УДК 004.58, 004.051

АЛГОРИТМ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОБЪЕКТОВ НА СНИМКАХ НА ОСНОВЕ ТРЕХМЕРНЫХ БАРКОДОВ

Ю. А. Ковалев, аспирант кафедры ИСПИ ВлГУ, Владимир, Россия;
orcid.org/0000-0001-6660-5334, e-mail: yurko02@mail.ru

Рассматривается задача идентификации пространственных объектов на снимках на различных масштабах и в установленные промежутки времени. Алгоритм производит сопоставление на основе топологических признаков, в данном случае с использованием трехмерных баркодов, основанных на методах персистентной гомологии. Результатом работы алгоритма является идентификация объектов на снимках за разные временные промежутки и на различных масштабах, на основе полученных трехмерных баркодов. Производится анализ различных подходов к поиску пространственных объектов на спутниковых снимках, выявлены преимущества и недостатки. В работе были исследованы снимки водоемов за различные годы и на разных масштабах. Построены графики трехмерных баркодов данных объектов, на которых отражены сходства и различия структуры объектов. Точность идентификации объектов составила 93 %.

Ключевые слова: *трехмерный баркод, персистентная гомология, топология, пространственные объекты.*

DOI: 10.21667/1995-4565-2020-74-89-98

Введение

В настоящее время актуальной задачей является обработка объектов со спутниковых снимков. Снимки занимают огромное количество памяти и их все сложнее обрабатывать вручную.

Часто необходимо проводить анализ одних и тех же объектов или местностей на их соответствие или различия за разные промежутки времени. Множество снимков сняты в разные погодные условия, под разными ракурсами и с разных масштабов. При этом меняются яркостные характеристики изображений, появляются шумы, меняется площадь объектов, но топология объекта, а именно его форма, остаются неизмененными.

В работе ставится задача идентификации пространственных объектов на снимках на различных масштабах и в установленные промежутки времени.

Для решения данной задачи существуют следующие подходы:

В [1] представлен алгоритм, позволяющий обрабатывать nD объекты. Смысл алгоритма заключается в моделировании n-мерных характеристик (времени и масштаба), как дополнительных геометрических размеров, перпендикулярных к пространственным объектам, создавая модель более высокого порядка в использовании интервалов высоты, на основе которых 2D модели возводятся в следующие измерения. Данные интервалы получаются из топологического пространства, и они разбиваются на более мелкие. Начиная с планарного разбиения многоугольников и интервала высоты, связанного с каждым из них, она генерирует набор пространственно-разбивающихся прямоугольных многогранников, считая, что каждый многоугольник существует по всему его отрезку.

В [2-6] заложена основа для интеграции пяти измерений в одно формальное представление данных, а также рассмотрены алгоритмы обработки многомерных данных. Формальное определение географических данных в концептуальном континууме 5D позволит наиболее эффективно управлять и запрашивать географические данные с помощью одного интегрированного подхода (хранение всех необходимых сведений о пяти измерениях в базе данных). Кроме того, он обеспечит согласованность по масштабам и времени. Этот подход привел к

новой теории и методу для геоданных, а также технологий, реализующих многомерное разбиение. Интеграция многомерных концепций геоданных позволяет использовать общую геометрию и встроенные топологические, временные и масштабные структуры посредством полного разбиения (3D, время и масштаб). Но данные алгоритмы основываются на использовании координат объектов, из-за чего придется хранить весь список координат и геометрических характеристик. Для хранения объектов в ГИС существуют различные наборы структур данных.

В [7-10] рассмотрены подходы к хранению пространственных отношений в ГИС, такие как: пространственные запросы на основе языка SQL, матрицы топологических отношений и другие. Основное внимание в статье уделено представлению естественных иерархических структур пространственных объектов. Разработан метод хранения информации о пространственных взаимосвязях непосредственно в идентификаторе объекта, приведена структура такого идентификатора. Данный метод позволяет сформировать идентификатор, в котором закодирована основная информация о пространственном объекте для дальнейшего обращения к нему.

