УДК 004.925.86

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ РОСТА ФРАКТАЛОВ ИЗ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

К. А. Майков, д.т.н., профессор кафедры «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии» МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия;
orcid.org/0000-0003-1864-2397, e-mail: maikov@bmstu.ru
А. Н. Пылькин, д.т.н., профессор кафедры ВПМ РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0001-9925-2870, e-mail: pylkin.a.n@rsreu.ru
С. Н. Кузьменко, к.ф.м.н., доцент кафедры математики, физики и информатики ФГБОУ ВО «КГМТУ», Керчь, Россия;
orcid.org/0000-0002-1039-1274, e-mail: ksn1160@mail.ru
А. А. Теплов, аспирант кафедры «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии» МГТУ им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия;
orcid.org/0000-0002-1785-6089, e-mail: teploff.aa@gmail.com

Выполнено моделирование роста фракталов из материальной точки по однофазному и многофазному алгоритмам для линейных фракталов и полигональных фрактальных форм. Рассматривается связь процессов роста фракталов с явлениями формообразования в природе. Предложена методика анализа ростовых процессов, рассмотрены их основные характеристики. Выявлены законы роста метрических характеристик фракталов, их трансформация при смене алгоритма роста. Произведен анализ траектории роста точек фракталов и распределение углов наклона их элементов. Смоделировано влияние стохастических флуктуаций длины элементов фрактала на процесс его роста. Показано, что использованные алгоритмы и методика анализа процессов роста обладают большим потенциалом для модернизации и адаптации к широкому кругу задач.

Ключевые слова: *фрактальный рост, геометрические фракталы, стохастические фракталы, алгоритмы построения фракталов, анализ построения фракталов.*

DOI: 10.21667/1995-4565-2021-75-99-112

Введение

В идеальном случае фракталы обладают свойством самоподобия на всех пространственных масштабах. При масштабном увеличении фрактала такого вида его структура остается неизменной и данный процесс сложно расценивать, как полноценный фрактальный рост. В случае реальных природных фракталов, рассматриваемых и строимых в различных приложениях, диапазон масштабов базовой переменной ограничен минимальным и максимальным значениями. Они определяются условиями формирования фрактала или решаемыми задачами. Например, при моделировании геометрических фракталов в качестве исходного масштаба берется отрезок единичной длины, который и определяет максимальный масштаб такой задачи [1]. Самой существенной особенностью естественных фракталов и фрактальных процессов является их рост из материальной точки.

Не претендуя на полноту классификации, можно выделить три наиболее часто встречающихся, принципиально различных механизмов роста фракталов:

1) достраивание фрактала элементами фиксированных размеров. Например, построение древовидных фракталов, формирование энергетических и информационных сетей и т.д.;

2) дробление первоначального элемента определенного масштаба на все более мелкие детали и построение из них выбранного типа фрактала в соответствии с алгоритмом его формирования. Это один из основных методов генерирования фракталов в научной литературе;

3) рост фрактала из материальной точки примитивной формы с постоянным развитием его структуры и масштабным ростом всех элементов. Например, рост растений, отдельных

фракталоподобных элементов живых организмов (кровеносная система, легкие и др.), развитие турбулентности в жидкостях и газах.

До сих пор задача роста фракталов ставилась только при моделировании роста растений методом L-систем [7, 8, 9, 10]. Но в этих работах отсутствует анализ процесса роста и акцент делается на выразительности графической структуры.

Очевидно, что первый и второй механизмы роста значительно проще и не нуждаются в детальном исследовании. Третий механизм соответствует огромному числу реальных природных процессов, поэтому для их численного (компьютерного) моделирования должен быть изучен тщательным образом.

На начальном этапе моделирования процессов роста необходимо использовать хорошо известный методологический принцип: наиболее общие закономерности гораздо легче исследуются на простых моделях. Это связано с тем, что второстепенные, несущественные детали не осложняют процесс исследования. Именно поэтому в данной работе процессы роста фракталов из материальной точки изучаются на простых геометрических моделях с последовательным усложнением алгоритма роста. С использованием законов композиции фрактальных алгоритмов [4] моделируется рост сложных фрактальных форм, напоминающий процессы формообразования в природе. Изучаются закономерности процесса роста. Моделируется влияние стохастичности на процесс роста.

