УДК 519.766.2

# О НЕЧЕТКОСТИ ПРАВИЛА МАМДАНИ КАК БИНАРНОГО ОТНОШЕНИЯ НЕЧЕТКИХ ЧИСЕЛ

**К. В. Бухенский,** к.ф-м.н., доцент, заведующий кафедрой ВМ РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0003-2602-2112, e-mail: bukhensky.k.v@rsreu.ru
**А. Н. Конюхов,** к.п.н., доцент кафедры ВМ РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0002-1523-7110, e-mail: chronos@bk.ru
**А. Б. Дюбуа,** к.ф-м.н., доцент кафедры ВМ РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0002-5924-4128, e-mail: abd-69@mail.ru
**К. В. Анисимов,** студент РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0001-8889-0818, e-mail: k.anisimov29@yandex.ru

***Цель работы*** *– исследовать нечеткость бинарного нечеткого отношения (НО), выражающего правило вывода (импликацию) Мамдани в зависимости от составляющих его нечетких множеств (НМ), заданных в виде нечетких чисел (НЧ) LR-типа. Работа является продолжением ранее выполненного исследования преобразований нечеткости при линейных и нелинейных операциях над НЧ. В качестве меры математической нечеткости НО и НЧ использован индекс нечеткости Ягера с линейной метрикой Хэмминга. Исследованы случаи отношений НЧ одного и разных классов. Получены расчетные формулы индекса нечеткости НО правила Мамдани для общего случая как унимодальных НЧ LR-типа, так и полимодальных (нечетких интервалов).*

***Ключевые слова:*** *нечеткое отношение, нечеткое число LR-типа, функция принадлежности, функция формы, индекс нечеткости, антецедент, консеквент, правило Мамдани.*

**DOI:** 10.21667/1995-4565-2021-75-85-98

## Введение

В данной статье изложены основные результаты очередного этапа исследования по проекту «Трансформации нечеткости в системах нечеткого вывода (FIS)», целью которого является совершенствование теории мягких вычислений и математического обеспечения контроллеров технических устройств, функционирующих на основе нечеткой логики.

На момент подготовки статьи достигнуты следующие основные результаты:

1) систематизированы понятия меры нечеткости и проанализированы распространенные на практике виды индексов нечеткости нечетких множеств (НМ) [1, 2];

2) выведен быстрый алгоритм расчета индексов нечеткости для нечетких чисел (НЧ) LR-типа [2];

3) раскрыты закономерности преобразований нечеткости при линейных операциях над НЧ LR-типа [3];

4) выявлены некоторые особенности преобразований нечеткости в результате нелинейных операций над НЧ LR-типа (на примере умножения НЧ) [4].

Выбор НЧ LR-типа не случаен: именно они обычно используются для описания термножеств лингвистических переменных в FIS [5, 6].

Связь между НМ-предпосылкой $\widetilde{A}(x)$ (антецедентом) и НМ-следствием $\widetilde{B}(y)$ (консеквентом) в нечеткой логике выражается посредством правил вида «ЕСЛИ $\widetilde{A}(x)$, ТО $\widetilde{B}(y)$», где $x \in X$, $y \in Y$ ($X$, $Y$ – универсальные множества). В частности, широчайшее распространение в инженерной практике получило так называемое нечеткое правило Мамдани [7, 8].

Подобного рода выражения взаимосвязи двух НМ удобно трактовать как бинарные нечеткие отношения (НО), реализуемые при помощи различных Т-норм. Так, правило Мамдани представимо в виде НО, построенного на основе Т-нормы Л. Заде [9].

Цель данной статьи – освещение основных результатов исследований нечеткости НО правила Мамдани в зависимости от характеристик составляющих его НМ – антецедента и консеквента, заданных в виде унимодальных или полимодальных НЧ LR-типа.

**Теоретическая часть**

Основные используемые обозначения и определения

$\widetilde{A} = \{< x \in U,\ \mu_{\widetilde{A}}(x) >\}$ – нечеткое подмножество (НМ) $\widetilde{A}$ универсального множества $U$;

$\mu_{\widetilde{A}}(x)$ – функция принадлежности (ФП) элемента $x \in U$ множеству $\widetilde{A}$, $0 \le \mu_{\widetilde{A}}(x) \le 1$;

$\text{supp}(\widetilde{A}) = \{x \in U \mid \mu_{\widetilde{A}}(x) > 0\}$ – носитель НМ $\widetilde{A}$ (четкое множество);

$\text{core}(\widetilde{A}) = \{x \in U \mid \mu_{\widetilde{A}}(x) = 1\}$ – ядро НМ (четкое множество);

$\text{height}(\widetilde{A}) = \max\limits_{x \in \text{supp}(\widetilde{A})} \mu_{\widetilde{A}}(x)$ – высота непустого НМ $\widetilde{A}$;

$\mathcal{F}(U)$ – совокупность всевозможных НМ, заданных на универсуме $U$;

$\tilde{u}(x)$ – нечеткое число (НЧ) – класс НМ с носителем на множестве действительных чисел, причем: 1) $\text{height}(\tilde{u}) = 1$ ($\tilde{u}$ – нормальное НМ); 2) $\tilde{u}$ – выпуклое НМ; 3) $\text{supp}(\tilde{u})$ – ограниченное множество [6].

Унимодальное НЧ LR-типа:

$$\tilde{u}(x) = \mu_{LR}(x) = [m, ls, rs]_{LR}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m-x}{ls}\right), & \text{если } m - ls \le x \le m, \quad ls > 0, \\ R\left(\dfrac{x-m}{rs}\right), & \text{если } m < x \le m + rs, \quad rs > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{1}$$

где $\{m\}$ – ядро НЧ; $ls$ и $rs$ – левый и правый спрэды НЧ; $L(t)$, $R(t)$: $[0,1] \to [0,1]$ – левая и правая функции формы НЧ, т.е. непрерывные убывающие функции, такие что $R(0) = L(0) = 1$ и $R(1) = L(1) = 0$, [6, 10]; $L(t)$, $R(t) \in F[0,1]$ – класс функций формы на отрезке $[0,1]$.

Полимодальное НЧ LR-типа (нечеткий интервал):

$$\tilde{u}(x) = [m_1, m_2, ls, rs]_{LR}(x) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m_1-x}{ls}\right), & \text{если } m_1 - ls \le x \le m_1, \quad ls > 0, \\ 1, & \text{если } m_1 < x \le m_2 \\ R\left(\dfrac{x-m_2}{rs}\right), & \text{если } m_2 < x \le m_2 + rs, \quad rs > 0, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{2}$$

где $[m_1, m_2]$ – ядро НЧ, $m_1 < m_2$.

Нечеткое $n$-арное отношение $\widetilde{\mathcal{R}}$, заданное на универсуме $U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$ – это любое нечеткое подмножество $U_1 \times U_2 \times ... \times U_n$ описываемое ФП $\mu_{\widetilde{\mathcal{R}}} : U_1 \times U_2 \times ... \times U_n \to [0,1]$. Число $\mu_{\widetilde{\mathcal{R}}}(x_1, x_2, ..., x_n) \in [0,1]$ – степень принадлежности элемента $(x_1, x_2, ..., x_n)$ отношению $\widetilde{\mathcal{R}}$ [10].

Мера математической нечеткости НМ $mf(\widetilde{A})$ – всякая функция на множестве всех нечетких подмножеств $\mathcal{F}(U)$ универсума $U$, удовлетворяющая совокупности условий 1-4:

1) $(mf(\widetilde{A}) = 0) \Leftrightarrow ((\mu_{\widetilde{A}}(x) = 1) \vee (\mu_{\widetilde{A}}(x) = 0)\ \forall x \in U)$;

2) $(\mu_{\widetilde{A}}(x) = 0{,}5\ \ \forall x \in U) \Rightarrow (mf(\widetilde{A}) = \max\limits_{\widetilde{Z} \in \mathcal{F}(U)} mf(\widetilde{Z}))$;

3) $\left.\begin{array}{l}\mu_{\tilde{A}}(x) \le \mu_{\tilde{B}}(x), \text{ если } \mu_{\tilde{B}}(x) \le 0,5 \\ \mu_{\tilde{A}}(x) \ge \mu_{\tilde{B}}(x), \text{ если } \mu_{\tilde{B}}(x) \ge 0,5\end{array}\right\} \Rightarrow (mf(\tilde{A}) \le mf(\tilde{B}));$

4) $mf(\tilde{A}) = mf(\overline{\tilde{A}})$, где $\overline{\tilde{A}}$ – дополнение НМ $\tilde{A}$ до $U$, т.е. $\mu_{\overline{\tilde{A}}}(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x), \forall x \in U$ [11].