В [11-13] описывается комплексный подход к построению иерархической структуры дорожной сети для непрерывного многомасштабного представления, особенно непрерывного избирательного пропуска дорог в сети. В данной структуре модель дорожной сети построена с использованием линейной и ареальной иерархии. Непрерывное многомасштабное представление дорожной сети достигнуто путем поиска в этих иерархиях. Но данные алгоритмы не предназначены для nD объектов, в том числе для хранения информации о масштабах карт и времени изменения объектов на карте.

В [14-20] описаны виды анализа пространственных данных в ГИС. Связь между ГИС и пространственным анализом данных считается важным аспектом в развитии ГИС. Анализ позволяет быстро вычислять различные характеристики пространственного расположения данных, такие как структура смежности между наблюдаемыми объектами. Анализ пространственных объектов также позволяет выполнять преобразования данных между различными пространственными масштабами карт, и выполнения операций агрегирования, разделения, интерполяции, наложения и буферизации. Основной акцент в данных работах делается на пространственном моделировании и статистическом анализе (модели регрессий), и в основном авторы не производят анализа с точки зрения топологии пространственных объектов.

Из анализа работ, описанных выше, можно сделать вывод, что сейчас актуальна проблема идентификации пространственных структур в плане сопоставления объектов на разных масштабах и за различные промежутки времени, т.к. существующие подходы используют геометрические характеристики, которые игнорируют форму объекта по которой можно его идентифицировать.

Теоретическая часть

Для решения поставленной задачи предлагается использовать методы персистентной гомологии, которые позволяют анализировать структуры на разнородных объектах.

Для того чтобы провести анализ точек объектов нужно сформировать числовую структуру. Баркод B – это сформированное числовое описание внутренней и внешней топологии объекта, которое позволяет хранить форму и структуру объекта в виде чисел, для его дальнейшего анализа, обработки и других операций.

Баркод состоит из топологических особенностей первого и второго порядка, которые позволяют описать форму объекта. Т.е. вокруг каждого пикселя строится окрестность Мура. Когда в окрестности Мура рядом с центральным пикселем существует точка, имеющая значение яркости равное или меньшее – образуется топологическая особенность первого порядка $e[I(x,y)]=\{(d_i,l_i)\}$, где e – топологическая особенность первого порядка, d_i – значение яркости, на котором была образована топологическая особенность, l_i – длина существования топологической особенности, а $I(x,y)$ – объект. В процессе прохождения при появлении в

окрестности Мура трех соседних точек (центральная точка и две соседние точки близкие по яркости), происходит соединение их треугольником. В итоге под топологической особенностью второго порядка мы понимаем наборы из трех точек, имеющих близкие по значению яркости $h[I^O(x,y)]=\{(d_i,l_i)\}$. Более подробно алгоритм построения баркода с двумя составляющими описан в статье [21]. После полного прохождения мы строим баркод, который состоит из двух полученных выше множеств топологических особенностей первого и второго порядка:

$$B\left(I(x,y)\right)=\begin{bmatrix} B^e\left(I(x,y)\right) \\ B^h\left(I(x,y)\right)\end{bmatrix}.$$

В случае постановленной задачи будут использованы трехмерные баркоды для описания единой структуры для объектов на разных масштабах или за разные временные промежутки.

Исходными данными является последовательность, которая содержит изображения одной и той же местности за разное время года или изображения на разных масштабах.

Алгоритм для поиска объектов на разных масштабах и за различные промежутки времени строится следующим образом:

Отобразим трехмерный баркод B^t_{3D} за разные промежутки времени в виде массива:

$$\mathrm{M}(B^t_{3D})=\begin{bmatrix} B^t_{1,1} \\ B^t_{2,1} \\ \dots \\ B^t_{n,1}\end{bmatrix},$$

где $\{B^t_{1,1},B^t_{2,1},...,B^t_{n,1}\}$ – это набор баркодов за разные промежутки времени, а n – это номер объекта, для которого построен баркод.