Теоретическое описание фракталов в процессах роста

Прежде всего, необходимо скорректировать основные фрактальные соотношения на языке, более удобном для процессов роста. Традиционно они записываются в универсальной форме: число измерений [2]

$$N = C_1 \varepsilon^{-D} \tag{1}$$

и длина фрактальной линии [3]

$$L = C_2 \varepsilon^{1-D} . \tag{2}$$

Они содержат неопределенные множители C_1, C_2, пространственный масштаб ε и размерность фрактала

$$D = -\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N}{\ln \varepsilon} . \tag{3}$$

Для рассмотренных в данной работе геометрических фракталов пространственный масштаб ε удобно определить в относительной форме как

$$\varepsilon = \frac{a}{l}, \tag{4}$$

где a – длина элементарного отрезка фрактала, l – размах фрактала, т.е. расстояние между его крайними точками по горизонтали. Именно величина l будет возрастать в процессе роста фрактала. Определение масштаба в относительном формате (4) позволит легко обобщить количественные соотношения для рассматриваемых фракталов, используя аналогичные выражения для фракталов, получаемых дроблением единичного отрезка [5]. Стандартный алгоритм построения фракталов, подобных «Снежинке Коха», состоит в делении элементарных отрезков на m частей и замене их на n отрезков. При росте фракталов алгоритм модифицируется: в процессе роста отрезка a появляется ломаная длиной na с размахом ma. Для использованных фракталов

$$n = 4, \quad m = 2 + 2\cos\beta , \tag{5}$$

где β – угол наклона отрезков в базовом геометрическом примитиве, используемом для роста (рисунок 1). После роста фрактала до глубины k получаем минимальный относительный масштаб

$$\varepsilon = \frac{a}{l} = \left(\frac{1}{m}\right)^k = \left(\frac{1}{2 + 2\cos\beta}\right)^k . \tag{6}$$

