УДК 519.766.2

# ОСОБЕННОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НЕЧЕТКОСТИ ПРИ ОПЕРАЦИИ УМНОЖЕНИЯ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ LR-ТИПА

**К. В. Бухенский,** к.ф-м.н., доцент, заведующий кафедрой ВМ РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0003-2602-2112, e-mail: bukhensky.k.v@rsreu.ru
**А. Н. Конюхов,** к.п.н., доцент кафедры ВМ РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0002-1523-7110, e-mail: chronos@bk.ru
**А. Б. Дюбуа,** к.ф-м.н., доцент кафедры ВМ РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0002-5924-4128, e-mail: abd-69@mail.ru
**А. С. Сафошкин,** ст. преподаватель кафедры ВМ РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0002-1419-979X, e-mail: safoshkin.a.s@rsreu.ru

***Цель работы*** *– исследовать преобразование нечеткости в результате операции умножения нечетких чисел (НЧ) LR-типа в соответствии с принципом расширения Л. Заде. Работа является продолжением ранее выполненного исследования трансформаций нечеткости при линейных преобразованиях нечетких множеств, в частности при сложении НЧ. В качестве меры математической нечеткости использован индекс нечеткости Ягера с линейной метрикой Хэмминга. Теоретически обоснованы условия инвариантности, увеличения и уменьшения нечеткости, а также возможные пределы этих изменений в результате умножения НЧ LR-типа. Выведены соответствующие расчетные формулы. Проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие корректность теоретических выводов.*

***Ключевые слова:*** *нечеткое множество, нечеткое число LR-типа, функция принадлежности, функция формы, индекс математической нечеткости, спрэдовая нечеткость, принцип расширения Заде, альфа-сечение нечеткого множества.*

**DOI:** 10.21667/1995-4565-2020-73-83-96

## Введение

Известно, что антецедентами в системах нечеткого вывода (FIS) являются нечеткие числа (НЧ), представляющие собой особый подкласс нечетких множеств (НМ) [1, 2]. Следовательно, усовершенствование математического обеспечения арифметических и логических операций над НЧ может наметить новые пути повышения эффективности управления техническими системами на нечеткой логике. Одним из таких направлений может быть исследование влияния нечетких свойств антецедентов FIS и операций над ними на нечеткие свойства консеквента. Обоснование такой позиции представлено в [3, 4].

Данная работа является очередной частью исследования «Трансформации нечеткости в FIS», на первом этапе которого систематизировались подходы к измерению нечеткости НЧ LR-типа при помощи различных неметрических и метрических индексов [3]; на втором – закономерности преобразования нечеткости в результате линейных операций над НЧ, в том числе операции их сложения [4, 5]. Были получены следующие результаты.

1. Разграничены понятия спрэдовой нечеткости, определяемой размахом (спрэдом) носителя НЧ, преобразуемой по общеизвестным правилам интервальной арифметики, и математической (истинной) нечеткостью. Последняя может быть описана интегральным показателем – индексом нечеткости, отражающим совокупное распределение степеней принадлежности элементов НМ по отношению к уровню максимальной неопределенности – степени принадлежности 0,5. Показана независимость индекса математической нечеткости (индекса нечеткости Ягера, Кауфмана) от величины спрэда для унимодальных НЧ LR-типа.

2. Рассчитана таблица значений индексов математической нечеткости НЧ, наиболее часто применяемых в качестве терм-множеств в FIS, заданных своими функциями принадлежности (ФП). Показано, что значения индексов специфичны по отношению к функциям формы НЧ. Это наблюдение позволило предложить простой алгоритм расчета индексов нечеткости унимодальных НЧ LR-типа, основанный на таблице значений индексов функций формы и взвешивании их вклада в суммарную нечеткость пропорционально спрэдам.

3. Показана инвариантность индекса математической нечеткости относительно линейных преобразований НМ с непрерывным носителем и, как следствие, при умножении НЧ на ненулевое действительное число.

4. Доказана инвариантность индекса нечеткости относительно операций сложения НЧ LR-типа одинакового класса (треугольное и треугольное, гауссово и гауссово и т.д).

5. Обосновано, что при сложении НЧ LR-типа разных классов (например, гармоническое и треугольное) индекс математической нечеткости суммы ограничен значениями индексов слагаемых. Рассчитывается как средневзвешенное по длинам носителей операндов значение.

Все сформулированные выше положения распространяемы и на случай полимодальных НЧ, применяемых в качестве крайних терм-множеств в FIS, так как элементы ядра не вносят дополнительного вклада в абсолютную меру нечеткости, однако увеличивают базу для исчисления индекса, снижая значение последнего.

В данной статье приведены результаты исследований эффектов операции умножения НЧ LR-типа на нечеткость результата.

**Теоретическая часть**

Основные используемые определения

Нечеткое подмножество $\widetilde{A}$ универсального множества $U$ – это совокупность всех пар вида $\widetilde{A} = \{< x \in U,\ \mu_{\widetilde{A}}(x) >\}$, где $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ – функция принадлежности (ФП) элемента $x$ множеству $\widetilde{A}$, $0 \le \mu_{\widetilde{A}}(x) \le 1$ [6]. Устоявшийся термин – нечеткое множество (НМ).

Совокупность всевозможных НМ, заданных на универсуме $U$, будем обозначать $\mathcal{F}(U)$.

Носитель НМ $\widetilde{A}$ – четкое множество $\mathrm{supp}(\widetilde{A}) = \{x \in U \mid \mu_{\widetilde{A}}(x) > 0\}$.

Альфа-сечение (α-сечение) НМ – четкое множество $A_\alpha = \{x \in U \mid \mu_{\widetilde{A}}(x) \ge \alpha\}$, $0 \le \alpha \le 1$.

Высота непустого НМ $\widetilde{A}$ – $\mathrm{height}(\widetilde{A}) = \max\limits_{x \in \mathrm{supp}(\widetilde{A})} \mu_{\widetilde{A}}(x)$.

Ядро НМ – четкое множество $\mathrm{core}(\widetilde{A}) = \{x \in U \mid \mu_{\widetilde{A}}(x) = 1\}$.

Выпуклое $\widetilde{A}$ – $\mu_{\widetilde{A}}(x)$: $\mu_{\widetilde{A}}(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \min(\mu_{\widetilde{A}}(x_1), \mu_{\widetilde{A}}(x_2)), \forall \lambda \in [0,1]$, $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{supp}(\widetilde{A})$.

Нечеткое число (НЧ) – это нечеткое множество $\widetilde{A}$, заданное своей функцией принадлежности $\mu_{\widetilde{A}}(x)$ на универсуме $U = \mathbb{R}$ – множестве всех действительных чисел, удовлетворяющее, по меньшей мере, следующим трем свойствам: 1) $\mathrm{height}(\widetilde{A}) = 1$; 2) $\widetilde{A}$ – выпуклое НМ; 3) $\mathrm{supp}(\widetilde{A})$ – ограниченное множество [1, 7]. НЧ обозначаем буквами $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$.

Обычно FIS оперирует терм-множествами, представляющими собой числа *LR*-типа:

$$\mu_{LR}(x) = [m, ls, rs]_{LR}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m-x}{ls}\right), & \text{если } m - ls \le x \le m, \quad ls > 0, \\ R\left(\dfrac{x-m}{rs}\right), & \text{если } m < x \le m + rs, \quad rs > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{1}$$

где $m$ – ядро НЧ; $ls$ и $rs$ – левый и правый спрэды НЧ; $L(t)$, $R(t)$: $[0,1]\to[0,1]$ – левая и правая функции формы, т.е. непрерывные убывающие функции, такие что $R(0)=L(0)=1$ и $R(1)=L(1)=0$, [1]. Запись $f(t)\in F[0,1]$ означает, что $f(t)$ является функцией формы.