Если баркоды рассчитывались для изображений, на которых находится несколько объектов, то трехмерные баркоды можно отобразить в виде матрицы: $\mathrm{A}(B^t_{3D})=\begin{bmatrix} B^t_{1,1} & B^t_{1,2} & \dots & B^t_{1,k} \\ B^t_{2,1} & B^t_{2,2} & \dots & B^t_{2,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B^t_{n,1} & B^t_{n,2} & \dots & B^t_{n,k}\end{bmatrix}$, где $\{B^t_{1,1},B^t_{2,1},...,B^t_{n,k}\}$ – это набор баркодов за разные промежутки времени, а n,k – количество объектов, для которых построен баркод, за разные промежутки времени.

По аналогии строится массив и матрица для трехмерных баркодов на разных масштабах.

$\mathrm{M}(B^s_{3D})=\begin{bmatrix} B^s_{1,1} \\ B^s_{2,1} \\ \dots \\ B^s_{n,1}\end{bmatrix}$, $\mathrm{A}(B^s_{3D})=\begin{bmatrix} B^s_{1,1} & B^s_{1,2} & \dots & B^s_{1,k} \\ B^s_{2,1} & B^s_{2,2} & \dots & B^s_{2,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B^s_{n,1} & B^s_{n,2} & \dots & B^s_{n,k}\end{bmatrix}$, где s – это масштаб изображения.

Пример разных объектов на нескольких снимках за различные времена приведен на рисунке 1, где красным выделен водоем, а зеленым и синим – здания.

Изначально находятся баркоды $\{B^t_{1,1}...B^t_{n,1}\}$ на первом изображении и записываются в столбец n=1. Далее идет анализ баркодов следующих изображений, если $B^t_{1,2}=B^t_{1,1}$ то они записываются в одну строку и так пока баркоды изображений не закончатся $\{B^t_{1,1}...B^t_{1,k}\}$.

Если найден баркод, отличный от всех предыдущих, то он записывается в отдельную строку n и выглядит следующим образом $\{null \quad B^t_{n,2} \quad ... \quad ...\}$, где null указывает, что на предыдущем изображении отсутствует данный объект.

Рисунок 1 – Изображения за несколько лет с различными видами объектов
Figure 1 – Images for several years with various kinds of objects

Заполнение матрицы происходит на основе топологического сопоставления баркодов.

Если на каком-то из последующих изображений объект отсутствует, соответственно отсутствует и его баркод, и строка в матрице выглядит следующим образом $\{B^t_{1,1} \quad B^t_{1,2} \quad null \quad B^t_{1,k}\}$.

На основе полученных трехмерных баркодов можно произвести сравнение и сопоставление объектов. Для этого мы должны получить эталонные баркоды для разных групп объектов.

Существует множество групп объектов, например, горы, реки, здания, водоемы, множество их подклассификаций и т.д. Рассмотрим на примере эталонных баркодов водоема, здания и лесной местности.

Существует эталонные баркоды в определенные временные промежутки $\mathrm{B}^{\mathrm{t}}(водоем)$, $\mathrm{B}^{\mathrm{t}}(здание)$ и $\mathrm{B}^{\mathrm{t}}(леснаяместность)$.

Сравнение происходит следующим образом:

Существует любой баркод $B^t(I(x,y))$, если он соответствует одному из эталонных баркодов B^{t}, то объект на изображении $I(x,y)$ относится к определенному классу объектов. Если у каждого объекта есть равные значения топологических особенностей второго порядка, имеющих одинаковую максимальную длину l то изображения являются одним и тем же объектом.

Допустим, на изображении $I(x,y)$ находится водоем, тогда:

$$B^t\left(I(x,y)\right) = \begin{vmatrix} \mathrm{B}^{\mathrm{t}}(водоем) \\ \mathrm{B}^{\mathrm{t}}(здание) \\ \mathrm{B}^{\mathrm{t}}(лесная\ местность) \end{vmatrix} = (\max(l_i^{\mathrm{B}^{\mathrm{t}}(I(x,y))}) = \max(l_i^{\mathrm{B}(водоем)}) = \mathrm{B}^{\mathrm{t}}(водоем).$$

Отсюда можно сделать вывод, что изображение $I(x,y) = водоем$.