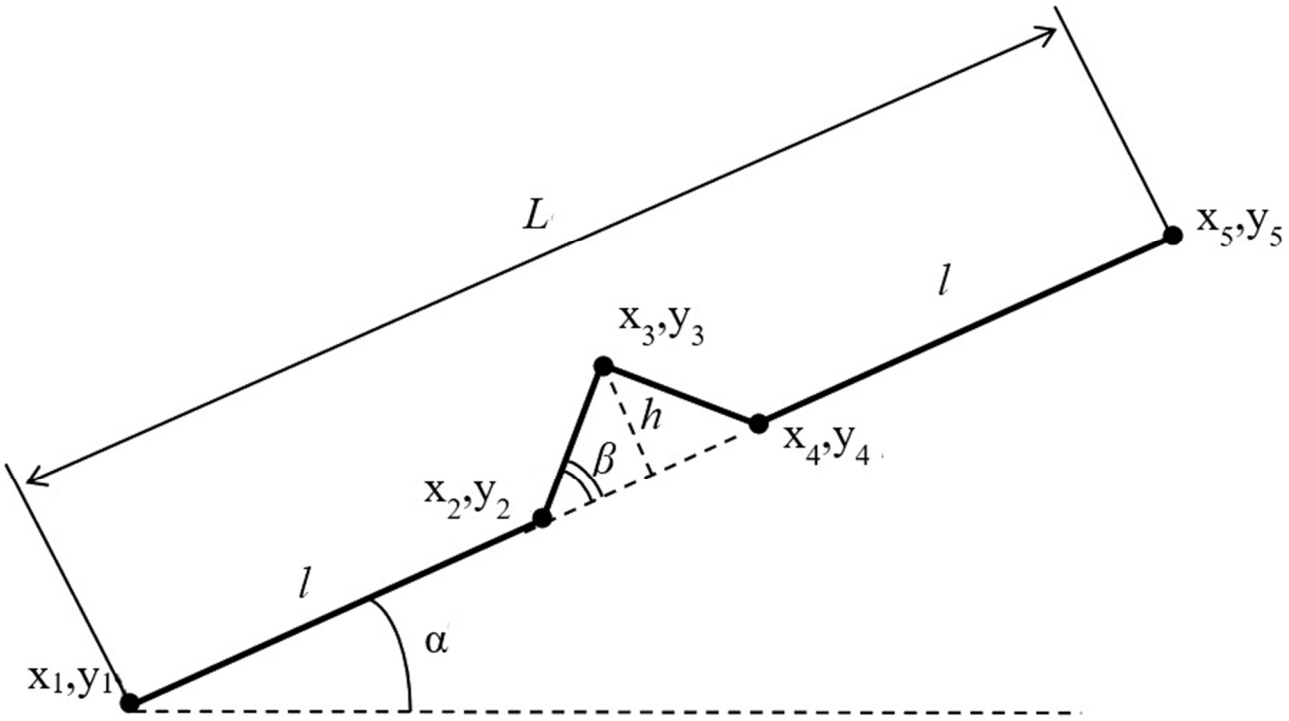

Рисунок 1 – Основной модельный геометрический примитив с изгибом, его координаты и параметры
Figure 1 – Main model geometric primitive with bend, its coordinates and parameters

Отсюда размах фрактала

$$l = am^k = a(2+2\cos\beta)^k . \quad (7)$$

Число таких элементов фрактала

$$N = n^k = 4^k , \quad (8)$$

а соответствующая длина фрактальной линии

$$L = Na = an^k = 4^k a . \quad (9)$$

Размерность фрактала выражается как

$$D = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln N}{\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} = \frac{\ln n}{\ln m} = \frac{\ln 4}{\ln(2+2\cos\beta)} . \quad (10)$$

Отсюда следует, что размерность связывает параметры m и n

$$n = m^D . \quad (11)$$

Для процессов роста ключевыми являются соотношения (7), (9), из которых следуют основные закономерности роста фракталов.

1. Размах фрактала l определяется числом m и зависит от него показательным образом m^k с показателем степени k, равным глубине фрактала. Существенное влияние на размах оказывает также угловой параметр β, который определяет плотность группировки элементов фрактала.

2. Длина фрактальной линии L определяется только числом n и зависит от него показательным образом n^k с показателем степени k, равным глубине фрактала.

3. Отношение длины фрактальной линии и ее размаха

$$\frac{L}{l} = \left(\frac{n}{m}\right)^k = m^{(D-1)k} = n^{\left(\frac{D-1}{D}\right)k} = \left(\frac{2}{1+\cos\beta}\right)^k \quad (12)$$

характеризует развитость, сложность фрактальной линии, плотность заполнения ею поверхности.

Критерий оптимального роста и алгоритмы роста

Если процесс роста предполагает конечную цель, то критерием оптимального роста является обеспечение максимально точного приближения к цели, т.е. выращивание фрактала заранее предполагаемой формы. В данной работе выполнялся рост из материальной точки фракталов, подобных «Снежинке Коха», с модификацией углов наклона основных элементов этого геометрического фрактала. При этом алгоритмы роста и их число могут быть различными. Разработаны два алгоритма роста, изложение которых приводится ниже.

Однофазный алгоритм роста. Основным пространственным масштабом принят размер элементарного отрезка a фрактала в его завершенном виде. Рост начинается из материальной точки. Когда отрезок дорастает до размера a, в его середине возникает росток в виде ломаной линии из двух симметричных элементов с размерами ra и углом наклона к своей ветви β (рисунок 1). Коэффициент r и угол β являются параметрами модели и варьировались в процессе моделирования. Скорости роста всех четырех элементов этого примитива подбираются так, что одновременно достигают размера a. Далее на каждом отрезке длиною a процессы роста полностью повторяются. Это обеспечивает характерную особенность этого алгоритма: одновременное образование новых примитивов и их синхронный рост – все примитивы находятся в одной фазе роста. Именно поэтому алгоритм называется однофазным. Схема алгоритма однофазного процесса роста фрактала приведена на рисунке 2. Из представленной схемы отчетливо видно, что результатом работы алгоритма является матрица, в которой строки соответствуют текущей фазе роста самого фрактала, а столбцы – конкретному отрезку, из которого состоит фрактальная структура. Таким образом, имеется полное представление о каждом фрагменте фрактала в конкретном моменте времени.