Если $0 \le mf(\tilde{A}) \le 1$, то $mf(\tilde{A})$ называется индексом математической нечеткости НМ $if(\tilde{A})$ или просто индексом нечеткости (*index of fuzziness*) [11].

В работе использован индекс нечеткости Ягера (R. Yager) с линейной метрикой Хэмминга для НМ с интегрируемой ФП $\mu_{\tilde{A}}(x)$ на носителе $(a,b) = \text{supp}(\tilde{A})$ [2, 12]:

$$if(\tilde{A}) = 1 - \frac{1}{b-a}\int_a^b \left|2\mu_{\tilde{A}}(x) - 1\right| dx. \tag{3}$$

**Результаты теоретического исследования**

1. Рассмотрим бинарное НО нечетких унимодальных чисел LR-типа $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ с носителями $X = \text{supp}\,\tilde{u} = [0,a]$ и $Y = \text{supp}\,\tilde{v} = [0,b]$, что ничуть не ограничивает общности рассуждений.

В качестве Т-нормы при построении отношения возьмем Т-норму Л. Заде $\Delta_Z(x,y) = \min\{\mu_{\tilde{u}}(x), \mu_{\tilde{v}}(y)\}$; $(x,y) \in X \times Y$. Полученное отношение в нечеткой логике носит название правила (импликации) Мамдани:

$$\widetilde{\mathcal{R}}_M(x,y) = \min_{X\times Y}\{\mu_{\tilde{u}}(x), \mu_{\tilde{v}}(y)\} = \tilde{u}(x) \wedge \tilde{v}(y), \tag{4}$$

где $\tilde{u}(x) = [m_u, ls_u, rs_u]_{L_uR_u}(x)$ – антецедент, а $\tilde{v}(y) = [m_v, ls_v, rs_v]_{L_vR_v}(y)$ – консеквент, образующие НО. Примечание: для упрощения записей мы будем отождествлять символы НЧ и его ФП, например $\tilde{u}(x)$ и $\mu_{\tilde{u}}(x)$, а индекс $M$ – опускать. Отношение (4) будем называть отношением Мамдани.

По аналогии с (3) построим индекс нечеткости отношения (4) НМ – чисел $\tilde{u}(x)$, $\tilde{v}(y)$, который для краткости будем обозначать $if(\widetilde{\mathcal{R}}(\tilde{u},\tilde{v}))$ или просто $if\left(\widetilde{\mathcal{R}}\right)$:

$$if(\widetilde{\mathcal{R}}) = 1 - \frac{1}{ab}\iint\limits_{X\times Y}\left|2\widetilde{\mathcal{R}}(x,y) - 1\right| dxdy = 1 - \frac{1}{ab}\int_0^b dy\int_0^a \left|2\min\left(\tilde{u}(x), \tilde{v}(y)\right) - 1\right| dx. \tag{5}$$

Для расчета индекса нечеткости отношения Мамдани выберем подходящую схему интегрирования (5). Разобьем поверхность $\widetilde{\mathcal{R}}\left(x,y\right)$ плоскостями $z = \alpha$ с бесконечно малым шагом $d\alpha$ и спроецируем участки поверхности $dS_i$ на плоскость XOY (рисунок 1).

Пусть имеются альфа-сечения НО $\widetilde{\mathcal{R}}(x,y)$ вида $\mathcal{R}_\alpha = \{(x,y) \mid \widetilde{\mathcal{R}}(x,y) \ge \alpha\}$, $0 \le \alpha \le 1$, т.е. прямоугольные области в плоскости XOY (рисунок 1, *в*)

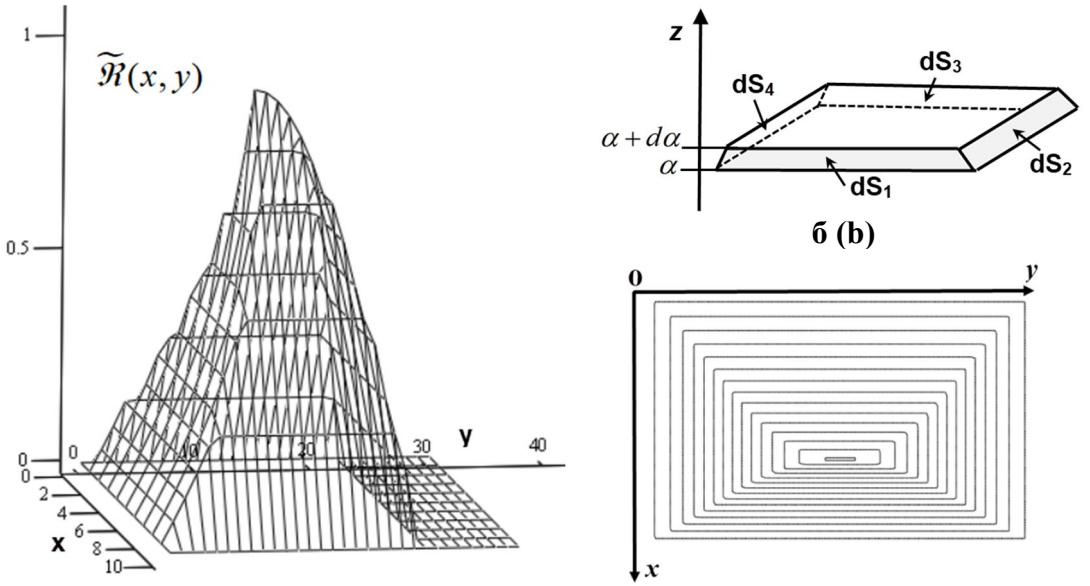
$$\mathcal{R}_\alpha = \left[m_u - ls_u L_u^{-1}(\alpha),\ m_u + rs_u R_u^{-1}(\alpha)\right] \times \left[m_v - ls_v L_v^{-1}(\alpha),\ m_v + rs_v R_v^{-1}(\alpha)\right], \tag{6}$$

где $L_u^{-1}(x)$, $R_u^{-1}(x)$, $L_v^{-1}(y)$, $R_v^{-1}(y)$ – функции, обратные к функциям формы чисел $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ соответственно; их существование и однозначность обеспечены непрерывностью и строгой монотонностью $L_u(x)$, $R_u(x)$, $L_v(y)$, $R_v(y)$ соответственно.

Площадь проекции сегмента поверхности НО $dS_1(\alpha)$ на плоскость XOY (рисунок 1, *б*) будет равна

$$dS_1(\alpha) = (ls_u L_u^{-1}(\alpha) + rs_u R_u^{-1}(\alpha))\frac{d\alpha}{|tg\beta|} = (ls_u L_u^{-1}(\alpha) + rs_u R_u^{-1}(\alpha))\frac{ls_v d\alpha}{|L_v'(L_v^{-1}(\alpha))|}, \tag{7}$$

где $tg\beta$ – угловой коэффициент кривой ФП $z(y) = L_v\left(\dfrac{m_v - y}{ls_v}\right)$ в точке $y = m_v - ls_v L_v^{-1}(\alpha)$.