Экспериментальные исследования

Проведем исследование алгоритма на снимках водоема за разные годы, которые отражены на рисунке 2 *а*, *б*, *в*.

а (a) **б (b)** **в (c)**

Рисунок 2 – Эволюция водоема за несколько лет
а – снимок за 1984 год; б – снимок за 2005 год; в – снимок за 2016 год
Figure 2 – The evolution of a reservoir over several years: a – a photograph for 1984;
b – a snapshot for 2005; c – snapshot for 2016

На рисунке 2 *а*, *б*, *в* видно, что это один и тот же водоем, имеющий одинаковую структуру и форму, но на рисунках водоем имеет разную яркость. Далее строится трехмерный баркод для данных изображений. График данного баркода отражен на рисунке 3.

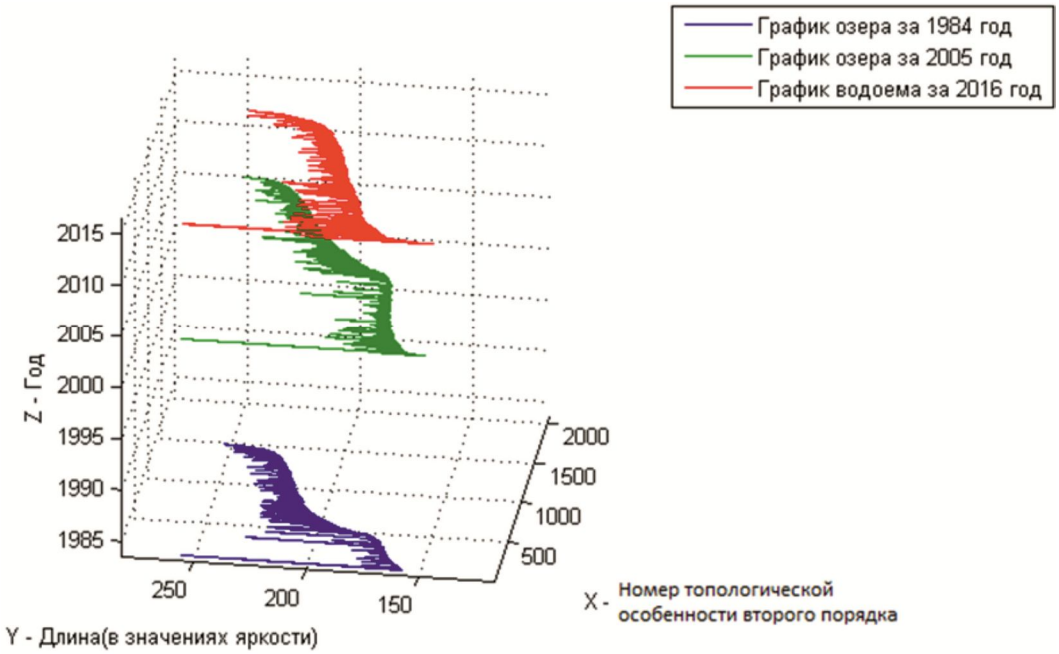

Рисунок 3 – График баркода с третьей составляющей
для снимка водоема сделанного за разные временные промежутки
Figure 3 – Barcode graph with third component
for a picture of a reservoir taken at different time intervals

Исходя из графика на рисунке 3 можно сделать вывод, что баркоды за 1984, 2005 и 2016 года схожи по строению и у каждого объекта есть равные топологические особенности второго порядка, имеющие одинаковую максимальную длину $\max(l_i^{B1}) = \max(l_i^{B2}) = \max(l_i^{B3})$, которая находится в диапазоне яркости от 160 до 253.