Достоинство данного алгоритма в его простоте. «Жесткая» симметрия основного геометрического примитива обеспечивает высокую точность роста: после каждого этапа достижения растущими элементами размера a получается классический вариант фрактала типа «Снежинки Коха», т.е. достигается цель процесса роста. Пример моделирования роста фрактала в соответствии с этим алгоритмом показан на рисунке 3. Видно, что примитивы новых элементов фрактала зарождаются одновременно и растут синхронно. Рост получается пропорциональным по всем направлениям, однако «жесткость» алгоритма является проблемой достоверности или реалистичности модели – синхронный рост всех элементов фрактала плохо соответствует процессам роста реальных фракталоподобных структур.

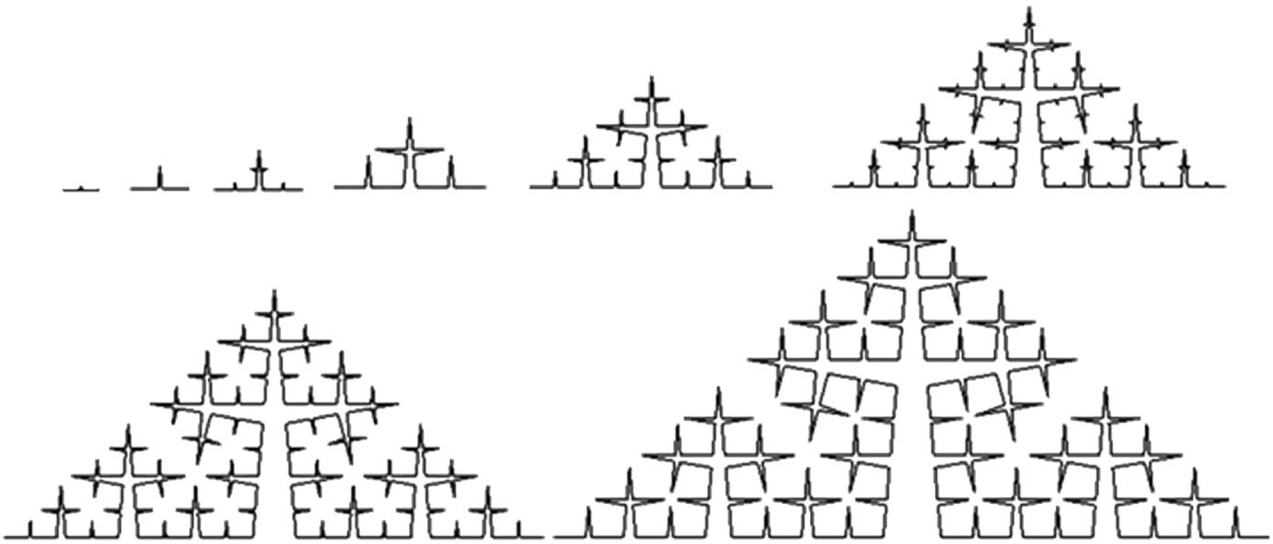

Рисунок 2 – Моделирование процесса роста фрактала в соответствии с однофазным алгоритмом (этапы роста расположены слева направо и сверху вниз)
Figure 2 – Modeling fractal growth process in accordance with single-phase algorithm (growth stages are located from left to right and from top to bottom)