**а (a)** **б (b)** **в (c)**

**Рисунок 1 – а Поверхность НО $\widetilde{\mathcal{R}}(x,y)=\tilde{u}(x)\wedge\tilde{v}(y)$; б Схема разбиения поверхности параллельными плоскостями $z=\alpha$; в Схема разбиения области интегрирования**

**Figure 1 – a Surface of a fuzzy relation $\widetilde{\mathcal{R}}(x,y)=\tilde{u}(x)\wedge\tilde{v}(y)$; b Scheme of surface partitioning with parallel planes $z=\alpha$; c Scheme of integration domain partitioning**

Аналогично представляя проекции $dS_2, dS_3, dS_4$, получаем интегрированием по всем $\alpha\,(0\le\alpha\le 1)$ индекс нечеткости НО

$$\begin{aligned} if(\widetilde{\mathcal{R}}(\tilde{u},\tilde{v})) = 1-\frac{1}{S}\Bigg[&\int_0^1 |2\alpha-1|\,(ls_u L_u^{-1}(\alpha)+rs_u R_u^{-1}(\alpha))\left|L_v'(L_v^{-1}(\alpha))\right|^{-1} ls_v d\alpha + \\ &+\int_0^1 |2\alpha-1|\,(ls_u L_u^{-1}(\alpha)+rs_u R_u^{-1}(\alpha))\left|R_v'(R_v^{-1}(\alpha))\right|^{-1} rs_v d\alpha + \\ &+\int_0^1 |2\alpha-1|\,(ls_v L_v^{-1}(\alpha)+rs_v R_v^{-1}(\alpha))\left|L_u'(L_u^{-1}(\alpha))\right|^{-1} ls_u d\alpha + \\ &+\int_0^1 |2\alpha-1|\,(ls_v L_v^{-1}(\alpha)+rs_v R_v^{-1}(\alpha))\left|R_u'(R_u^{-1}(\alpha))\right|^{-1} rs_u d\alpha\Bigg], \end{aligned} \tag{8}$$

где $\widetilde{\mathcal{R}}(\tilde{u},\tilde{v})$ – НО Мамдани; $S=ab$ – площадь носителя НО (области интегрирования).

Выполнив в каждом из интегралов (8) соответствующую замену переменных, получим

$$\begin{aligned} if(\widetilde{\mathcal{R}}(\tilde{u},\tilde{v})) = 1-\frac{1}{ab}\Bigg[&\int_0^1 |2L_v(t)-1|\,ls_v(ls_u L_u^{-1}(L_v(t))+rs_u R_u^{-1}(L_v(t)))dt + \\ &+\int_0^1 |2R_v(t)-1|\,rs_v(ls_u L_u^{-1}(R_v(t))+rs_u R_u^{-1}(R_v(t)))dt+\int_0^1 |2L_u(t)-1|\,ls_u(ls_v L_v^{-1}(L_u(t))+ \\ &+rs_v R_v^{-1}(L_u(t)))dt+\int_0^1 |2R_u(t)-1|\,rs_u(ls_v L_v^{-1}(R_u(t))+rs_v R_v^{-1}(R_u(t)))dt\Bigg]. \end{aligned} \tag{9}$$

2. Рассмотрим сначала «одноклассовый» случай: $L_u(t)\equiv R_u(t)\equiv L_v(t)\equiv R_v(t)\equiv F(t)$, то есть НО Мамдани между двумя унимодальными НЧ одного типа, например «треугольное – треугольное» или «гауссово – гауссово». Тогда (9) упрощается до

$$if(\widetilde{\mathcal{R}}(\tilde{u},\tilde{v})) = 1 - \frac{2}{ab}\int_0^1 \left|2F_v(t)-1\right|(ls_v + rs_v)(ls_u + rs_u)tdt = 1 - 2\int_0^1 \left|2F_v(t)-1\right|tdt, \tag{10}$$

или после замены переменной

$$if(\widetilde{\mathcal{R}}(\tilde{u},\tilde{v})) = 1 - 2\int_0^1 \left|2F(\sqrt{t})-1\right|\sqrt{t}d\sqrt{t} = 1 - \int_0^1 \left|2F(\sqrt{t})-1\right|dt = if(F(\sqrt{t})). \tag{11}$$

В [4] нами были рассчитаны и сопоставлены индексы $if(F(t))$ и $if(F(\sqrt{t}))$ для некоторых функций формы. Здесь получаем, в частности, вывод о равенстве индекса нечеткости бинарного отношения $\widetilde{\mathcal{R}}(\tilde{u},\tilde{v})$ Мамдани индексам антецедентов и консеквентов с линейными, квадратичными гладкими и гармоническими функциями формы.

3. Рассмотрим «кросс-классовый» случай при условии, что левая и правая функции формы каждого из НЧ-антецедента и НЧ-консеквента одинаковы: $L_u(t) \equiv R_u(t) \equiv F_u(t)$; $L_v(t) \equiv R_v(t) \equiv F_v(t),$ например «треугольное НЧ – гауссово НЧ». Тогда (9) примет вид

$$\begin{aligned} if(\widetilde{\mathcal{R}}(\tilde{u},\tilde{v})) = 1 - \frac{1}{ab}\Bigg[&\int_0^1 \left|2F_v(t)-1\right|(ls_v + rs_v)(ls_u F_u^{-1}(F_v(t)) + rs_u F_u^{-1}(F_v(t)))dt + \\ &+ \int_0^1 \left|2F_u(t)-1\right|(ls_u + rs_u)(ls_v F_v^{-1}(F_u(t)) + rs_v F_v^{-1}(F_u(t)))dt\Bigg] = \\ &= 1 - \int_0^1 \left|2F_v(t)-1\right|F_u^{-1}(F_v(t))dt - \int_0^1 \left|2F_u(t)-1\right|F_v^{-1}(F_u(t))dt. \end{aligned} \tag{12}$$

Выполним замены переменных в интегралах (12) и преобразуем с учетом, что обратная функция формы – также функция формы [4], следовательно, $(F_v^{-1\prime}(\alpha) < 0) \wedge (F_u^{-1\prime}(\alpha) < 0)$ и

$$\begin{aligned} if(\widetilde{\mathcal{R}}(\tilde{u},\tilde{v})) &= 1 + \int_0^1 \left|2\alpha - 1\right|F_u^{-1}(\alpha)F_v^{-1\prime}(\alpha)d\alpha + \int_0^1 \left|2\alpha - 1\right|F_v^{-1}(\alpha)F_u^{-1\prime}(\alpha)d\alpha = \\ &= 1 + \int_0^1 \left|2\alpha - 1\right|(F_u^{-1}(\alpha)F_v^{-1}(\alpha))'d\alpha = \\ &= 1 + \int_0^{1/2} (1-2\alpha)(F_u^{-1}(\alpha)F_v^{-1}(\alpha))'d\alpha + \int_{1/2}^1 (2\alpha - 1)(F_u^{-1}(\alpha)F_v^{-1}(\alpha))'d\alpha. \end{aligned} \tag{13}$$

Интегрируя (13) по частям, получаем

$$\begin{aligned} if(\widetilde{\mathcal{R}}(\tilde{u},\tilde{v})) &= 1 - 1 + 2\int_0^{1/2} (F_u^{-1}(\alpha)F_v^{-1}(\alpha))d\alpha - 2\int_{1/2}^1 (F_u^{-1}(\alpha)F_v^{-1}(\alpha))d\alpha = \\ &= 2\int_0^{1/2} (F_u^{-1}(\alpha)F_v^{-1}(\alpha))d\alpha - 2\int_{1/2}^1 (F_u^{-1}(\alpha)F_v^{-1}(\alpha))d\alpha. \end{aligned} \tag{14}$$

Интерпретация формулы (14): индекс нечеткости НО Мамдани равен разности средних интегральных значений функции $F_u^{-1}(\alpha)F_v^{-1}(\alpha)$ на отрезках $0 \le \alpha \le 1/2$ и $1/2 \le \alpha \le 1$.

Обозначим $G^{-1}(\alpha) = F_u^{-1}(\alpha)F_v^{-1}(\alpha),\ 0 \le \alpha \le 1$. Легко показать, что эта функция является функцией формы, из чего также следует, что и $G(t)$ – функция формы. Кроме того, точка перехода $tp_G = G^{-1}(0,5) = F_u^{-1}(0,5)F_v^{-1}(0,5) = tp_u tp_v$.