Мера математической нечеткости НМ $mf(\widetilde{A})$ (measure of fuzziness) – всякая функция на $\mathcal{F}(U)$, удовлетворяющая совокупности условий 1-4:

1. $(mf(\widetilde{A})=0)\Leftrightarrow((\mu_{\widetilde{A}}(x)=1)\vee(\mu_{\widetilde{A}}(x)=0)\ \forall x\in U)$.
2. $(\mu_{\widetilde{A}}(x)=0,5\ \ \forall x\in U)\Rightarrow(mf(\widetilde{A})=\max\limits_{\widetilde{X}\in\mathcal{F}(U)} mf(\widetilde{X}))$.
3. $\left.\begin{matrix}\mu_{\widetilde{A}}(x)\le\mu_{\widetilde{B}}(x), \text{ если } \mu_{\widetilde{B}}(x)\le 0,5\\ \mu_{\widetilde{A}}(x)\ge\mu_{\widetilde{B}}(x), \text{ если } \mu_{\widetilde{B}}(x)\ge 0,5\end{matrix}\right\}\Rightarrow(mf(\widetilde{A})\le mf(\widetilde{B}))$.
4. $mf(\widetilde{A})=mf(\overline{\widetilde{A}})$, где $\overline{\widetilde{A}}$ – дополнение НМ $\widetilde{A}$ до универсума $U$, причем $\mu_{\overline{\widetilde{A}}}(x)=1-\mu_{\widetilde{A}}(x),\ \forall x\in U$ [8].

Если $0\le mf(\widetilde{A})\le 1$, то мера называется индексом математической нечеткости НМ – $if(\widetilde{A})$ или просто индексом нечеткости.

Спрэдовая нечеткость $sf(\tilde{u})$ – длина носителя НЧ $\tilde{u}$, причем в случае чисел $LR$-типа (1)

$$sf(\tilde{u})=\text{length}(\text{supp}(\tilde{u}))=b-a=ls+rs, \tag{2}$$

где $a=m-ls$, $b=m+rs$.

Математический инструментарий исследования

Для проведения настоящего исследования ввиду удобства преобразований и вычислений выбран индекс нечеткости Ягера с линейной метрикой Хэмминга на $(a,b)$=supp$(\widetilde{A})$, [3,8]:

$$if(\widetilde{A})=1-\frac{1}{b-a}\int_a^b\left|2\mu_{\widetilde{A}}(x)-1\right|dx. \tag{3}$$

Операции над НЧ выполнялись на основе принципа обобщения Заде (ZEP) и альфа-уровневой его модификации [1, 9].

*Принцип обобщения Заде.* Пусть задано отображение $f: X_1\times X_2\times\ldots\times X_n\to Y$, где $X_i, Y\subseteq\mathbb{R}$ – универсальные множества, а $X_1\times X_2\times\ldots\times X_n$ – декартово произведение множеств. Пусть $\widetilde{A}_i$ – некоторые нечеткие подмножества универсумов $X_1, X_2,\ldots,X_n$ соответственно. Отображение $\hat{f}$ называется нечетким обобщением отображения $f$, если его действие порождает нечеткое подмножество $\widetilde{B}=\hat{f}(\widetilde{A}_1,\widetilde{A}_2,\ldots,\widetilde{A}_n)$ универсума $Y$ с ФП:

$$\mu_{\widetilde{B}}(y)=\begin{cases}\sup\limits_{(x_1,\ldots,x_n)\in f^{-1}(y)}\min(\mu_{\widetilde{A}_1}(x_1),\ldots,\mu_{\widetilde{A}_n}(x_n)), \text{ если } f^{-1}(y)\ne\varnothing,\\ 0, \text{ если } f^{-1}(y)=\varnothing,\end{cases} \tag{4}$$

где $f^{-1}(y)=\{(x_1,\ldots,x_n)|\ f(x_1,\ldots,x_n)=y\}$ – множество всех прообразов элемента $y$.

Для непрерывного случая удобнее переформулировать (4) в терминах $\alpha$-сечений.

Пусть $f: X\to Y$ – непрерывное отображение, $\tilde{u}$ – нечеткое число, заданное на носителе $X$. Тогда имеет место

$$[\hat{f}(\tilde{u})]_\alpha=f(u_\alpha),\ \ \forall\alpha: 0\le\alpha\le 1. \tag{5}$$

**Результаты теоретического исследования**

В качестве операндов рассматривались только унимодальные нечеткие числа $LR$-типа с непрерывными ограниченными носителями на универсуме $\mathbb{R}$. Полимодальный случай легко свести к унимодальному, как отмечалось выше.

Рассмотрим преобразование нечеткости в результате операции умножения положительных НЧ $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$, т.е. таких, что $(\operatorname{supp}\tilde{u} \subset \mathbb{R}^+) \wedge (\operatorname{supp}\tilde{v} \subset \mathbb{R}^+)$.

Из принципа расширения в форме (5) следует, что произведением $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ будет нечеткое множество $\tilde{w} = (\tilde{u} \cdot \tilde{v})$ такое, что

$$(\tilde{w})_\alpha = (\tilde{u} \cdot \tilde{v})_\alpha = u_\alpha \cdot v_\alpha, \ 0 \le \alpha \le 1. \tag{6}$$

Запишем произвольное $\alpha$-сечение НЧ $\tilde{u} = [m_u, ls_u, rs_u]_{L_u R_u}$ (1) в виде промежутка $u_\alpha = [\underline{u_\alpha}, \overline{u_\alpha}],\ 0 \le \alpha \le 1$:

$$\begin{cases} L_u\left(\dfrac{m_u - \underline{u_\alpha}}{ls_u}\right) = \alpha \\ R_u\left(\dfrac{\overline{u_\alpha} - m_u}{rs_u}\right) = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m_u - \underline{u_\alpha}}{ls_u} = L_u^{-1}(\alpha) \\ \dfrac{\overline{u_\alpha} - m_u}{rs_u} = R_u^{-1}(\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{u_\alpha} = m_u - ls_u L_u^{-1}(\alpha) \\ \overline{u_\alpha} = m_u + rs_u R_u^{-1}(\alpha). \end{cases} \tag{7}$$

Существование однозначных обратных функций $L_u^{-1}(\alpha)$ и $R_u^{-1}(\alpha)$ обеспечено монотонностью непрерывных функций формы $L_u(t)$ и $R_u(t)$. Аналогично $\alpha$-сечение НЧ $\tilde{v} = [m_v, ls_v, rs_v]_{L_v R_v}$ – это отрезок

$$v_\alpha = [\underline{v_\alpha}, \overline{v_\alpha}] = [m_v - ls_v L_v^{-1}(\alpha),\ m_v + rs_v R_v^{-1}(\alpha)]. \tag{8}$$

Исследуем умножение НЧ в самом общем случае – с различными функциями формы операндов с каждой стороны: $L_u(t) \ne L_v(t),\ R_u(t) \ne R_v(t)$.