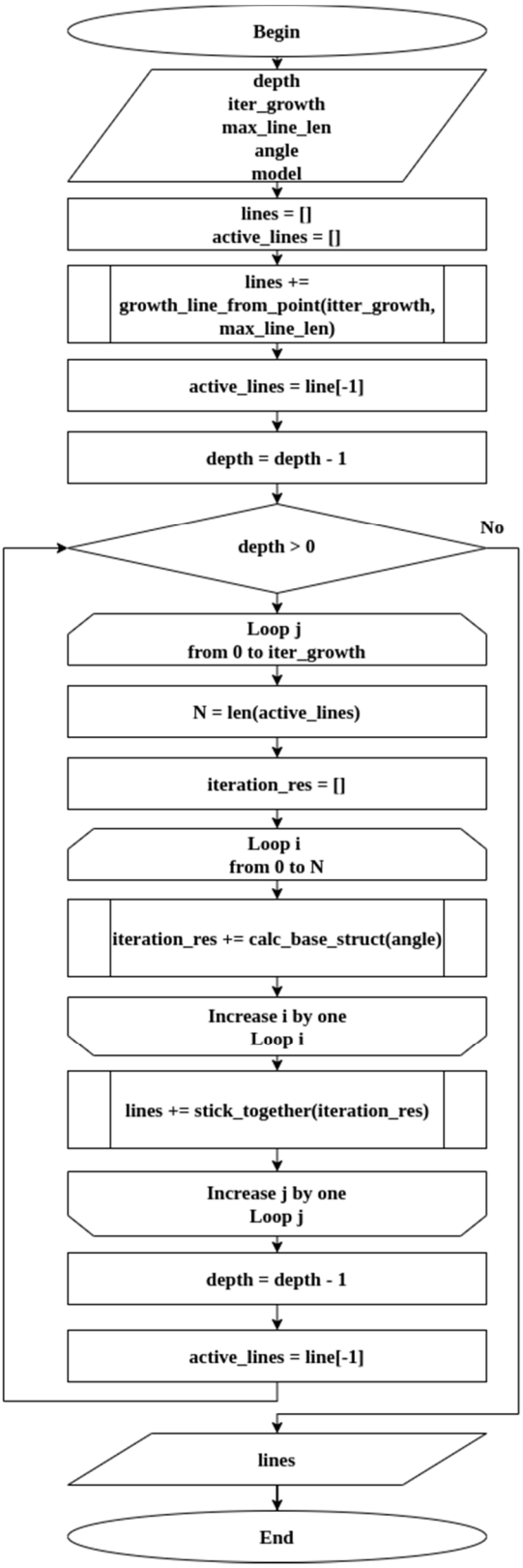

Рисунок 3 – Схема алгоритма однофазного процесса роста фрактала
Figure 3 – Algorithm scheme for single-phase fractal growth process

Многофазный алгоритм роста. Обобщение предыдущего алгоритма выполнялось путем избавления от «жесткой синхронизации» в росте элементов фрактала: рост каждого его элементарного отрезка выполнялся независимо с определенным шагом Δa в каждом цикле. Поскольку первоначальные длины отрезков имеют различное значение, то фазы их роста тоже различаются. Поэтому данный алгоритм роста назван многофазным. В одной из версий

алгоритма рост всех элементов фрактала прекращался одновременно. Это приводило к тому, что оставались ростки, не достигшие размера *a*, т.е. процесс роста был незавершенным, цель роста не достигалась. Устранение этого недостатка достигалось путем независимого роста каждого элемента до предельного значения *a*. Пример моделирования роста многофазным алгоритмом представлен на рисунке 4.