Из (14) и геометрических соображений следует:

$$if(\widetilde{\mathfrak{R}}(\tilde{u},\tilde{v}))=2\int_0^{1/2}G^{-1}(\alpha)d\alpha-2\int_{1/2}^{1}G^{-1}(\alpha)d\alpha=2\left(\frac{1}{2}tp_G+\int_{tp_G}^{1}G(t)dt\right)-$$
$$-2\left(\int_0^{tp_G}G(t)dt-\frac{1}{2}tp_G\right)=2tp_G+2\int_{tp_G}^{1}G(t)dt-2\int_0^{tp_G}G(t)dt. \quad (15)$$

Но и индекс нечеткости функции формы $G(t)$ по определению

$$if(G)=1-\int_0^1\left|2G(t)-1\right|dt=1-\left(2\int_0^{tp_G}G(t)dt-tp_G-2\int_{tp_G}^{1}G(t)dt+1-tp_G\right)=$$
$$=2tp_G+2\int_{tp_G}^{1}G(t)dt-2\int_0^{tp_G}G(t)dt, \quad (16)$$

то есть из (15) и (16) следует, что

$$if(\widetilde{\mathfrak{R}}(\tilde{u},\tilde{v}))=if(G)=if((F_u^{-1}(\alpha)F_v^{-1}(\alpha))^{inv}), \quad (17)$$

где верхний индекс «*inv*» обозначает обратную функцию.

Несмотря на лаконичность, (17) пригодно для расчетов лишь в простейших случаях. Например, легко найти индекс нечеткости отношения Мамдани для пары «треугольное число (*lin*) – усеченная парабола (*cp*)». Действительно, в таком случае

$$\begin{cases}F_u(t)=1-t\\F_v(t)=1-t^2\\0\le t\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}F_u^{-1}(\alpha)=1-\alpha\\F_v^{-1}(\alpha)=\sqrt{1-\alpha}\Rightarrow F_u^{-1}(\alpha)F_v^{-1}(\alpha)=(1-\alpha)^{3/2}\Leftrightarrow\\0\le\alpha\le 1\end{cases} \quad (18)$$

$$\Leftrightarrow(F_u^{-1}(\alpha)F_v^{-1}(\alpha))^{inv}=1-t^{\frac{2}{3}}\Rightarrow if(\widetilde{\mathfrak{R}}(lin,cp))=1-\int_0^1\left|1-2t^{\frac{2}{3}}\right|dt=\frac{4-\sqrt{2}}{5}=0,517.$$

Получим другую интерпретацию (14):

$$if(\widetilde{\mathfrak{R}}(\tilde{u},\tilde{v}))=2\int_0^{1/2}(F_u^{-1}(\alpha)F_v^{-1}(\alpha))d\alpha-2\left(\int_0^1(F_u^{-1}(\alpha)F_v^{-1}(\alpha))d\alpha-\int_0^{1/2}(F_u^{-1}(\alpha)F_v^{-1}(\alpha))d\alpha\right)=$$
$$=4\int_0^{1/2}(F_u^{-1}(\alpha)F_v^{-1}(\alpha))d\alpha-2\int_0^1(F_u^{-1}(\alpha)F_v^{-1}(\alpha))d\alpha=2I_{u,v}\left(\frac{1}{2}\right)-I_{u,v}(1), \quad (19)$$

где

$$I_{u,v}(x)=2\int_0^x F_u^{-1}(\alpha)F_v^{-1}(\alpha)d\alpha,\ 0\le x\le 1\ - \quad (20)$$

интегральная функция для расчета индекса нечеткости НО Мамдани.

Например, для пары «гиперболическое число (*hyp*) – треугольное (*lin*)»:

$$I_{hyp,lin}(x)=\int_0^x\left(\frac{2}{1+\alpha}-1\right)(1-\alpha)d\alpha=4\ln(1+x)-3x+\frac{x^2}{2},\ 0\le x\le 1;$$
$$if(\widetilde{\mathfrak{R}}(hyp,lin))=2I_{hyp,lin}\left(\frac{1}{2}\right)-I_{hyp,lin}(1)=0,442. \quad (21)$$

Формулы (14) и (19) открывают возможности для анализа.

4. Выясним, какова верхняя грань индекса нечеткости НО $\widetilde{\mathfrak{R}}(\tilde{u}(x),\tilde{v}(y))$ Мамдани с консеквентом (антецедентом) фиксированного вида. Нижняя грань, очевидно, равна нулю.

Заметим, что в соответствии с (14)

$$if(\widetilde{\Re}(\tilde{u},\tilde{v})) \to \max \;\Leftrightarrow\; \int_{1/2}^{1} (F_u^{-1}(\alpha)F_v^{-1}(\alpha))d\alpha \to 0. \tag{22}$$

Поэтому

$$\sup_{\tilde{u}(x)\in\mathcal{F}(X)}(if(\widetilde{\Re}(\tilde{u},\tilde{v}))) = 2\int_0^{1/2} F_v^{-1}(\alpha)d\alpha. \tag{23}$$

Например, если консеквент – треугольное число, то

$$\sup_{\tilde{u}(x)\in\mathcal{F}(X)}(if(\widetilde{\Re}(\tilde{u},lin))) = 2\int_0^{1/2} (1-\alpha)d\alpha = \frac{3}{4} = 0,75. \tag{24}$$

В случае усеченной параболы

$$\sup_{\tilde{u}(x)\in\mathcal{F}(X)}(if(\widetilde{\Re}(\tilde{u},cp))) = 2\int_0^{1/2} \sqrt{1-\alpha}\,d\alpha = \frac{4-\sqrt{3}}{2} = 0,862. \tag{25}$$

5. Обобщение полученных результатов на унимодальные НЧ с произвольными функциями формы. Вычисления построены на взвешенном вкладе в индекс нечеткости НО от четырех зон отношений значений функций формы пропорционально площадям зон (рисунок 2).

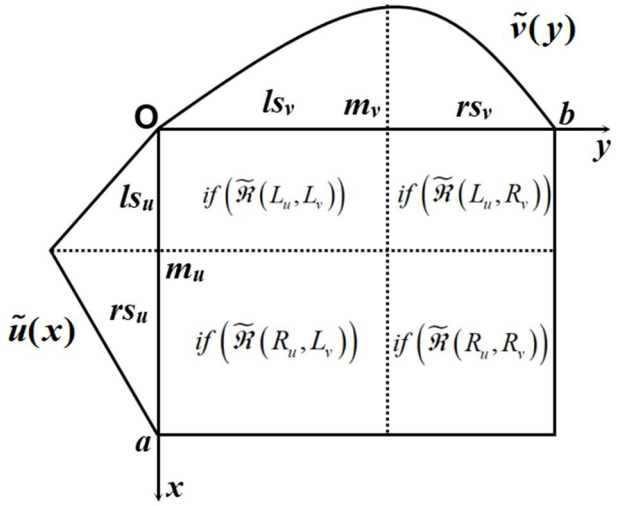



**Рисунок 2 – К расчету индекса нечеткости отношения $\widetilde{\Re}(x,y) = \tilde{u}(x) \wedge \tilde{v}(y)$ с произвольными функциями формы и спрэдами (унимодальный случай)**
**Figure 2 – On calculation the index of relation fuzziness $\widetilde{\Re}(x,y) = \tilde{u}(x) \wedge \tilde{v}(y)$ with arbitrary form functions and spreads (unimodal case)**

$$\begin{aligned} if(\widetilde{\Re}(\tilde{u},\tilde{v})) &= \frac{1}{ab}\cdot\Big[ ls_u ls_v if(\widetilde{\Re}(L_u,L_v)) + ls_u rs_v if(\widetilde{\Re}(L_u,R_v)) + \\ &+ rs_u ls_v if(\widetilde{\Re}(R_u,L_v)) + rs_u rs_v if(\widetilde{\Re}(R_u,R_v))\Big] = \\ &= ls_u^* ls_v^* if(\widetilde{\Re}(L_u,L_v)) + ls_u^* rs_v^* if(\widetilde{\Re}(L_u,R_v)) + rs_u^* ls_v^* if(\widetilde{\Re}(R_u,L_v)) + rs_u^* rs_v^* if(\widetilde{\Re}(R_u,R_v)), \end{aligned} \tag{26}$$

где $ls_u^* = \frac{ls_u}{a}$, $ls_v^* = \frac{ls_v}{b}$ и т.д. – приведенные спрэды НЧ; $if(\widetilde{\Re}(L_u,L_v))$ и др. – индексы нечеткости отношений между парами функций формы на квадрате $[0,1]\times[0,1]$ (рисунок 2).