а (a) **б (b)** **в (c)**

Рисунок 4 – Снимки водоема на разных масштабах
а – масштаб 1:100; б – масштаб 1:500; в – масштаб 1:1000
Figure 4 – Pictures of the reservoir at different scales: a – scale 1: 100;
b – scale 1: 500; c – scale 1: 1000

На рисунке 4 *а*, *б*, *в* видно, что это один и тот же водоем, имеющий одинаковую структуру и форму, но на рисунках водоем имеет разную площадь. Далее строится трехмерный баркод для данных изображений. График данного баркода отражен на рисунке 3.

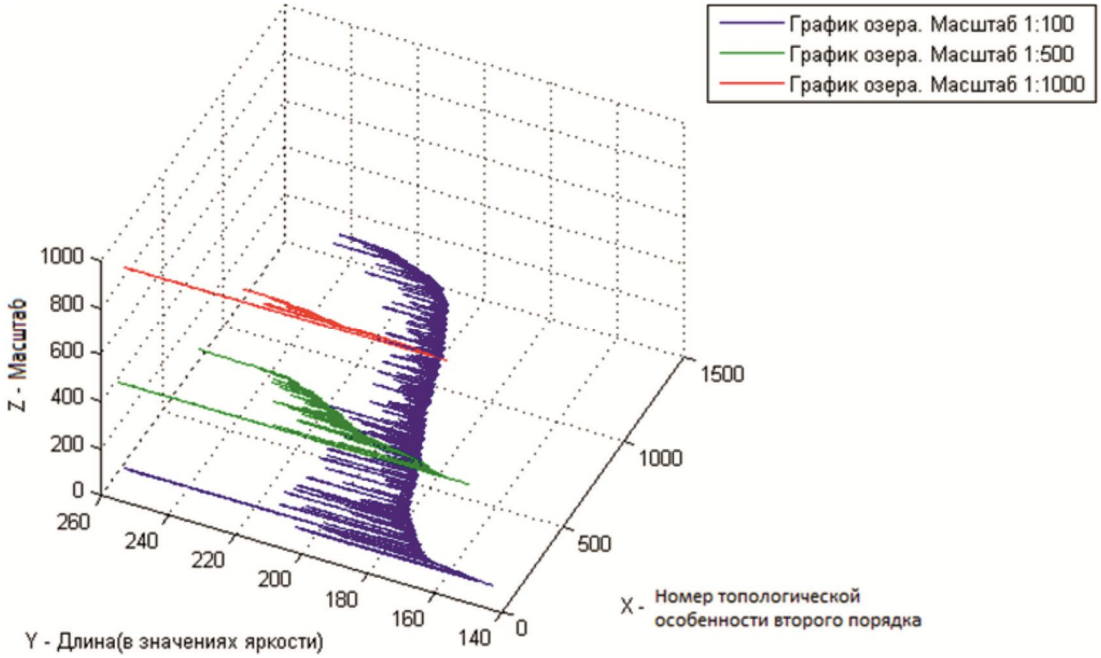

Рисунок 5 – График баркода с третьей составляющей для снимка водоема, сделанного на разных масштабах
Figure 5 – Barcode graph with third component for a picture of a reservoir taken at different scales

Исходя из графика на рисунке 5, можно сделать вывод, что баркоды на масштабах 1:100, 1:500, 1:1000 имеют схожую часть формы и у каждого объекта есть равные топологические особенности второго порядка, имеющие одинаковую максимальную длину $\max(l_i^{B1}) = \max(l_i^{B2}) = \max(l_i^{B3})$, которая находится в диапазоне яркости от 145 до 254. Сам баркод зависит от масштаба, чем меньше у объекта пикселей, тем меньше топологических особенностей второго порядка имеет баркод.

На рисунке 6 *а*, *б* отображено выделение найденных водоемов с рисунка 5 *б*, *в* на основе их трехмерных баркодов.