В соответствии с (5)-(8) запишем $\alpha$-сечения произведения, учитывая, что НЧ положительны:

$$\begin{aligned} (\tilde{w})_\alpha &= (\tilde{u} \cdot \tilde{v})_\alpha = u_\alpha \cdot v_\alpha = [\underline{u_\alpha} \cdot \underline{v_\alpha},\ \overline{u_\alpha} \cdot \overline{v_\alpha}] = \\ &= [(m_u - ls_u L_u^{-1}(\alpha))(m_v - ls_v L_v^{-1}(\alpha)),\ (m_u + rs_u R_u^{-1}(\alpha))(m_v + rs_v R_v^{-1}(\alpha))]. \end{aligned} \tag{9}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \underline{u_\alpha} \cdot \underline{v_\alpha} &= m_u m_v - m_v ls_u L_u^{-1}(\alpha) - m_u ls_v L_v^{-1}(\alpha) + ls_u ls_v L_u^{-1}(\alpha) L_v^{-1}(\alpha), \\ \overline{u_\alpha} \cdot \overline{v_\alpha} &= m_u m_v + m_v rs_u R_u^{-1}(\alpha) + m_u rs_v R_v^{-1}(\alpha) + rs_u rs_v R_u^{-1}(\alpha) R_v^{-1}(\alpha). \end{aligned} \tag{10}$$

Подобно тому, как это сделано в [4], легко показать, что $\tilde{w} = \tilde{u} \cdot \tilde{v}$ является нечетким числом $LR$-типа, то есть существуют функции формы $L_w(t), R_w(t) \in F[0,1]$ такие, что

$$\begin{cases} ls_w L_w^{-1}(\alpha) = m_v ls_u L_u^{-1}(\alpha) + m_u ls_v L_v^{-1}(\alpha) - ls_u ls_v L_u^{-1}(\alpha) L_v^{-1}(\alpha) \\ rs_w R_w^{-1}(\alpha) = m_v rs_u R_u^{-1}(\alpha) + m_u rs_v R_v^{-1}(\alpha) + rs_u rs_v R_u^{-1}(\alpha) R_v^{-1}(\alpha) \end{cases},\ 0 \le \alpha \le 1 \tag{11}$$

При $\alpha = 0$ из (11) получаем левый $ls_w$ и правый $rs_w$ спрэды произведения $\tilde{w}$:

$$ls_w = m_v ls_u + m_u ls_v - ls_u ls_v; \quad rs_w = m_v rs_u + m_u rs_v + rs_u rs_v. \tag{12}$$

Обратные функции формы произведения:

$$\begin{aligned} L_w^{-1}(\alpha) &= \frac{m_v ls_u L_u^{-1}(\alpha) + m_u ls_v L_v^{-1}(\alpha) - ls_u ls_v L_u^{-1}(\alpha) L_v^{-1}(\alpha)}{ls_w}, \\ R_w^{-1}(\alpha) &= \frac{m_v rs_u R_u^{-1}(\alpha) + m_u rs_v R_v^{-1}(\alpha) + rs_u rs_v R_u^{-1}(\alpha) R_v^{-1}(\alpha)}{rs_w}, \end{aligned} \tag{13}$$

где $L_u^{-1}(\alpha), L_v^{-1}(\alpha), R_u^{-1}(\alpha), R_v^{-1}(\alpha) \in F[0,1]$.

Перепишем первое выражение (13) через приведенные величины:

$$L_w^{-1}(\alpha) = ls_u^* L_u^{-1}(\alpha) + ls_v^* L_v^{-1}(\alpha) - ls_{uv}^* L_{uv}^{-1}(\alpha), \tag{14}$$

где $L_{uv}^{-1}(\alpha) = L_u^{-1}(\alpha)L_v^{-1}(\alpha) \in F[0,1]$; $ls_u^* = \dfrac{m_v ls_u}{ls_w}$, $ls_v^* = \dfrac{m_u ls_v}{ls_w}$ – веса изолированного вклада левых функций формы чисел $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ соответственно в величину $L_w^{-1}(\alpha)$; $ls_{uv}^* = \dfrac{ls_u ls_v}{ls_w}$ – вес отрицательного сочетанного вклада левых функций формы сомножителей в $L_w^{-1}(\alpha)$. Легко показать, что для положительных НЧ $0 \le ls_u^* \le 1$, $0 \le ls_v^* \le 1$, $0 \le ls_{uv}^* \le 1$, $ls_u^* + ls_v^* - ls_{uv}^* = 1$.

Аналогично перепишем второе выражение (13):

$$R_w^{-1}(\alpha) = rs_u^* R_u^{-1}(\alpha) + rs_v^* R_v^{-1}(\alpha) + rs_{uv}^* R_{uv}^{-1}(\alpha), \tag{15}$$

где $R_{uv}^{-1}(\alpha) = R_u^{-1}(\alpha)R_v^{-1}(\alpha) \in F[0,1]$; $rs_u^* = \dfrac{m_v rs_u}{rs_w}$, $rs_v^* = \dfrac{m_u rs_v}{rs_w}$ – веса изолированного вклада правых функций формы чисел $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ соответственно в величину $R_w^{-1}(\alpha)$; $rs_{uv}^* = \dfrac{rs_u rs_v}{rs_w}$ – вес положительного сочетанного вклада правых функций формы сомножителей в $R_w^{-1}(\alpha)$. Легко показать, что $0 \le rs_u^* \le 1$, $0 \le rs_v^* \le 1$, $0 \le rs_{uv}^* \le 1$. Очевидно, что $rs_u^* + rs_v^* + rs_{uv}^* = 1$.

Ранее в [4] нами было доказано, что

$$(L_w^{-1} = ls_u^* L_u^{-1}(\alpha) + ls_v^* L_v^{-1}(\alpha)) \wedge (ls_u^* + ls_v^* = 1) \Rightarrow (if\left(L_w\right) = ls_u^* if(L_u) + ls_v^* if(L_v)). \tag{16}$$

Имеем из (14)-(16):

$$\begin{aligned} if(L_w) &= \frac{m_v ls_u}{ls_w} if(L_u) + \frac{m_u ls_v}{ls_w} if(L_v) - \frac{ls_u ls_v}{ls_w} if(L_{uv}), \\ if(R_w) &= \frac{m_v rs_u}{rs_w} if(R_u) + \frac{m_u rs_v}{rs_w} if(R_v) + \frac{rs_u rs_v}{rs_w} if(R_{uv}). \end{aligned} \tag{17}$$

$L_{uv}(t)$ мы обозначили функцию, обратную по отношению к функции

$$L_{uv}^{-1}(\alpha) = L_u^{-1}(\alpha)L_v^{-1}(\alpha). \tag{18}$$

Вид функции $L_{uv}(t)$ зависит от вида функций $L_u^{-1}(\alpha), L_v^{-1}(\alpha)$, которые, в свою очередь, зависят от вида функций $L_u(t)$, $L_v(t)$. Поэтому представить связь между индексами нечеткости $if(L_u)$, $if(L_v)$, $if(L_{uv})$ в общем виде не удалось. Более того, выразить явно функцию $L_{uv}(t)$ представляется возможным лишь в случае простейших функций $L_u(t)$, $L_v(t)$. Сказанное, естественно, справедливо и в отношении функции $R_{uv}(t)$.

Индекс нечеткости результата рассчитаем по взвешенной формуле, обоснованной нами в [3], с учетом (17):

$$\begin{aligned} if\left(\tilde{w}\right) &= if(\tilde{u}\cdot\tilde{v}) = \frac{ls_w if(L_w) + rs_w if(R_w)}{ls_w + rs_w} = \\ &= \frac{m_v ls_u if(L_u) + m_u ls_v if(L_v) - ls_u ls_v if(L_{uv}) + m_v rs_u if(R_u) + m_u rs_v if(R_v) + rs_u rs_v if(R_{uv})}{m_u ls_v + m_v ls_u - ls_u ls_v + m_u rs_v + m_v rs_u + rs_u rs_v} = \\ &= \frac{m_v s_u if(\tilde{u}) + m_u s_v if(\tilde{v}) - ls_u ls_v if(L_{uv}) + rs_u rs_v if(R_{uv})}{s_w} = \frac{m_v s_u if(\tilde{u}) + m_u s_v if(\tilde{v})}{s_w} + \Delta, \end{aligned} \tag{19}$$

где $s_u = ls_u + rs_u$, $s_v = ls_v + rs_v$ – полные спрэды $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$; $s_w = \left(m_v s_u + m_u s_v - ls_u ls_v + rs_u rs_v\right)$ – полный спрэд произведения – НЧ $\tilde{w}$; $\dfrac{m_v s_u if(\tilde{u}) + m_u s_v if(\tilde{v})}{s_w}$ – линейный относительно сомножителей вклад в нечеткость результата; $\Delta = \frac{rs_u rs_v if(R_{uv}) - ls_u ls_v if(L_{uv})}{s_w}$ – нелинейный вклад, обусловленный взаимодействием функций форм сомножителей.