Удобно (26) переписать в матричном виде:

$$if(\widetilde{\Re}(\tilde{u},\tilde{v})) = (ls_u^* \quad rs_u^*)\begin{pmatrix} if(\widetilde{\Re}(L_u,L_v)) & if(\widetilde{\Re}(L_u,R_v)) \\ if(\widetilde{\Re}(R_u,L_v)) & if(\widetilde{\Re}(R_u,R_v)) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ls_v^* \\ rs_v^* \end{pmatrix} = S_u^{*T}\left\|if(\widetilde{\Re}(F_u^i,F_v^j))\right\|S_v^*, \tag{27}$$

где $S_u^*$ и $S_v^*$ – вектор-столбцы приведенных спрэдов LR-антецедента и LR-консеквента соответственно; $\left\|if(\widetilde{\Re}(F_u^i, F_v^j))\right\|$ – матрица индексов нечеткости попарных отношений функций форм на квадрате $[0,1]\times[0,1]$ (размерности 2x2).

6. Обобщение на случай полимодальных НЧ LR-типа (нечетких интервалов) (2):

$$\tilde{u}(x) = [m_u^l, m_u^r, ls_u, rs_u]_{L_u R_u}(x), \quad \tilde{v}(y) = [m_v^l, m_v^r, ls_v, rs_v]_{L_v R_v}(y). \tag{28}$$

Теперь взвешенный расчет производится по девяти зонам (рисунок 3).

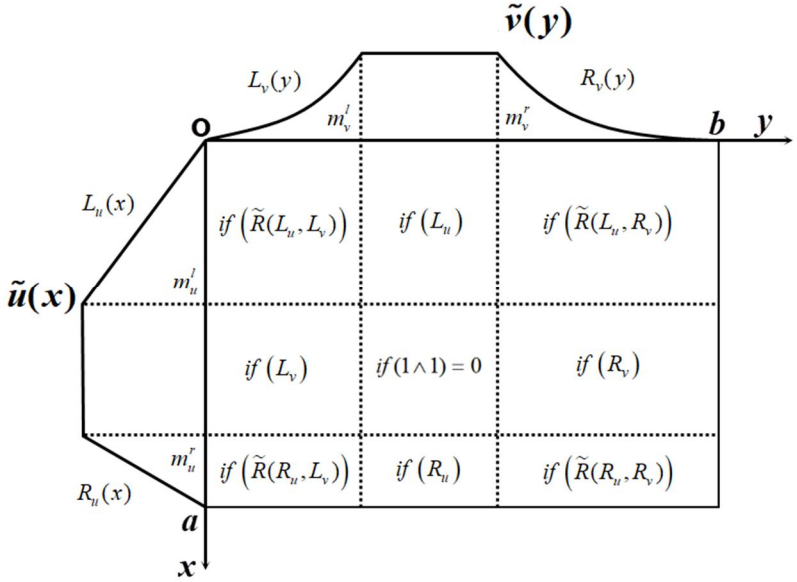



**Рисунок 3 – К расчету индекса нечеткости отношения $\widetilde{\Re}(x, y) = \tilde{u}(x) \wedge \tilde{v}(y)$ в полимодальном случае (нечеткие интервалы)**

**Figure 3 – On calculation the index of relation fuzziness $\widetilde{\Re}(x, y) = \tilde{u}(x) \wedge \tilde{v}(y)$ in a polymodal case (fuzzy intervals)**

$$\begin{aligned} if(\widetilde{\Re}(\tilde{u}, \tilde{v})) = \frac{1}{ab} \cdot \Big[ & ls_u ls_v if(\widetilde{\Re}(L_u, L_v)) + ls_u rs_v if(\widetilde{\Re}(L_u, R_v)) + rs_u ls_v if(\widetilde{\Re}(R_u, L_v)) + \\ & + rs_u rs_v if(\widetilde{\Re}(R_u, R_v)) + (m_u^r - m_u^l)(ls_v if(L_v) + rs_v if(R_v)) + (m_v^r - m_v^l)(ls_u if(L_u) + rs_u if(R_u)) \Big] = \\ & = ls_u^* ls_v^* if(\widetilde{\Re}(L_u, L_v)) + ls_u^* rs_v^* if(\widetilde{\Re}(L_u, R_v)) + rs_u^* ls_v^* if(\widetilde{\Re}(R_u, L_v)) + rs_u^* rs_v^* if(\widetilde{\Re}(R_u, R_v)) + \\ & + cs_u^* ls_v^* if(L_v) + cs_u^* rs_v^* if(R_v) + cs_v^* ls_u^* if(L_u) + cs_v^* rs_u^* if(R_u). \end{aligned} \tag{29}$$

Представляем (29) в матричном виде

$$if(\widetilde{\Re}(\tilde{u}, \tilde{v})) = (ls_u^* \quad cs_u^* \quad rs_u^*) \begin{pmatrix} if(\widetilde{\Re}(L_u, L_v)) & if(\widetilde{\Re}(L_u, 1)) & if(\widetilde{\Re}(L_u, R_v)) \\ if(\widetilde{\Re}(1, L_v)) & if(\widetilde{\Re}(1,1)) & if(\widetilde{\Re}(1, R_v)) \\ if(\widetilde{\Re}(R_u, L_v)) & if(\widetilde{\Re}(R_u, 1)) & if(\widetilde{\Re}(R_u, R_v)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ls_v^* \\ cs_v^* \\ rs_v^* \end{pmatrix} \tag{30}$$

или

$$if(\widetilde{\Re}(\tilde{u}, \tilde{v})) = (ls_u^* \quad cs_u^* \quad rs_u^*) \begin{pmatrix} if(\widetilde{\Re}(L_u, L_v)) & if(L_u) & if(\widetilde{\Re}(L_u, R_v)) \\ if(L_v) & 0 & if(R_v) \\ if(\widetilde{\Re}(R_u, L_v)) & if(R_u) & if(\widetilde{\Re}(R_u, R_v)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ls_v^* \\ cs_v^* \\ rs_v^* \end{pmatrix}, \tag{31}$$

или

$$if(\widetilde{\Re}(\tilde{u}, \tilde{v})) = S_u^{*T} \left\|if(\widetilde{\Re}(F_u^i, F_v^j))\right\| S_v^*, \tag{32}$$

где $cs_u^*$ и $cs_v^*$ – приведенные спрэды ядер (приведенные центральные спрэды) НЧ; $\left\| if(\widetilde{\mathfrak{R}}(F_u^i, F_v^j)) \right\|$ – матрица индексов нечеткости попарных отношений функций форм на квадрате [0,1]×[0,1] (размерности 3x3).

**Результаты вычислительных экспериментов**

Для экспериментов использованы следующие функции формы НЧ (таблица 1).

**Таблица 1 – Краткие характеристики функций формы, использованных в экспериментах**
**Table 1 – Brief characteristics of form functions used in experiments**

| Тип функции формы $F(t)$ | Выражение $F(t)$, $(0 \le t \le 1)$ | Выражение $F^{-1}(\alpha)$, $(0 \le \alpha \le 1)$ | $if(F)$ | $if(F^{-1})$ |
|---|---|---|---|---|
| Гладкая гауссова (sg) | $\begin{cases} \exp\left(1-\frac{1}{1-t^2}\right), \text{ если } t \ne 1 \\ 0, \text{ если } t = 1 \end{cases}$ | $\begin{cases} \sqrt{1-\frac{1}{1-\ln(\alpha)}}, \text{ если } \alpha \ne 0 \\ 1, \text{ если } \alpha = 0 \end{cases}$ | 0,323 | 0,613 |
| Гладкая квадратичная (sq) | $\begin{cases} 1-2t^2, \text{ если } 0 \le t \le 0,5 \\ 2(1-t)^2, \text{ если } 0,5 < t \le 1 \end{cases}$ | $\begin{cases} 1-\sqrt{\frac{\alpha}{2}}, \text{если } 0 \le \alpha \le 0,5 \\ \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}}, \text{если } 0,5 < \alpha \le 1 \end{cases}$ | 0,333 | 0,667 |
| Гармоническая (hrm) | $\left(\sin\frac{\pi(t-1)}{2}\right)^2$ | $1-\frac{2\arcsin\sqrt{\alpha}}{\pi}$ | 0,363 | 0,637 |
| Усеченная парабола (cp) | $1-t^2$ | $\sqrt{1-\alpha}$ | 0,391 | 0,500 |
| Усеченная гауссова (cg) | $2\exp\left(-t^2\ln 2\right)-1$ | $\sqrt{\frac{\ln\frac{\alpha+1}{2}}{-\ln 2}}$ | 0,406 | 0,540 |
| Гиперболическая (hyp) | $\frac{2}{1+t}-1$ | $\frac{2}{1+\alpha}-1$ | 0,471 | 0,471 |
| Логарифмическая (log) | $1-\frac{\ln(1+t)}{\ln 2}$ | $\exp\left((1-\alpha)\ln 2\right)-1$ | 0,495 | 0,490 |
| Корень квадратный (sqrt) | $1-\sqrt{t}$ | $(1-\alpha)^2$ | 0,500 | 0,391 |
| Линейная (lin) | $1-t$ | $1-\alpha$ | 0,500 | 0,500 |

**Вычислительный эксперимент 1.** Экспериментальные значения индексов нечеткости здесь и далее рассчитывали в MathCad с абсолютной погрешностью Δ не более 0,001. Проверены теоретические выводы, выраженные формулами (11), (14), (19), (23). Обнаружено их соответствие прямым вычислениям по формуле (5). Результаты расчетов приведены в таблице 2.