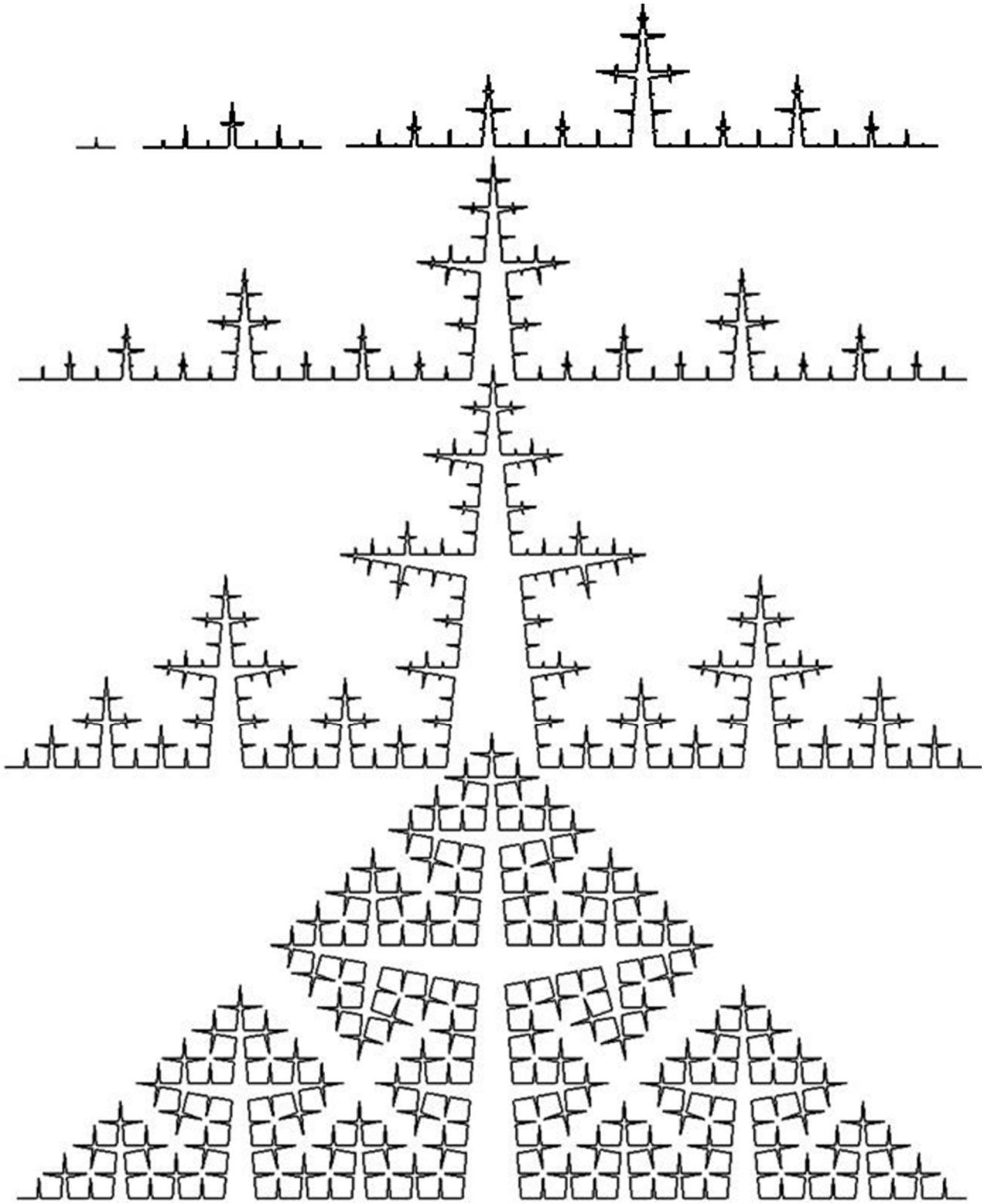

Рисунок 4 – Моделирование процесса роста фрактала в соответствии с многофазным алгоритмом (этапы роста расположены слева направо и сверху вниз)
Figure 4 – Modeling fractal growth process in accordance with multiphase algorithm (growth stages are located from left to right and from top to bottom)

Особый интерес вызывает непропорциональный, преимущественно продольный рост фрактала на первых этапах. Число ростков увеличивается заметно быстрее, чем в однофазном методе, они находятся в разных фазах роста. Это указывает на то, что в процессе роста модель не является фракталом в строгом смысле слова. На конечных этапах роста все элементы достигают размера a, модель принимает законченную форму фрактала определенного порядка. При этом наблюдались симметрия и синхронность роста левой и правой ветвей фрактала.