Для факторного анализа (19) удобнее переписать в виде

$$if\left(\tilde{w}\right) = \frac{m_v s_u if(\tilde{u}) + m_u s_v if(\tilde{v})}{m_v s_u + m_u s_v} k_1 + \frac{rs_u rs_v if(R_{uv}) - ls_u ls_v if(L_{uv})}{rs_u rs_v - ls_u ls_v} k_2, \qquad (20)$$

где $k_1 = \frac{m_v s_u + m_u s_v}{s_w}$ – доля линейного (спрэд-модального) вклада в нечеткость; $k_2 = \frac{rs_u rs_v - ls_u ls_v}{s_w}$ – доля нелинейного (спрэд-спрэдового) вклада в нечеткость. Очевидно, что $k_1 + k_2 = 1;\ k_1 > 0,$ в то время как $k_2$ может быть положительным, отрицательным либо равным нулю.

Из (19) видно, что спрэд-модальный вклад в нечеткость всегда положителен, в то время как спрэд-спрэдовый вклад может как увеличивать, так и уменьшать нечеткость результата, а при некоторых условиях – не влиять.

Проведем анализ формул (19)-(20) в различных частных случаях.

1. Предположим, что спрэды операндов существенно малы по сравнению с модами НЧ, а именно $(m_u >> 0,5ls_u) \wedge (m_v >> 0,5ls_v) \wedge (m_u >> 0,5rs_u) \wedge (m_v >> 0,5rs_v).$ Тогда носитель произведения

$$\begin{gathered} s_w = m_u ls_v + m_v ls_u - ls_u ls_v + m_u rs_v + m_v rs_u + rs_u rs_v = \\ = ls_v(m_u - 0,5ls_u) + ls_u(m_v - 0,5ls_v) + rs_v(m_u + 0,5rs_u) + rs_u(m_v + 0,5rs_u) \approx \\ \approx m_u ls_v + m_v ls_u + m_u rs_v + m_v rs_u = m_v s_u + m_u s_v \end{gathered} \qquad (21)$$

и $\Delta = \frac{rs_u rs_v if(R_{uv}) - ls_u ls_v if(L_{uv})}{s_w} \ll \frac{m_v s_u if(\tilde{u}) + m_u s_v if(\tilde{v})}{s_w}$, то есть нечеткость результата определяется спрэд-модальной линейной частью. Тогда из (19) и (21) следует

$$if(\tilde{w}) = if(\tilde{u}\cdot\tilde{v}) \approx \frac{m_v s_u if(\tilde{u}) + m_u s_v if(\tilde{v})}{m_v s_u + m_u s_v} = s_u^* if(\tilde{u}) + s_v^* if(\tilde{v}), \qquad (22)$$

где $s_u^* = \frac{m_v s_u}{m_v s_u + m_u s_v},\ s_v^* = \frac{m_u s_v}{m_v s_u + m_u s_v}$ – приведенные вклады в нечеткость произведения.

Анализ (22) показывает, что

$$\min\{if(\tilde{u}), if(\tilde{v})\} \le if(\tilde{u}\cdot\tilde{v}) \le \max\left\{if(\tilde{u}), if(\tilde{v})\right\}, \qquad (23)$$

то есть при сделанных в данном пункте предположениях значение индекса математической нечеткости произведения чисел *LR*-типа заключено между значениями индексов нечеткости множителей. Если же $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ – НЧ одного класса, то $if(\tilde{u}) = if(\tilde{v}) = if(\tilde{u}\cdot\tilde{v}).$ Таким образом, при условии малости спрэдов сомножителей по сравнению с их модами законы преобразования нечеткости при умножении аналогичны таковым для сложения двух НЧ со спрэдами $m_v s_u$ и $m_u s_v$, уже исследованными нами в [4].

2. Пусть теперь операнды – два НЧ одного класса, т.е. $L_u(t) \equiv R_u(t) \equiv L_v(t) \equiv R_v(t) \equiv F(t)$ в отсутствии каких-либо иных ограничений. Именно такая ситуация обычно характерна для терм-множеств FIS. Тогда $if(\tilde{u}) = if(\tilde{v}) = if(F),$ [3].

Кроме того $L_{uv}^{-1}(\alpha) = L_u^{-1}(\alpha)L_v^{-1}\left(\alpha\right) = [F^{-1}(\alpha)]^2 = t \Rightarrow \alpha = F(\sqrt{t}).$ Следовательно

$$if(L_{uv}) = if(R_{uv}) = if(F(\sqrt{t})). \qquad (24)$$

Индекс нечеткости произведения по (19)

$$if(\tilde{w}) = if(\tilde{u}\cdot\tilde{v}) = \frac{m_v s_u + m_u s_v}{s_w} if(F(t)) + \frac{rs_u rs_v - ls_u ls_v}{s_w} if(F(\sqrt{t})). \qquad (25)$$

В частности, если $if(F(t) = if(F(\sqrt{t}))$, то

$$if\left(\tilde{w}\right) = if(\tilde{u}\cdot\tilde{v}) = \frac{m_v s_u + m_u s_v + rs_u rs_v - ls_u ls_v}{s_w} if(F(\sqrt{t})) = \frac{s_w}{s_w} if(F(\sqrt{t})) = if(\tilde{u}) = if(\tilde{v}), \qquad (26)$$

то есть нечеткость инвариантна относительно умножения таких НЧ.

В таблице 1 рассчитаны и сопоставлены индексы $if(F(t)$ и $if(F(\sqrt{t}))$ для некоторых функций формы. Получаем вывод об инвариантности индекса нечеткости Ягера с линейной метрикой относительно операции умножения для *LR*-чисел треугольного типа, с квадратичными гладкими и с гармоническими функциями формы без каких-либо иных ограничений.

**Таблица 1 – Индексы нечеткости $if(F(t)$ и $if(F(\sqrt{t}))$ для некоторых функций формы**

**Table 1 – Indices of fuzziness $if(F(t)$ and $if(F(\sqrt{t}))$ calculated on some form functions**

| Тип функции формы $F(t)$ | Выражение $F(t)$, $(0 \le t \le 1)$ | $if(F(t)$ | $if(F(\sqrt{t}))$ |
|---|---|---|---|
| Гауссова гладкая | $\begin{cases} \exp\left(1-\dfrac{1}{1-t^2}\right), \text{ если } t \ne 1 \\ 0, \text{ если } t = 1 \end{cases}$ | 0,323 | 0,373 |
| Квадратичная гладкая | $\begin{cases} 1-2t^2, \text{ если } 0 \le t \le 0,5 \\ 2(1-t)^2, \text{ если } 0,5 < t \le 1 \end{cases}$ | 0,333 | 0,333 |
| Гармоническая | $\frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\pi(t-1)\right)\right]$ | 0,363 | 0,363 |
| Усеченная парабола | $1-t^2$ | 0,391 | 0,500 |
| Усеченный кардинальный синус | $\begin{cases} \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}, \text{ если } t \ne 0, \\ 1, \text{ если } t = 0 \end{cases}$ | 0,405 | 0,469 |
| Гауссова усеченная | $2\exp(-t^2 \ln 2) - 1$ | 0,406 | 0,490 |
| Гиперболическая | $\frac{2}{1+t} - 1$ | 0,471 | 0,391 |
| Логарифмическая | $1 - \frac{\ln(1+t)}{\ln 2}$ | 0,495 | 0,453 |
| Корень квадратный | $1-\sqrt{t}$ | 0,500 | 0,375 |
| Линейная | $1-t$ | 0,500 | 0,500 |

3. Если $if(F(t)) \ne if(F(\sqrt{t}))$, то получим из (25)

$$if(\tilde{w}) = if(\tilde{u}\cdot\tilde{v}) = \frac{(m_v ls_u + m_u ls_v + m_v rs_u + m_u rs_v) if(F(t)) + (rs_u rs_v - ls_u ls_v) if(F(\sqrt{t}))}{m_u ls_v + m_v ls_u - ls_u ls_v + m_u rs_v + m_v rs_u + rs_u rs_v}, \qquad (27)$$

что позволяет найти диапазон возможных значений индекса нечеткости произведения.