а (a) **б (b)**

Рисунок 6 – Снимки водоема на разных масштабах
а – найденный водоем на масштабе 1:100; б – найденный водоем на масштабе 1:500
Figure 6 – Pictures of the reservoir at different scales: a – a reservoir found on a scale of 1: 100;
b – found reservoir on a scale of 1:500

На основе полученного трехмерного баркода водоемов, алгоритм позволяет идентифицировать данные объекты на снимках, отраженных на рисунке 6 *а*, *б*.

Результат обработки снимков отражен в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты обработки снимков
Table 1 – Image processing results

	Общее кол-во объектов	Кол-во зданий	Кол-во мостов	Кол-во стадионов	Кол-во водоемов	Кол-во рек	Общий результат в процентах
Объект распознан	1023	500	17	7	480	19	93 %
Объект не распознан	77	52	1	0	23	1	7 %

При исследовании было обработано около 400 изображений. Общее количество объектов на данных снимках составило около 1100. Из них 1023 объектов были определены верно. Можно сделать вывод, что точность идентификации при исследовании составила 93 %. Это связано с тем, что часть анализируемых объектов на снимках частично перекрыта другими объектами, либо качество снимка настолько низкое, что объекты могут сливаться. Из-за этого не получается верно определить форму объекта для его дальнейшего анализа. Пример объекта, у которого невозможно определить форму, отражен на рисунке 7.

Рисунок 7 – Здание, часть которого закрыта деревьями
Figure 7 – A building part of which is covered with trees

Заключение

В статье описана работа алгоритма для идентификации пространственных объектов за различные промежутки времени и на различных масштабах. Алгоритм производит сопоставление на основе топологических признаков, в данном случае с использованием трехмерных баркодов, основанных на методах персистентной гомологии. Результатом работы алгоритма является идентификация объектов на снимках за разные временные промежутки и на различных масштабах, на основе полученных трехмерных баркодов.

Произведен анализ различных подходов к поиску пространственных объектов на спутниковых снимках, выявлены преимущества и недостатки.

В работе были исследованы снимки водоемов за различные годы и на разных масштабах. Построены графики трехмерных баркодов данных объектов, на которых отражены сходства и различия структуры объектов.

Сопоставление с использованием трехмерных баркодов позволило сделать вывод, что топология объектов и их баркоды не изменяются во времени и на разных масштабах. Точность идентификации объектов составила 93 %.

Кроме обработки снимков местности с водоемами, данные алгоритмы можно применять для сравнения изменения построек домов, изменения газовых подрывов на Арктических снимках, а также при изменении лесных покровов, например, после пожаров.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-37-90080.

Библиографический список

1. **Arroyo Ohori K., Ledoux H. and Stoter J. E.** A dimension independent extrusion algorithm using generalised maps. International Journal of Geographical Information Science, 2015, vol. 29, no. 7, pp. 1166-1186.

2. **Stoter J. E., van Oosterom P. J. M.** 5D Data Modelling: Full Integration of 2D/3D Space, Time and Scale Dimensions. Techncial University of Delft, 2014, pp. 2-16.

3. **Stoter J. E., van Oosterom P. J. M., Quak C. W., Visser T., Bakker N.** A semantic rich Multi-Scale Information Model Topography. Accepted for publication in International journal of geographical information science, IJGIS, 2010, vol. 25, no. 5, pp. 739-763.

4. **Meijers M., van Oosterom P. J. M., Quak C. W.** A storage and transfer efficient data structure for variable. Advances in GIScience, 2009, pp. 345-367.

5. **Vermeij M., van Oosterom P., Quak W., Tijssen.** Storing and using scale-less topo-logical data efficiently in a client-server DBMS environment. 7th International Conference on GeoComputation. Southampton, 2003.

6. **Croom, F.H.** Principles of Topology. Cengage Learning, 2002, pp. 302.

7. **Zhilin Li, Qi Zhou.** Integration of linear and areal hierarchies for continuous multi-scale representation of road networks. Intern. J. of Geographical Information Science, 2012, vol. 26, pp. 855-880.

8. **Jean-Daniel Boissonnat, Karthik C. Srikanta, Sébastien Tavenas.** Building Efficient and Compact Data Structures for Simplicial Complexe. An extended abstract appeared in the proceedings of SoCG, 2015.