Алгоритм может быть модернизирован путем введения зависимости шага Δa от глубины фрактала и фазы роста. Это повысит его адаптивность для моделирования процессов роста реальных фракталоподобных объектов и способность генерировать более разнообразные фракталы.

Существенно, что при обоих алгоритмах – однофазном и многофазном – результат дает один и тот же фрактал. Это указывает на то, что фрактализация процесса роста создает «эффект распределенной памяти» общей формы растущего объекта по деталям его структуры. Иначе говоря, соединение процесса масштабного роста с фрактальной декомпозицией структуры позволяет выращивать объекты с закономерной внутренней структурой и сложной глобальной формой.

Рост фракталов и формообразование

Одним из наиболее ярких проявлений фракталов считается их фундаментальная роль в процессах формообразования в живой и неживой природе [6]. Важнейшим этапом этих процессов является рост из материальной точки. Именно этим этапом определяется конечный результат формирования растущего объекта или процесса. Геометрические и стохастические аспекты таких процессов формообразования можно изучать и на используемых в данной работе моделях.

В качестве иллюстрации выбрана модель роста полигонов с фрактальной границей из материальной точки. Результат моделирования представлен на рисунке 5. Из материальной точки в центре полигональная форма последовательно прорастает синхронно с ростом и развитием деталей фрактальной границы. Этот рисунок убедительно демонстрирует одну из фундаментальных закономерностей роста: размах l фрактальной границы, радиус полигона R (расстояние от центра до вершины) и его площадь строго согласованы. Если полигон имеет z вершин, то его радиус и сторона связаны соотношением

$$R = \frac{l}{\sin\left(\frac{360^0}{z}\right)}. \tag{13}$$

С учетом соотношения (7) получаем закон роста радиуса полигона от всех параметров модели

$$R = \frac{am^k}{\sin\left(\frac{360^0}{z}\right)} = \frac{a(2+2\cos\beta)^k}{\sin\left(\frac{360^0}{z}\right)}. \tag{14}$$

Развитие фрактальной границы возможно во внешнюю (слева на рисунке 5) и во внутреннюю (справа на рисунке 5) области полигона. Это дает существенно различные фрактальные формы: при равной длине границы они существенно отличаются внутренней площадью. Разница их площадей равна удвоенной площади, заключенной между фрактальными линиями и сторонами полигона.

Приведенные примеры моделирования позволяют сделать следующие выводы:

– многие процессы роста в природе не являются тривиальным увеличением размеров, а представляют собой сложный масштабно-фрактальный процесс;

– масштабный рост обеспечивает увеличение размеров, объема, массы;