Пусть сначала $ls_u \to m_u$, $ls_v \to m_v, rs_u \to 0$, $rs_v \to 0$, что соответствует ситуации, когда левые спрэды сомножителей стремятся к своим верхним граням, а правые отсутствуют. Тогда получаем предельное значение

$$if(\tilde{w}) \to \frac{(m_v m_u + m_u m_v) if(F(t)) - m_u m_v if(F(\sqrt{t}))}{m_v m_u + m_u m_v - m_u m_v} = 2if(F(t)) - if(F(\sqrt{t})). \qquad (28)$$

Пусть теперь $ls_u \to 0,\ ls_v \to 0,\ rs_u \to +\infty,\ rs_v \to +\infty,$ что соответствует ситуации, когда левые спрэды сомножителей отсутствуют, а правые бесконечны. Предельное значение

$$if(\tilde{w}) \to \frac{(m_v rs_u + m_u rs_v) if(F(t)) + rs_u rs_v if(F(\sqrt{t}))}{m_u rs_v + m_v rs_u + rs_u rs_v} \to if(F(\sqrt{t})). \quad (29)$$

Сопоставляя (28) и (29), приходим к выводу, что

$$\begin{cases} 2if(F(t)) - if(F(\sqrt{t})) < if(\tilde{u}\cdot\tilde{v}) < if(F(\sqrt{t})), \text{ если } if(F(t)) < if(F(\sqrt{t})), \\ if(F(\sqrt{t})) < if(\tilde{u}\cdot\tilde{v}) < 2if(F(t)) - if(F(\sqrt{t})), \text{ если } if(F(t)) > if(F(\sqrt{t})), \end{cases} \quad (30)$$

или, короче,

$$if(F(t)) - \left| if(F(t)) - if(F(\sqrt{t}))\right| < if(\tilde{u}\cdot\tilde{v}) < if\left(F(t)\right) + \left| if\left(F(t)\right) - if(F(\sqrt{t}))\right|. \quad (31)$$

Таким образом при умножении произвольных НЧ *LR*-типа может наблюдаться эффект как увеличения, так и уменьшения нечеткости результата относительно нечеткости сомножителей. В таблице 2 приведены теоретические пределы индексов нечеткости произведения сомножителей с некоторыми функциями формы.

**Таблица 2 – Теоретические пределы индексов нечеткости $\tilde{w} = \tilde{u}\cdot\tilde{v}$ согласно формуле (31)**
**Table 2 – Theoretical limits of indices of $\tilde{w} = \tilde{u}\cdot\tilde{v}$ fuzziness according formula (31)**

| Функции формы сомножителей $\tilde{u}, \tilde{v}$ $(if(\tilde{u}) = if(\tilde{v}))$ | $\inf if(\tilde{w})$ | $\sup if(\tilde{w})$ |
|---|---|---|
| Гауссова гладкая (0,323) | 0,273 | 0,373 |
| Усеченная парабола (0,391) | 0,282 | 0,500 |
| Усеченный кардинальный синус (0,405) | 0,341 | 0,469 |
| Гауссова усеченная (0,406) | 0,322 | 0,490 |
| Гиперболическая (0,471) | 0,391 | 0,551 |
| Логарифмическая (0,495) | 0,453 | 0,537 |
| Корень квадратный (0,500) | 0,375 | 0,625 |

## Результаты вычислительных экспериментов

**Вычислительный эксперимент 1.** Проверим утверждение (22) о взвешенном значении нечеткости результата при условии, что спрэды операндов малы по сравнению с их модами.

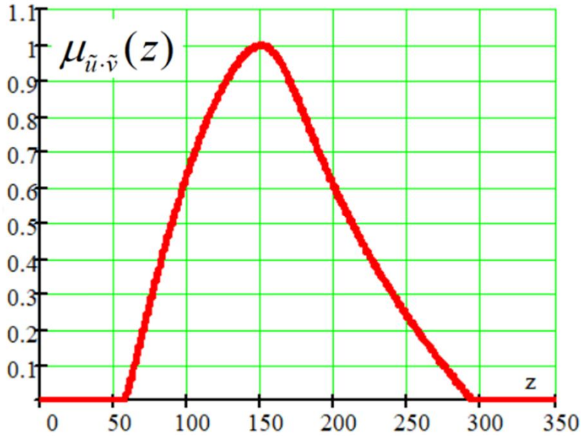
Возьмем два НЧ с различными функциями формы: одно $\tilde{u}[10,4,4]_{L_u R_u}$, где $L_u(t) = 1 - t$ (линейная, $if(L_u) = 0,5$), $R_u(t) = 1 - t^2$ (усеченная парабола $if(R_u) = 0,391$); второе $\tilde{v}[15,6,6]_{L_v R_v}$, где $L_v(t) = \exp\left(1 - \dfrac{1}{1-t^2}\right)$ (гауссова гладкая, $if(L_v) = 0,323$), $R_v(t) = 1 - \sqrt{t}$ (корень квадратный, $if(R_v) = 0,5$), (рисунок 1). Легко посчитать [3] значения индексов математической нечеткости сомножителей: $if\left(\tilde{u}\right) = 0,446$; $if\left(\tilde{v}\right) = 0,412$.

Теоретическое значение индекса математической нечеткости произведения $(\tilde{u}\cdot\tilde{v})$ по (22)

$$if\left(\tilde{w}\right) = if(\tilde{u}\cdot\tilde{v}) \approx \frac{m_v s_u if(\tilde{u}) + m_u s_v if(\tilde{v})}{m_v s_u + m_u s_v} = \frac{15\cdot 8\cdot 0,446 + 10\cdot 12\cdot 0,412}{15\cdot 8 + 10\cdot 12} = 0,429. \quad (32)$$

Экспериментальные значения степеней принадлежности произведения $(\tilde{u}\cdot\tilde{v})$ здесь и далее рассчитывали в MathCad непосредственно в соответствии с принципом расширения Л. Заде (4) с шагом дискретизации 0,001 по аргументу. Отметим, что уменьшение шага дискретизации до 0,0001 не сказывалось на конечном результате вплоть до третьего знака после запятой. Расчетное значение индекса произведения составило 0,430. Таким образом абсолютная погрешность приближенной формулы (22) составила всего 0,001 при величине спрэдов в 40 % от величин мод сомножителей. Уровни влияния величины спрэдов на точность приближенной формулы (22) приведены в таблице 3.