9**. Attali D., Lieutier A., and Salinas D.** Efficient data structure for representing and simplifying simplicial complexes in high dimensions. In International Journal of Computational Geometry and Applications, 2012, vol. 22, no. 4, pp. 279-303.

10. **Badr A., Geffert V., and Shipman I.** Hyper-minimizing minimized deterministic finite state automata. RAIRO Theoretical Informatics and Applications, 2009, vol. 43, no. 1, pp. 69-94.

11. **Boissonnat J-D., Karthik C. S., and Tavenas S.** Building efficient and compact data structures for simplicial complexes. Symposium on Computational Geometry, 2015, pp. 642-656.

12. **Boissonnat J-D., Maria C.** The Simplex Tree: An Efficient Data Structure for General Simplicial Complexes. Algorithmica, 2014, vol. 70, no. 3, pp. 406-427.

13. **Boissonnat J-D., Mazauric D.** On the complexity of the representation of simplicial complexes by trees. Theoretical Computer Science, 2016, vol. 617, pp. 28-44.

14. **Michael F. Goodchild, Robert P. Haining.** GIS and spatial data analysis: Converging perspectives. Fifty Years of Regional Science, 2004, pp. 363-385.

15. **Черемисина Е. Н., Спивак И. Л., Спивак Л. Ф., Соколов А. С.** ГИС-технологии сравнения карт и управление развитием территории. Геоинформатика. 2014, № 4, с. 29-37.

16. **Черемисина Е. Н., Спивак Л. Ф., Спивак И. Л.** Информационно-аналитическое обеспечение ситуационного центра управления территорией. Геоинформатика. 2013, № 3, с. 1-7.

17. **Luc Anselin, Sheri Hudak.** Spatial data analysis with GIS // An introduction to application in the social sciences, 1992, P. 92.

18. **Gatrell A. C., Bailey T. C., Diggle P. J., and Rowlingson B. S.** Spatial point pattern analysis and its application in geographical epidemiology. Transactions, Institute of British Geographers, 1996, vol. 21, pp. 256-74.

19. **Wong D., Lee J.** Statistical Analysis with ArcView GIS and ArcGIS, 2005, pp. 464.

20. **John Wiley, Haining R.** Spatial Data Analysis, 2003, p. 430.

21. **Еремеев С. В., Андрианов Д. Е., Ковалев Ю. А.** Алгоритм идентификации временных эволюций пространственно-распределенных объектов на основе Баркодов. Геоинформатика, 2018, № 4, С. 23-29.

UDC 004.58, 004.051

ALGORITHM FOR IDENTIFICATION OF SPATIAL OBJECTS ON PICTURES FOR DIFFERENT TIME INTERVALS AND ON VARIOUS SCALES BASED ON THREE-DIMENSIONAL BARCODES

Y. A. Kovalev, postgraduate student, department of the information systems and software engineering, Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir, Russia;
orcid.org/0000-0001-6660-5334, e-mail: yurko02@mail.ru

The problem of identifying spatial objects in images at various scales and at specified intervals is considered. The algorithm makes comparison on the basis of topological features, in this case using three-dimensional barcodes based on persistent homology methods. The result of the algorithm is the identification of objects in images for different time intervals and at different scales, based on the obtained three-dimensional barcodes. The analysis of various approaches to the search for spatial objects in satellite images is carried out, the advantages and disadvantages are identified. In the work, pictures of water bodies for different years and at different scales were investigated. Charts of three-dimensional barcodes for these objects which reflect the similarities and differences in the structure of objects are constructed.

Key words: *three-dimensional barcode, persistent homology, topology, spatial objects.*

DOI: 10.21667/1995-4565-2020-74-89-98

References

1. **Arroyo Ohori K., Ledoux H. and Stoter J. E.** A dimension independent extrusion algorithm using generalised maps. *International Journal of Geographical Information Science*, 2015, vol. 29, no. 7, pp. 1166-1186.