Отметим инвариантность нечеткости отношения Мамдани для чисел одного типа с функциями формы «гладкая квадратичная», «гармоническая» и «линейная» относительно нечеткости образующих НЧ. У всех этих функций формы точка перехода $t_p = 0,5$. Если для пары НЧ одного типа $t_p > 0,5$, то индекс НО Мамдани больше индекса НЧ и наоборот.

Интересно отметить высокую положительную линейную корреляцию (выборочный коэффициент корреляции $r_в > 0,93$) между величиной точки перехода $t_p$ и верхней гранью возможных значений индекса нечеткости отношения Мамдани с данным антецедентом (консеквентом). Еще более тесная линейная корреляционная связь ($r_в > 0,96$) обнаруживается между значениями $t_p$ и значениями $if(\widetilde{\Re}(F, F^{-1}))$.

**Таблица 2 – Индексы нечеткости отношения Мамдани для пар некоторых функций формы, а также верхняя грань возможного значения индекса и некоторые вспомогательные величины (Δ≤0,001)**

**Table 2 – Indices of fuzziness for Mamdani rule relation for some form function pairs, supremum of possible index value and some auxiliary parameters (Δ≤0,001)**

| F(t) | sg | sq | hrm | cp | cg | hyp | log | sqrt | lin | *if*(F(t)) | *if*($F(t^{1/2})$) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sg | 0,373 | 0,354 | 0,372 | 0,432 | 0,430 | 0,409 | 0,437 | 0,415 | 0,453 | 0,323 | 0,373 |
| sq | 0,354 | 0,333 | 0,348 | 0,407 | 0,408 | 0,376 | 0,401 | 0,379 | 0,417 | 0,333 | 0,333 |
| hrm | 0,372 | 0,348 | 0,363 | 0,427 | 0,422 | 0,390 | 0,414 | 0,389 | 0,432 | 0,363 | 0,363 |
| cp | 0,432 | 0,407 | 0,427 | 0,500 | 0,496 | 0,465 | 0,497 | 0,470 | 0,517 | 0,391 | 0,500 |
| cg | 0,430 | 0,408 | 0,422 | 0,496 | 0,490 | 0,454 | 0,486 | 0,457 | 0,506 | 0,406 | 0,490 |
| hyp | 0,409 | 0,376 | 0,390 | 0,465 | 0,454 | 0,391 | 0,420 | 0,385 | 0,442 | 0,471 | 0,391 |
| log | 0,437 | 0,401 | 0,414 | 0,497 | 0,486 | 0,420 | 0,453 | 0,414 | 0,476 | 0,495 | 0,453 |
| sqrt | 0,415 | 0,379 | 0,389 | 0,470 | 0,457 | 0,385 | 0,414 | 0,375 | 0,437 | 0,500 | 0,375 |
| lin | 0,453 | 0,417 | 0,432 | 0,517 | 0,506 | 0,442 | 0,476 | 0,437 | 0,500 | 0,500 | 0,500 |
| *if*($F,F^{-1}$) | 0,537 | 0,500 | 0,500 | 0,564 | 0,566 | 0,391 | 0,450 | 0,327 | 0,500 | - | - |
| sup(*if*) | 0,765 | 0,667 | 0,682 | 0,862 | 0,823 | 0,622 | 0,690 | 0,583 | 0,750 | 1,000 | 1,000 |
| $t_p$(F) | 0,64 | 0,500 | 0,500 | 0,707 | 0,644 | 0,333 | 0,414 | 0,250 | 0,500 | - | - |

**Вычислительный эксперимент 2.** Проверим формулу (27), взяв в качестве антецедента НЧ $\tilde{u}(x) = [m_u, ls_u, rs_u]_{L_u R_u}(x) = [5,2,3]_{hyp,log}$, а в качестве консеквента $\tilde{v}(x) = [3,2,5]_{sq,sqrt}$.

Рассчитываем приведенные спрэды чисел: $S_u^{*T} = (ls_u^* \quad rs_u^*) = (0,4 \quad 0,6)$; $S_v^{*T} = (ls_v^* \quad rs_v^*) = (0,286 \quad 0,714)$, составляем матрицу индексов нечеткости попарных отношений функций форм на квадрате $[0,1]\times[0,1]$, пользуясь таблицей 2:

$$\left\| if(\widetilde{\Re}(F_u^i, F_v^j) \right\| = \begin{pmatrix} if(\widetilde{\Re}(L_u, L_v)) & if(\widetilde{\Re}(L_u, R_v)) \\ if(\widetilde{\Re}(R_u, L_v)) & if(\widetilde{\Re}(R_u, R_v)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,376 & 0,385 \\ 0,401 & 0,414 \end{pmatrix}.$$

Имеем

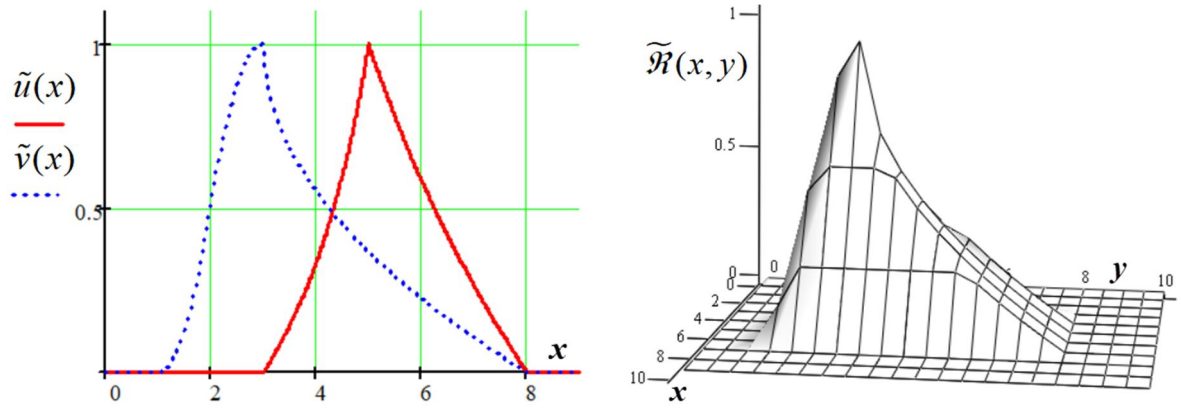
$$if(\tilde{u}) = (ls_u^* \quad rs_u^*) \begin{pmatrix} if(L_u) \\ if(R_u) \end{pmatrix} = (0,4 \quad 0,6) \begin{pmatrix} 0,471 \\ 0,495 \end{pmatrix} = 0,485;$$

$$if(\tilde{v}) = (ls_v^* \quad rs_v^*) \begin{pmatrix} if(L_v) \\ if(R_v) \end{pmatrix} = (0,286 \quad 0,714) \begin{pmatrix} 0,333 \\ 0,500 \end{pmatrix} = 0,452;$$

$$if(\widetilde{\Re}(\tilde{u}, \tilde{v})) = S_u^{*T} \left\| if(\widetilde{\Re}(F_u, F_v)) \right\| S_v^* = (0,4 \quad 0,6) \begin{pmatrix} 0,376 & 0,385 \\ 0,401 & 0,414 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,286 \\ 0,714 \end{pmatrix} = 0,399,$$

т.е. индекс нечеткости НО Мамдани оказался ниже $\min(if(\tilde{u}), if(\tilde{v}))$.