**а (a)**




**б (b)**

**Рисунок 1: а – Нечеткие числа $\tilde{u}[10,4,4]_{L_uR_u}$ (функции формы: левая – линейная, правая – усеченная парабола); $if(\tilde{u})=0{,}446$ ) и $\tilde{v}[15,6,6]_{L_vR_v}$ (функции формы: левая – гауссова гладкая, правая – корень квадратный $if(\tilde{v})=0{,}412$ ); б – $\tilde{u}\cdot\tilde{v}=\tilde{w}[150,96,144]_{L_wR_w}$ , $if(\tilde{w})=0{,}430$**

**Figure 1: a – Fuzzy numbers $\tilde{u}[10,4,4]_{L_uR_u}$ (shape functions: left – linear, right – clipped parabola; $if(\tilde{u})=0{,}446$ ) and $\tilde{v}[15,6,6]_{L_vR_v}$ (shape functions: left – smooth Gaussian, right – square root; $if(\tilde{v})=0{,}412$ ); b – $\tilde{u}\cdot\tilde{v}=\tilde{w}[150,96,144]_{L_wR_w}$ , $if(\tilde{w})=0{,}430$**

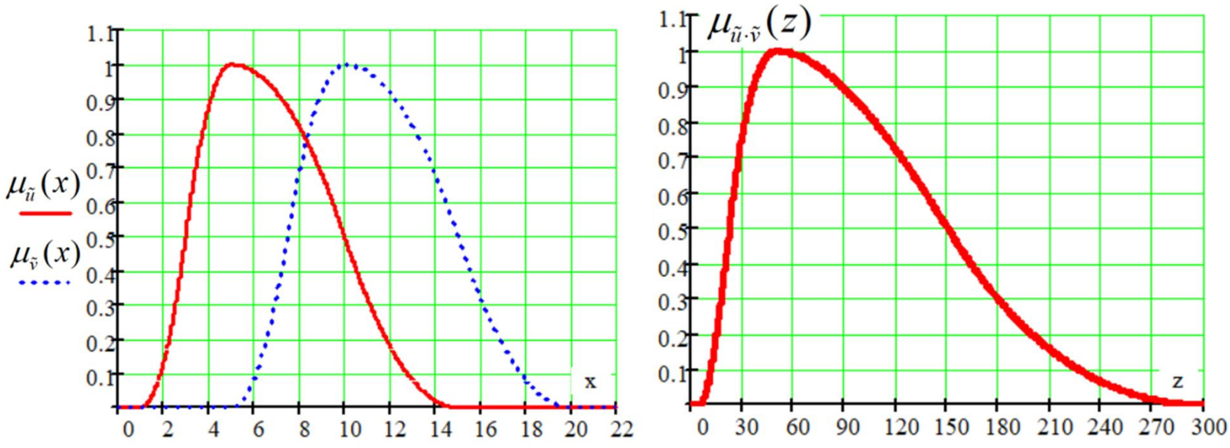
**Таблица 3 – Абсолютная погрешность формулы (22) для чисел $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ из эксперимента 1**
**Table 3 – Formula (22) absolute error for numbers $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ from experiment 1**

| Операнды и результат | Максимальное значение отношения спрэд/мода для операндов | Экспериментальное значение $if(\tilde{w})$ | Значение $if(\tilde{w})$, рассчитанное по формуле (22) | Абсолютная погрешность |
|---|---|---|---|---|
| $\tilde{u}[5,1,1]_{L_uR_u}\cdot\tilde{v}[6,1,1]_{L_vR_v}=$ $=\tilde{w}[30,10,12]_{L_wR_w}$ | 0,2 | 0,431 | 0,430 | 0,001 |
| $\tilde{u}[10,4,4]_{L_uR_u}\cdot\tilde{v}[15,6,6]_{L_vR_v}=$ $=\tilde{w}[150,96,144]_{L_wR_w}$ | 0,4 | 0,430 | 0,429 | 0,001 |
| $\tilde{u}[5,5,3]_{L_uR_u}\cdot\tilde{v}[8,8,4]_{L_vR_v}=$ $=\tilde{w}[40,40,56]_{L_wR_w}$ | 1,0 | 0,415 | 0,421 | 0,006 |
| $\tilde{u}[5,2,5]_{L_uR_u}\cdot\tilde{v}[8,4,8]_{L_vR_v}=$ $=\tilde{w}[40,28,120]_{L_wR_w}$ | 1,0 | 0,441 | 0,432 | 0,009 |
| $\tilde{u}[5,5,10]_{LR}\cdot\tilde{v}[15,3,30]_{LR}=$ $=\tilde{w}[75,75,600]_{LR}$ | 2,0 | 0,460 | 0,451 | 0,009 |

Таким образом, приближенная формула (22) дает достаточно точный результат при величинах спрэдов сомножителей до 40 % от величины мод. Дополнительные вычислительные эксперименты, однако, показывают, что величина ошибки является специфичной по отношению к выбору функций формы операндов. Например, в условиях данного эксперимента замена функций формы на кардинальный синус и линейную у первого сомножителя и логарифмическую и гиперболическую у второго при отношении спрэд/мода 0,4 приводит к абсолютной погрешности 0,003. Мы используем абсолютную погрешность, а не относительную в силу того обстоятельства, что смысловую нагрузку имеет именно диапазон различий значений индекса нечеткости, который достаточно узок (см. таблицу 1).

**Вычислительный эксперимент 2.** Проверим вывод об инвариантности индекса нечеткости относительно операции умножения для $LR$-чисел с треугольными ФП, с квадратичными гладкими и с гармоническими ФП независимо от каких-либо ограничений.

Пусть операнды – НЧ $\tilde{u}[5,4,10]_{LR}$ и $\tilde{v}[10,5,10]_{LR}$ оба с квадратичной гладкой функцией принадлежности, т.е. $L(t)=R(t)=\begin{cases}1-2t^2, & \text{если } 0\le t\le 0,5\\ 2(1-t)^2, & \text{если } 0,5<t\le 1\end{cases}$ (рисунок 2).




а (a) б (b)

**Рисунок 2: а – Нечеткие числа $\tilde{u}[5,4,10]_{LR}$ и $\tilde{v}[10,5,10]_{LR}$ (квадратичная гладкая функция формы, $if(\tilde{u})=if(\tilde{v})=0,333$); б – $\tilde{u}\cdot\tilde{v}=\tilde{w}[50,45,250]_{L_wR_w}$, $if(\tilde{w})=0,333$**

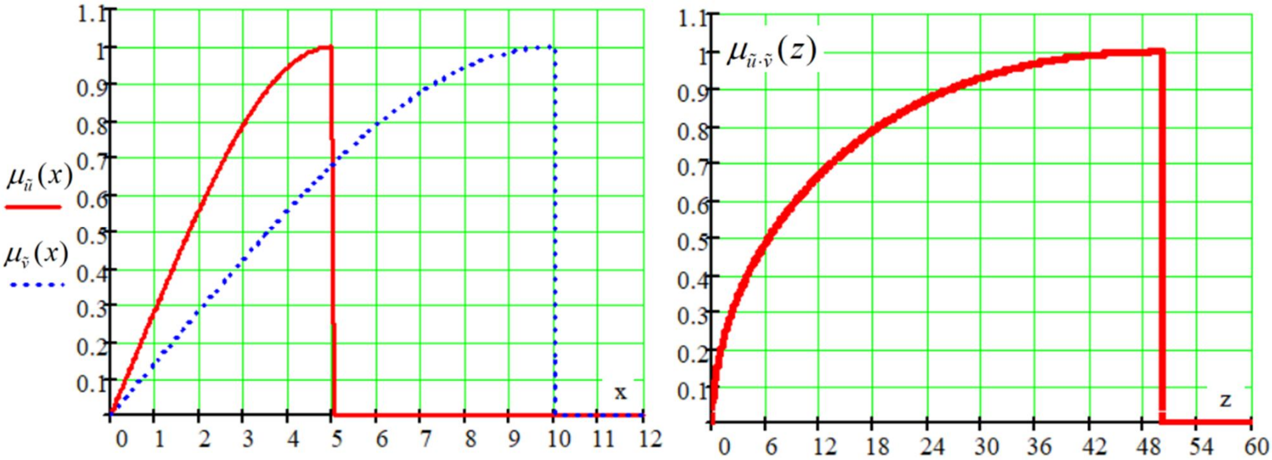
**Figure 2: a – Fuzzy numbers $\tilde{u}[5,4,10]_{LR}$ and $\tilde{v}[10,5,10]_{LR}$ (smooth quadratic shape function, $if(\tilde{u})=if(\tilde{v})=0,333$); b – $\tilde{u}\cdot\tilde{v}=\tilde{w}[50,45,250]_{L_wR_w}$, $if(\tilde{w})=0,333$**