2. **Stoter J. E., van Oosterom P. J. M.** 5D Data Modelling: Full Integration of 2D/3D Space, Time and Scale Dimensions. *Techncial University of Delft*, 2014, pp. 2-16.

3. **Stoter J. E., van Oosterom P. J. M., Quak C. W., Visser T., Bakker N.** A semantic rich Multi-Scale Information Model Topography. *Accepted for publication in International journal of geographical information science, IJGIS*, 2010, vol. 25, no. 5, pp. 739-763.

4. **Meijers M., van Oosterom P. J. M., Quak C. W.** A storage and transfer efficient data structure for variable. *Advances in GIScience*, 2009, pp. 345-367.

5. **Vermeij M., van Oosterom P., Quak W., Tijssen.** Storing and using scale-less topo-logical data efficiently in a client-server DBMS environment. *7th International Conference on GeoComputation. Southampton*, 2003.

6. **Croom, F.H.** Principles of Topology. *Cengage Learning*, 2002, pp. 302.

7. **Zhilin Li, Qi Zhou.** Integration of linear and areal hierarchies for continuous multi-scale representation of road networks. Intern. J. of *Geographical Information Science*, 2012, vol. 26, pp. 855-880.

8. **Jean-Daniel Boissonnat, Karthik C. Srikanta, Sébastien Tavenas.** *Building Efficient and Compact Data Structures for Simplicial Complexe.* An extended abstract appeared in the proceedings of SoCG, 2015.

9**. Attali D., Lieutier A., and Salinas D.** Efficient data structure for representing and simplifying simplicial complexes in high dimensions. *In International Journal of Computational Geometry and Applications*, 2012, vol. 22, no. 4, pp. 279-303.

10. **Badr A., Geffert V., and Shipman I.** Hyper-minimizing minimized deterministic finite state automata. RAIRO *Theoretical Informatics and Applications*, 2009, vol. 43, no. 1, pp. 69-94.

11. **Boissonnat J-D., Karthik C. S., and Tavenas S.** Building efficient and compact data structures for simplicial complexes. *Symposium on Computational Geometry*, 2015, pp. 642-656.

12. **Boissonnat J-D., Maria C.** The Simplex Tree: An Efficient Data Structure for General Simplicial Complexes. *Algorithmica*, 2014, vol. 70, no. 3, pp. 406-427.

13. **Boissonnat J-D., Mazauric D.** On the complexity of the representation of simplicial complexes by trees. *Theoretical Computer Science*, 2016, vol. 617, pp. 28-44.

14. **Michael F. Goodchild, Robert P. Haining.** GIS and spatial data analysis: Converging perspectives. *Fifty Years of Regional Science*, 2004, pp. 363-385.

15. **Cheremisina E. N., Spivak I. L., Spivak L. F., Sokolov A. S.** GIS technology for comparing maps and managing territory development. *Geoinformatics*, 2014, vol. 4, pp. 29-37.

16. **Cheremisina E. N., Spivak L. F., Spivak I. L.** Information and analytical support of the situational center of territorial management. *Geoinformatics*, 2013, vol. 3, pp. 1-7.

17. **Luc Anselin, Sheri Hudak.** *Spatial data analysis with GIS.* An introduction to application in the social sciences, 1992, p. 92.

18. **Gatrell, A. C., T. C. Bailey, P. J. Diggle, and B. S. Rowlingson.** Spatial point pattern analysis and its application in geographical epidemiology. *Transactions, Institute of British Geographer*s, 1996, vol. 21, pp. 256-74.

19. **Wong, D., Lee, J.** *Statistical Analysis with ArcView GIS and ArcGIS*, 2005, p. 464.

20. **John Wiley, Haining, R.** *Spatial Data Analysis*, 2003, pp. 430.

21. **Eremeev S.V., Andrianov D.E., Kovalev Y.A.** Algorithm for the identification of temporal evolutions of spatially distributed objects based on Barcodes. *Geoinformatics*, 2018, no. 4, pp. 23-29.