Непосредственный расчет в MathCad по формуле (5) также дает 0,399 (рисунок 4).




**а (a)** **б (b)**

**Рисунок 4 – а Нечеткие числа $\tilde{u}[5,2,3]_{L_uR_u}$ (функции формы: левая – гиперболическая, правая - логарифмическая; $if(\tilde{u})=0{,}485$ ) и $\tilde{v}[3,2,5]_{L_vR_v}$ (функции формы: левая – гладкая квадратическая, правая – квадратный корень; $if(\tilde{v})=0{,}452$ ); б Поверхность отношения Мамдани $\widetilde{\mathcal{R}}(x,y)=\tilde{u}(x)\wedge\tilde{v}(y)$, $if(\widetilde{\mathcal{R}})=0{,}399$**

**Figure 4 – a Fuzzy numbers $\tilde{u}[5,2,3]_{L_uR_u}$ (shape functions: left – hyperbolic, right – logarithmic; $if(\tilde{u})=0{,}485$ ) and $\tilde{v}[3,2,5]_{L_vR_v}$ (shape functions: left – smooth quadratic, right – square root; $if(\tilde{v})=0{,}452$ ); b Mamdani relation surface $\widetilde{\mathcal{R}}(x,y)=\tilde{u}(x)\wedge\tilde{v}(y)$, $if(\widetilde{\mathcal{R}})=0{,}399$**

**Вычислительный эксперимент 3.** Проверим формулу (32), взяв в качестве антецедента НЧ $\tilde{u}(x)=[m_u^l,m_u^r,ls_u,rs_u]_{L_uR_u}(x)=[7,10,4,6]_{cp,lin}$, а в качестве консеквента $\tilde{v}(y)=[3,4,2,5]_{hrm,cg}$.

Рассчитываем приведенные спрэды чисел: $S_u^{*T}=(ls_u^*\quad cs_u^*\quad rs_u^*)=(0{,}308\quad 0{,}231\quad 0{,}462)$; $S_v^{*T}=(ls_v^*\quad cs_v^*\quad rs_v^*)=(0{,}250\quad 0{,}125\quad 0{,}625)$, составляем матрицу индексов нечеткости попарных отношений функций форм на квадрате $[0,1]\times[0,1]$, пользуясь таблицей 2:

$$\left\|if(\widetilde{\mathcal{R}}(F_u^i,F_v^j))\right\|=\begin{pmatrix} if(\widetilde{\mathcal{R}}(L_u,L_v)) & if(L_u) & if(\widetilde{\mathcal{R}}(L_u,R_v)) \\ if(L_v) & 0 & if(R_v) \\ if(\widetilde{\mathcal{R}}(R_u,L_v)) & if(R_u) & if(\widetilde{\mathcal{R}}(R_u,R_v)) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0{,}427 & 0{,}391 & 0{,}496 \\ 0{,}363 & 0 & 0{,}406 \\ 0{,}432 & 0{,}5 & 0{,}506 \end{pmatrix}.$$

Имеем

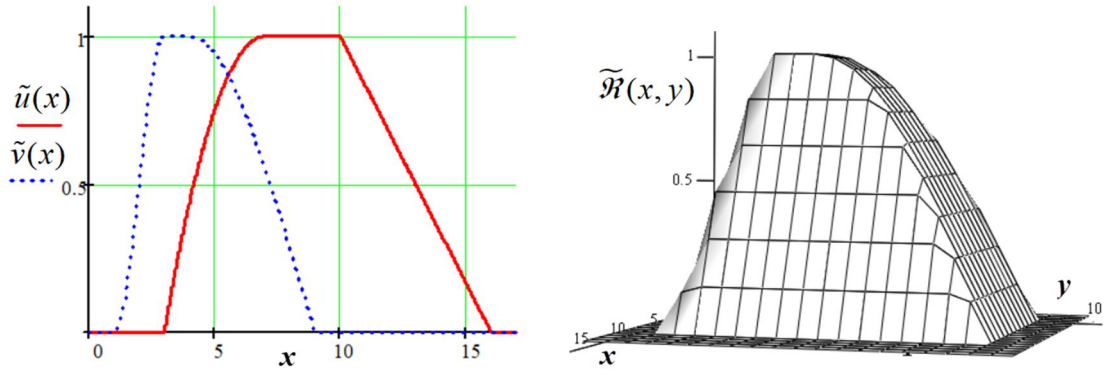
$$if(\tilde{u})=(ls_u^*\quad cs_u^*\quad rs_u^*)\begin{pmatrix} if(L_u) \\ 0 \\ if(R_u) \end{pmatrix}=(0{,}308\quad 0{,}231\quad 0{,}462)\begin{pmatrix} 0{,}391 \\ 0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}=0{,}351;$$

$$if(\tilde{v})=(if(L_v)\quad 0\quad if(R_v))\begin{pmatrix} ls_v^* \\ cs_v^* \\ rs_v^* \end{pmatrix}=(0{,}363\quad 0\quad 0{,}406)\begin{pmatrix} 0{,}250 \\ 0{,}125 \\ 0{,}625 \end{pmatrix}=0{,}345;$$

$$if(\widetilde{\mathcal{R}}(\tilde{u},\tilde{v}))=(0{,}308\quad 0{,}231\quad 0{,}462)\begin{pmatrix} 0{,}427 & 0{,}391 & 0{,}496 \\ 0{,}363 & 0 & 0{,}406 \\ 0{,}432 & 0{,}5 & 0{,}506 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0{,}250 \\ 0{,}125 \\ 0{,}625 \end{pmatrix}=0{,}447,$$

т.е. индекс нечеткости НО Мамдани оказался выше $\max(if(\tilde{u}),if(\tilde{v}))$.

Непосредственный расчет в MathCad по формуле (5) также дает 0,447 (рисунок 5).




**а (a)** **б (b)**

**Рисунок 5 – а Нечеткие числа $\tilde{u}[7,10,4,6]_{L_uR_u}$ (функции формы: левая – усеченная парабола, правая – линейная; $if(\tilde{u})=0,351$ ) и $\tilde{v}[3,4,2,5]_{L_vR_v}$ (функции формы: левая – гармоническая, правая – усеченная гауссиана; $if(\tilde{v})=0,345$). б Поверхность НО Мамдани $if(\tilde{\mathcal{R}})=0,447$**

**Figure 5 – a Fuzzy numbers $\tilde{u}[7,10,4,6]_{L_uR_u}$ (shape functions: left – clipped parabola, right – linear; $if(\tilde{u})=0,351$ ) and $\tilde{v}[3,4,2,5]_{L_vR_v}$ (shape functions: left – harmonic, right – clipped Gaussian; $if(\tilde{v})=0,345$); b Mamdani relation surface $\tilde{\mathcal{R}}(x,y)=\tilde{u}(x)\wedge\tilde{v}(y)$, $if(\tilde{\mathcal{R}})=0,447$**

## Заключение

1. Доказано, что индекс нечеткости отношения Мамдани в случае антецедента и консеквента одного вида, например «треугольное НЧ – треугольное НЧ», равен $if(F(\sqrt{t}))$, где $F(t)$ – функция формы НЧ.

2. Выведено условие инвариантности индекса нечеткости НЧ одного вида относительно операции построения НО Мамдани, а именно $if(F(t))=if(F(\sqrt{t}))$, которому удовлетворяют, в частности, линейная, гладкая квадратичная, гармоническая функции формы $F(t)$.

3. Установлено, что для пар различных унимодальных НЧ LR-типа с одинаковыми левыми и правыми функциями формы, например «треугольное число – усеченная парабола», индекс нечеткости НО Мамдани равен разности средних интегральных значений функции $F_u^{-1}(\alpha)F_v^{-1}(\alpha)$ на отрезках $0\le\alpha\le 1/2$ и $1/2\le\alpha\le 1$. Предложен альтернативный подход – использование интегральной функции для расчета индекса нечеткости НО Мамдани, который в ряде случаев допускает аналитическое решение.