Значения индексов математической нечеткости: $if(\tilde{u})=if(\tilde{v})=0,333$. В соответствии с (26) теоретическое значение индекса математической нечеткости произведения $if(\tilde{u}\cdot\tilde{v})=$ $=if(\tilde{u})=if(\tilde{v})=0,333$. Расчетное значение индекса произведения с шагом дискретизации 0,001 составило 0,333. Аналогично была подтверждена инвариантность индекса нечеткости при умножении гармонических (0,363) и треугольных (0,500) НЧ.

Вместе с тем, если взять функции формы такие, что $if(F(t))\ne if(F(\sqrt{t}))$, то инвариантности нечеткости не наблюдается. Например, операция умножения $\tilde{u}[5,4,10]_{LR}$ и $\tilde{v}[10,5,10]_{LR}$ с гиперболическими функциями формы $L(t)=R(t)=\dfrac{2}{1+t}-1$, $if(\tilde{u})=if(\tilde{v})=0,471$, порождает число $\tilde{w}[50,45,250]_{L_wR_w}$ с индексом нечеткости $if(\tilde{w})=0,449$.

**Вычислительный эксперимент 3.** В данном эксперименте проверим положение (31) относительно пределов изменения нечеткости при операции умножения НЧ одного класса, но при условии $if(F(t))\ne if(F(\sqrt{t}))$.

Пусть $\tilde{u},\tilde{v}$ – НЧ $LR$-типа с одинаковыми функциями формы – гауссовы усеченные: $L_u(t)=R_u(t)=L_v(t)=R_v(t)=2\exp(-t^2\ln 2)-1$. Так как $if(F(t))<if(F(\sqrt{t}))$, $(0,406<0,490)$, то нижняя грань $\inf if(\tilde{w})=2if(F(t))-if(F(\sqrt{t}))=0,322$. В то же время $\sup if(\tilde{w})=$ $=if(F(\sqrt{t}))=0,490$. Первое положение подтверждается рисунком 3 (левые спрэды устремляем к максимуму, правые к нулю).




**а (a) б (b)**

**Рисунок 3: а – Нечеткие числа $\tilde{u}[5,5,10^{-3}]_{LR}$ и $\tilde{v}[10,10,10^{-3}]_{LR}$ (функции формы гауссовы усеченные $if(\tilde{u}) = if(\tilde{v}) = 0,406$ ); б – $\tilde{u}\cdot\tilde{v} = \tilde{w}[50,50,\, 1,5\cdot 10^{-2}]_{L_wR_w}$, $if(\tilde{w}) = 0,322$**

**Figure 3: a – Fuzzy numbers $\tilde{u}[5,5,10^{-3}]_{LR}$ and $\tilde{v}[10,10,10^{-3}]_{LR}$ (clipped Gaussian shape functions, $if(\tilde{u}) = if(\tilde{v}) = 0,406$ ); b – $\tilde{u}\cdot\tilde{v} = \tilde{w}[50,50,\, 1,5\cdot 10^{-2}]_{L_wR_w}$, $if(\tilde{w}) = 0,322$**

Второе положение экспериментально докажем, преобразовав предварительно формулу (29) для упрощения обработки результатов вычислительного эксперимента. Положим $rs_u = rs_v = rs \to \infty$, что не повлияет на величину предела, если он существует:

$$if(\tilde{w}) \to \frac{(m_v rs_u + m_u rs_v) if(F(t)) + rs_u rs_v if(F(\sqrt{t}))}{m_u rs_v + m_v rs_u + rs_u rs_v} = \frac{(m_v + m_u) if(F(t)) + rs\cdot if(F(\sqrt{t}))}{m_u + m_v + rs} =$$
$$= \frac{(m_u + m_v)\cdot(if(F(t)) - if(F(\sqrt{t})))}{m_u + m_v + rs} + if(F(\sqrt{t})). \quad (33)$$

График экспериментальных значений должен спрямляться в координатах $((m_u + m_v + rs)^{-1},\ if(\tilde{w}))$, таблица 4. Свободный член линейного уравнения (33) и будет верхней или нижней гранью $if(\tilde{w})$ в зависимости от знака $(if(F(t)) - if(F(\sqrt{t})))$, (рисунок 4).

**Таблица 4 – Экспериментальные значения $if(\tilde{w})$ при значительном увеличении правых спрэдов $\tilde{u}, \tilde{v}$ ($rs_u = rs_v = rs \gg (m_u + m_v)$; $m_u + m_v = 0,6$)**

**Table 4 – Experimental values $if(\tilde{w})$ in the case of mighty right spreads $\tilde{u}, \tilde{v}$ increase ($rs_u = rs_v = rs \gg (m_u + m_v)$; $m_u + m_v = 0,6$)**

| $m_u + m_v + rs$ | $(m_u + m_v + rs)^{-1}$ | Экспериментальное значение $if(\tilde{w})$ |
|---|---|---|
| 10,6 | 0,09434 | 0,485434 |
| 20,6 | 0,048544 | 0,48766 |
| 30,6 | 0,03268 | 0,48856 |
| 40,6 | 0,024631 | 0,488975 |
| 50,6 | 0,019763 | 0,48921 |

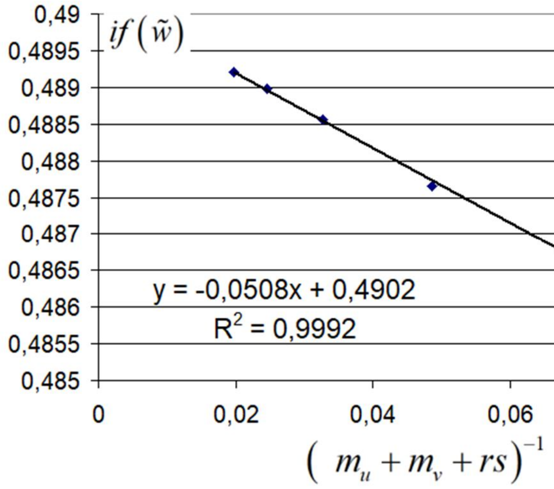



**Рисунок 4 – Определение верхнего предела индекса нечеткости произведения при умножении НЧ LR-типа (функции формы – усеченные гауссовы $if(\tilde{u}) = if(\tilde{v}) = 0,406$ ); $if(\tilde{u}) = if(\tilde{v}) = 0,406$**

**Figure 4 – Finding the upper limit of FNs LR-type production fuzziness index (clipped Gaussian shape functions, $if(\tilde{u}) = if(\tilde{v}) = 0,406$ ); $\sup if(\tilde{w}) = 0,490$**

## Заключение

В данной работе исследованы преобразования нечеткости в результате операции умножения НЧ LR-типа. В отличие от операции сложения при операции умножения нечетких чисел наблюдаются нелинейные эффекты из-за взаимодействия левых и правых функций формы операндов, что существенно усложняет поиск универсальных закономерностей.

Сформулируем основные результаты проведенного исследования.

