) per. s angl. pod red. R. L. Dobrushina, O.B. Lupanova Moscow: Izdatel'stvo inostrannoj literatury. 1963, 829 p. (in Russian).
2. **Pugachev V. S.** *Teoriya sluchajnyh funkcij i ee primeneniye k zadacham avtomaticheskogo upravleniya* (Theory of random functions and its application to problems of automatic control, second revised and enlarged edition) izd. vtoree, pererabotannoe i dopolnennoe. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury. 1960, 883 p. (in Russian).
3. **Goldman S.** *Teoriya informacii* (Information Theory): per. s angl. Moscow: Izdatel'stvo inostrannoj literatury. 1957, 448 p. (in Russian).
4. **Kolmogorov A. N.** Tri podhoda k ponyatiyu kolichestva informacii. *Problemy peredachi informacii*. Vol.1, issue.1, 1965, pp. 3-11. (in Russian).
5. **Stratonovich R. L.** *Teoriya informacii* (Information theory). Moscow: Sov. Radio. 1975, 424 p. (in Russian).
6. **Hudiyakov G., Osipov A.** Razvitie teorii ocenivaniya propusknnoj sposobnosti sistem elektro- i radiosvyazi. *Komponenty i tekhnologii*. 2011, no. 7, pp. 147-154. (in Russian).
7. **Tuller W. G.** *Theoretical limitations on the of transmission of information*, PIRE, 37,5,468-478, 1949.
8. **Najkvist H.** Nekotorye faktory, vliyayushchie na skorost' telegrafa. *Tekhnicheskij zhurnal Bell System*. 1924, pp. 324-346. (in Russian).
9. **Kotel'nikov V. A.** O propusknnoj sposobnosti «efira» i provoloki v elektrosvyazi v sb. *Vsesoyuznyj energeticheskij komitet. Materialy k I Vsesoyuz. s"ezdu po voprosam tekhnicheskoy rekonstrukcii dela svyazi i razvitiya slabotochnoj promyshlennosti*. Moscow: Upravlenie svyazi RKKA. 1933, pp. 1-19. (in Russian).
10. **Brillyuen L.** *Nauka i teoriya informacii* (Science and theory of information): per. s angl. Moscow: Gosudarstvennoe izdatel'stvo fiziko-matematicheskoy literatury. 1960, 392 p. (in Russian).
11. *Analogo-cifrovoye preobrazovanie, analogovye ustroystva* (Analog-to-digital conversion, analog devices) pod red. **Kestera U.** 2004. vol. 2. Newnes, vol 2, 2005. (in Russian).