4. Установлена верхняя грань индекса нечеткости НО Мамдани в случае фиксированного вида антецедента (консеквента).

5. Получены формулы для расчета индекса нечеткости отношения Мамдани, не требующие вычисления двойного интеграла. Расчет основан на матрице попарных отношений функций формы антецедента и консеквента на квадрате $[0,1]\times[0,1]$. Эти величины предварительно рассчитаны для различных комбинаций функций формы и могут быть добавлены в виде массива в программные средства для существенного сокращения времени расчетов.

Продолжением данного исследования станет изучение преобразований нечеткости при реализации нечеткого вывода Мамдани, процедуры агрегации, а также зависимости результата дефаззификации выходного НМ от нечеткости последнего.

## Библиографический список

1. **Бухенский К. В., Конюхов А. Н., Дюбуа А. Б., Сафошкин А. С.** Операции над нечеткими числами и мера нечеткости // III Международный научно-технический форум СТНО-2020. Сборник трудов / под ред. О.В. Миловзорова. Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2020. Т. 5. С. 12-19.

2. **Бухенский К. В., Конюхов А. Н., Дюбуа А. Б., Сафошкин А. С.** Быстрый алгоритм расчета индексов нечеткости для унимодальных нечетких чисел LR-типа // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2019. № 70. С. 65-75.

3. **Бухенский К. В., Конюхов А. Н., Дюбуа А. Б., Сафошкин А. С.** Преобразования нечеткости при линейных операциях над нечеткими числами LR-типа // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2020. № 71. С. 137-150.

4. **Бухенский К. В., Конюхов А. Н., Дюбуа А. Б., Сафошкин А. С.** Особенности преобразования нечеткости при операции умножения нечетких чисел LR-типа // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2020. № 73. С. 83-96.

5. **Бакулева М. А., Корячко В. П., Орешков В. И.** Интеллектуальные системы и нечеткая логика. Москва, КУРС, ИНФРА-М, 2017. 352 с.

6. **Конюхов А. Н., Дюбуа А. Б., Сафошкин А. С.** Основы теории нечетких множеств. Часть 2: учеб. пособие / А. Н. Конюхов, А. Б. Дюбуа, А. С. Сафошкин; Рязан. гос. радиотехн. ун-т. Рязань, 2018. 108 с.

7. **Анисимов К. В.** Оценка возможности управления стабилизацией наноспутника на основе нечеткой логики // Новые информационные технологии в научных исследованиях: материалы XXV Юбилейной Всероссийской научно-технической конференции студентов, молодых ученых и специалистов; Рязань: ИП Коняхин А.В. (Book Jet), 2020. С. 283.

8. **Pourjavad E., Mayorga R. V.** A comparative study and measuring performance of manufacturing systems with Mamdani fuzzy inference system. J Intell Manuf. 2019, vol. 30, pp. 1085-1097.

9. **Zadeh L. A.** Fuzzy sets. Information and control. 1965, vol. 8, pp. 338-353.

10. **Bede B.** Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. London: Springer, 2013. 276 p.

11. **De Luca A., Termini S.** A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory. Information and control. 1972, vol. 20. pp. 301-312.

12. **Yager R.** On the measure of fuzziness and negation. Part I: membership in the unit interval. International Journal of General Systems. 1979, vol. 5, pp. 221-229.

UDC 519.766.2

# ON FUZZINESS OF MAMDANI RULE AS A BINARY RELATION OVER FUZZY NUMBERS

**K. V. Bukhensky,** PhD in physics and mathematics, associate professor, Head of the Department of Higher Mathematics, RSREU, Ryazan, Russia; orcid.org/0000-0003-2602-2112, e-mail: bukhensky.k.v@rsreu.ru;
**A. N. Konyukhov,** PhD in pedagogics, associate professor, RSREU, Ryazan, Russia;
orcid.org/0000-0002-1523-7110, e-mail: chronos@bk.ru
**A. B. Dubois,** PhD in physics and mathematics, associate professor, RSREU, Ryazan, Russia;
orcid.org/0000-0002-5924-4128, e-mail: abd-69@mail.ru
**K. V. Anisimov,** third year student, Faculty of Computer Engineering, RSREU, Ryazan, Russia;
orcid.org/0000-0001-8889-0818, e-mail: k.anisimov29@yandex.ru

***The aim is to*** *investigate fuzziness of binary fuzzy relation* (*FR*) *expressing Mamdani rule* (*implication*) *in dependence on its constituent fuzzy sets* (*FSs*) *given as LR-type fuzzy numbers* (*FNs*)*. This work is the proceeding of the former investigation of fuzziness transformations on linear and nonlinear operations with FNs. As a measure of math fuzziness the Yager index of fuzziness with linear Hamming metric was used. Cases of FNs relations for same and different classes were investigated. Formulas for Mamdani rule FR index of fuzziness in general case of unimodal and polymodal (fuzzy interval) LR-type FNs were obtained.*

***Key words:*** *fuzzy relation, LR-type fuzzy number, membership function, shape function, index of fuzziness, antecedent, consequent, Mamdani rule.*

**DOI:** 10.21667/1995-4565-2021-75-85-98

**References**

1. **Bukhensky K. V., Konyukhov A. N., Dubois A. B., Safoshkin A. S.** Operacii nad nechetkimi chislami i mera nechetkosti. III Mezhdunarodnyj nauchno-tehnicheskij forum STNO-2020. *Sbornik trudov pod red. O.V. Milovzorova*. Rjazan': Rjazan. gos. radiotehn. un-t, 2020. vol. 5, pp. 12-19. (in Russian).

2. **Bukhensky K. V., Konyukhov A. N., Dubois A. B., Safoshkin A. S.** Bystryj algoritm rascheta indeksov nechetkosti dlja unimodal'nyh nechetkih chisel LR-tipa. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radiotehnicheskogo universiteta*. 2019, no. 70, pp. 68-75. (in Russian).

3. **Bukhensky K. V., Konyukhov A. N., Dubois A. B., Safoshkin A. S.** Preobrazovanija nechetkosti pri linejnyh operacijah nad nechetkimi chislami LR-tipa. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radiotehnicheskogo universiteta*. 2020, no. 71, pp. 137-150. (in Russian).

4. **Bukhensky K. V., Konyukhov A. N., Dubois A. B., Safoshkin A. S.** Osobennosti preobrazovaniya nechetkosti pri operacii umnozheniya nechetkih chisel LR-tipa. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radiotehnicheskogo universiteta*. 2020, no. 73, pp. 83-96. (in Russian).

5. **Bakuleva M. A., Koryachko V. P., Oreshkov V. I.** *Intellektual'nye sistemy i nechetkaya logika*. Moscow, KURS, INFRA-M, 2017. 352 p.

6. **Konyukhov A. N., Dubois A. B., Safoshkin A. S.** *Osnovy teorii nechetkih mnozhestv*. Chast' 2: ucheb. posobie (The basics of fuzzy sets. Part 2) / A. N. Konyukhov, A. B. Dubois, A. S. Safoshkin; Rjazan. gos. radiotehn. un-t. Rjazan', 2018, 108 p.

7. **Anisimov K. V.** Ocenka vozmozhnosti upravleniya stabilizaciej nanosputnika na osnove nechetkoj logiki.*Novye informacionnye tekhnologii v nauchnyh issledovaniyah: materialy XXV Yubilejnoj Vserossijskoj nauchno-tekhnicheskoj konferencii studentov, molodyh uchenyh i specialistov*. Ryazan: IP Konyahin A. V. (Book Jet), 2020, pp. 283-284. (in Russian).

8. **Pourjavad E., Mayorga, R. V.** A comparative study and measuring performance of manufacturing systems with Mamdani fuzzy inference system. *J Intell Manuf*. 2019, vol. 30, pp. 1085-1097.

9. **Zadeh L. A.** Fuzzy sets. *Information and control*. 1965, vol. 8, pp. 338-353.

10. **Bede B.** *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic.* London: Springer, 2013. 276 p.

11. **De Luca A., Termini S.** A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory. *Information and control*. 1972, vol. 20. pp. 301-312.

12. **Yager R.** On the measure of fuzziness and negation. Part I: membership in the unit interval. *International Journal of General Systems*. 1979, vol. 5, pp. 221-229.