1. Установлено, что индекс нечеткости результата (произведения) формируется как сумма линейного относительно сомножителей (спрэд-модального) вклада и нелинейного (спрэд-спрэдового) вклада, обусловленного взаимодействием функций форм сомножителей. При этом спрэд-модальный вклад в нечеткость всегда положителен, в то время, как спрэд-спрэдовый вклад может как увеличивать, уменьшать нечеткость результата, так и не влиять на него.

2. Показано, что в условиях малости спрэдов сомножителей по сравнению с величинами их мод нечеткость результата определяется преимущественно спрэд-модальным вкладом и законы преобразования нечеткости при умножении аналогичны таковым для сложения двух НЧ со спрэдами $m_v s_u$ и $m_u s_v$. В частности, в условиях данных ограничений индекс нечеткости инвариантен относительно операции умножения нечетких чисел *LR*-типа одинакового класса. Также применима взвешенная формула для быстрого исчисления индекса нечеткости, доказанная нами в [3].

3. Выведено условие инвариантности индекса нечеткости относительно операции умножения в отсутствие каких-либо ограничений на величины спрэдов операндов одного класса, а именно равенство индексов нечеткости $if(F(t)) = if(F(\sqrt{t}))$, которому удовлетворяют, в частности, линейная, гладкая квадратичная, гармоническая функции формы $F(t)$.

4. Установлены нижняя и верхняя грани изменения индекса нечеткости результата при умножении произвольных НЧ одного класса, для которых $if(F(t)) \neq if(F(\sqrt{t}))$.

Продолжением данной работы станет исследование преобразований нечеткости при логических операциях над НЧ *LR*-типа, действий на терм-множества лингвистических модификаторов, а также распространение полученных результатов на нечеткие отношения.

**Библиографический список**

1. **Bede B.** Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. London: Springer, 2013. 276 p.

2. **Анисимов К. В., Конюхов А. Н.** Формирование навыков нечеткого моделирования в курсе «Основы теории нечетких множеств» // III Международный научно-технический форум СТНО-2020: сборник трудов / под ред. О. В. Миловзорова. Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2020. Т. 10. С. 87-94.

3. **Бухенский К. В., Конюхов А. Н., Дюбуа А. Б., Сафошкин А. С.** Быстрый алгоритм расчета индексов нечеткости для унимодальных нечетких чисел LR-типа // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2019. №70. С. 65-75.

4. **Бухенский К. В., Конюхов А. Н., Дюбуа А.Б., Сафошкин А. С.** Преобразования нечеткости при линейных операциях над нечеткими числами LR-типа // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2020. №71. С. 137-150.

5. **Бухенский К. В., Конюхов А. Н., Дюбуа А. Б., Сафошкин А. С.** Операции над нечеткими числами и мера нечеткости // III Международный научно-технический форум СТНО-2020: сборник трудов / под ред. О. В. Миловзорова. Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2020. Т. 5. С. 12-19.

6. **Zadeh L. A.** Fuzzy sets. Information and control. 1965, vol. 8, pp. 338-353.

7. **De Barros L.C., Bassanezi R. C.** A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics: Theory and Applications. New York: Springer, 2016. 304 p.

8. **Yager R.** On the measure of fuzziness and negation. Part I: membership in the unit interval. International Journal of General Systems. 1979, vol. 5, pp. 221-229.

9. **Конюхов А. Н., Дюбуа А. Б., Сафошкин А. С.** Основы теории нечетких множеств. Часть 2: учеб. пособие / А. Н. Конюхов, А. Б. Дюбуа, А. С. Сафошкин; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. Рязань, 2018. 108 с.

UDC 519.766.2

# PECULIARITIES OF FUZZINESS TRANSFORMATION ON MULTIPLICATION LR-TYPE FUZZY NUMBERS

**K. V. Bukhensky,** Ph.D. (Phys. and Math.), associate professor, Head of the Department of Higher Mathematics, RSREU, Ryazan, Russia;
orcid.org/0000-0003-2602-2112, e-mail: bukhensky.k.v@rsreu.ru
**A. N. Konyukhov,** Ph.D. (Ped. Sci.), associate professor, RSREU, Ryazan, Russia;
orcid.org/0000-0002-1523-7110, e-mail: chronos@bk.ru
**A. B. Dubois,** Ph.D. (Phys. and Math.), associate professor, RSREU, Ryazan, Russia;
orcid.org/0000-0002-5924-4128, e-mail: abd-69@mail.ru
**A. S. Safoshkin,** Lecturer, Department of Higher Mathematics, RSREU, Ryazan, Russia;
orcid.org/0000-0002-1419-979X, e-mail: safoshkin.a.s@rsreu.ru

***The aim is to*** *investigate fuzziness transformation while multiplicating LR-type fuzzy numbers (FNs) in accordance with Zadeh's extension principle. This work is the proceeding of the former investigation of fuzziness transformations on linear operations with FNs, particularly the addition. As a measure of math fuzziness the Yager's index of fuzziness with linear Hamming metric has been used. The conditions of invariance, increasing and decreasing of fuzziness as well as the possible range of changes have been theoretically proven. In order to test theoretical results several numerical experiments has been accomplished.*

***Key words:*** *fuzzy set, LR-type fuzzy number, membership function, shape function, index of math fuzziness, spread vagueness, Zadeh's extension principle, alpha-cut of fuzzy set.*

**DOI:** 10.21667/1995-4565-2020-73-83-96

**References**

1. **Bede B.** *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic.* London: Springer, 2013. 276 p.

2. **Anisimov K. V., Konyukhov A. N.** Formirovanie navykov nechetkogo modelirovanija v kurse «Osnovy teorii nechetkih mnozhestv». *III Mezhdunarodnyj nauchno-tehnicheskij forum STNO-2020. Sbornik trudov pod red. O.V. Milovzorova. Rjazan': Rjazan. gos. radiotehn. un-t,* 2020, vol. 10, pp. 87-94. (in Russian).

3. **Bukhensky K. V., Konyukhov A. N., Dubois A. B., Safoshkin A. S.** Bystryj algoritm rascheta indeksov nechetkosti dlja unimodal'nyh nechetkih chisel LR-tipa. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radiotehnicheskogo universiteta*. 2019, no. 70, pp. 68-75. (in Russian).

4. **Bukhensky K. V., Konyukhov A. N., Dubois A. B., Safoshkin A. S.** Preobrazovanija nechetkosti pri linejnyh operacijah nad nechetkimi chislami LR-tipa. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radiotehnicheskogo universiteta*. 2020, no. 71, pp. 137-150. (in Russian).

5. **Bukhensky K. V., Konyukhov A. N., Dubois A. B., Safoshkin A. S.** Operacii nad nechetkimi chislami i mera nechetkosti. *III Mezhdunarodnyj nauchno-tehnicheskij forum STNO-2020. Sbornik trudov pod red. O.V. Milovzorova. Rjazan': Rjazan. gos. radiotehn. un-t*. 2020, vol. 5, pp. 12-19. (in Russian).

6. **Zadeh L.A.** Fuzzy sets. *Information and control*. 1965, vol. 8, pp. 338-353.

7. **De Barros L. C., Bassanezi R. C.** *A First Course in Fuzzy Logic, Fuzzy Dynamical Systems, and Biomathematics: Theory and Applications.* New York: Springer, 2016. 304 p.

8. **Yager R.** On the measure of fuzziness and negation. Part I: membership in the unit interval. *International Journal of General Systems*. 1979, vol. 5, pp. 221-229.

9. **Konyukhov A. N., Dubois A. B., Safoshkin A. S.** *Osnovy teorii nechetkih mnozhestv*. Chast' 2: ucheb. posobie (The basics of fuzzy sets. Part 2) / A. N. Konyukhov, A. B. Dubois, A. S. Safoshkin; Rjazan. gos. radiotehn. un-t. Rjazan', 2018, 108 p.