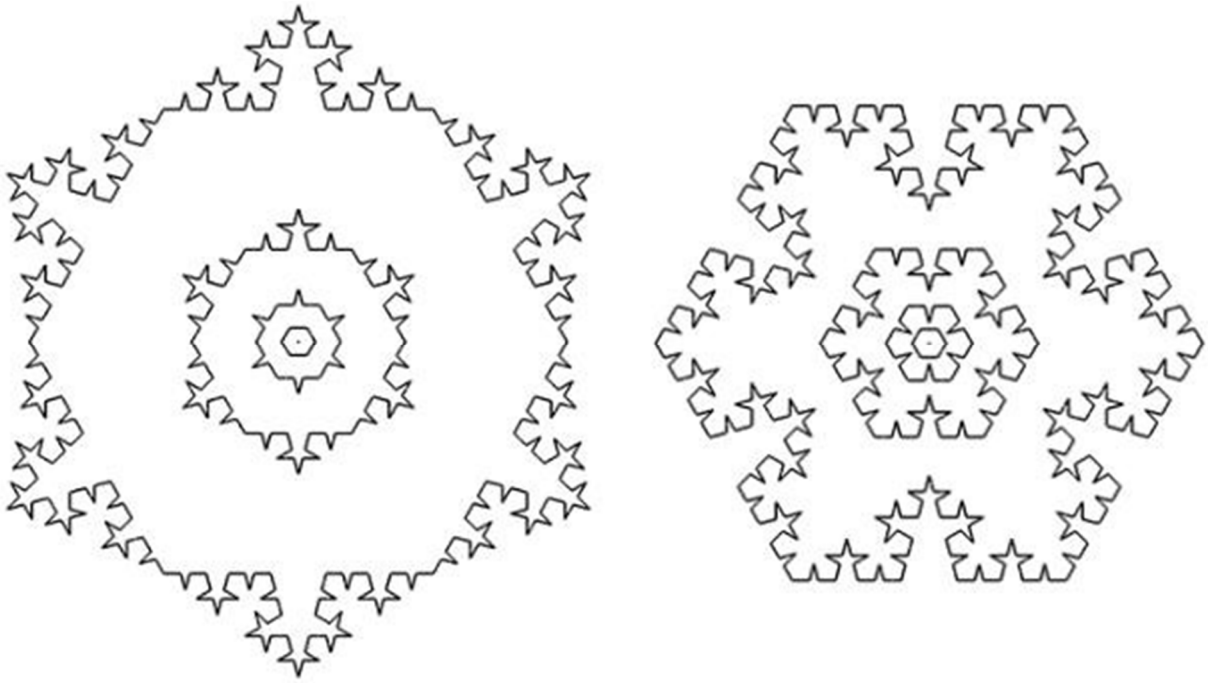

Рисунок 5 – Последовательные этапы роста полигональной (шестиугольник) фрактальной формы из материальной точки, расположенной в центре. Левая форма соответствует росту фрактала наружу, правая – внутрь полигона
Figure 5 – Successive growth stages of polygonal (hexagon) fractal shape from a material point located in center. Left shape corresponds to fractal growth outside, right – inside of the polygon

– фрактализация процесса роста обеспечивает внутреннюю структуру и глобальную форму растущего объекта. На это указывает существенная роль фрактальных процессов роста в живой природе, начиная от простейших форм до высших организмов. В частности, в ботанике дается такое определение роста: «Рост – это необратимое увеличение объема, массы растений, сопровождаемое новообразованием элементов структуры организма» [2];

– использование более сложных комбинационных законов фрактальных алгоритмов, обсуждавшихся в работе [4], позволит моделировать самые произвольные фрактальные формы с вариацией и по глубине фрактальной границы и по ее периметру.

Анализ процесса роста

Как всякое сложное явление процесс роста нуждается в методологии исследования, эффективных и универсальных характеристиках. Например, обмеры и взвешивание биологических объектов, сопоставление этих данных с физиологическими и клеточными процессами - устоявшиеся методы исследования процессов роста в биологии. На основе выполненных в данной работе моделирований роста геометрических фракталов можно предложить методы анализа этих процессов.

Прежде всего, необходимо проанализировать метрические характеристики растущих фракталов. Размах и длина фрактальной линии, описываемые соотношениями (7), (9), для моделируемых фракталов представлены на рисунке 6 в зависимости от числа циклов роста. Очень показательна разница в динамике роста этих параметров для однофазной и многофазной моделей роста, отмеченная еще при анализе рисунков 2, 4. Полученные закономерности характеризуют два классичеких закона роста: показательный (экспоненциальный) и логистический. Длина и размах фрактала, растущего по однофазному алгоритму, описываются ломаной линией (рисунок 6, линия а). Ее вершины (рисунок 6, f_1, f_2) хорошо аппроксимируются показательными теоретическими зависимостями (7), (9). Линейные участки между вершинами соответствуют масштабному росту фрактальных отрезков постоянного числа, а в узловых точках рождаются новые отрезки и наклон линейных участков

увеличивается. Для многофазного алгоритма данные аппроксимируются логистической кривой, которая в общем случае имеет вид

$$N(t) = \frac{N_m N_0}{N_0 + \left(N_m - N_0\right) e^{-\varepsilon t}}. \tag{15}$$

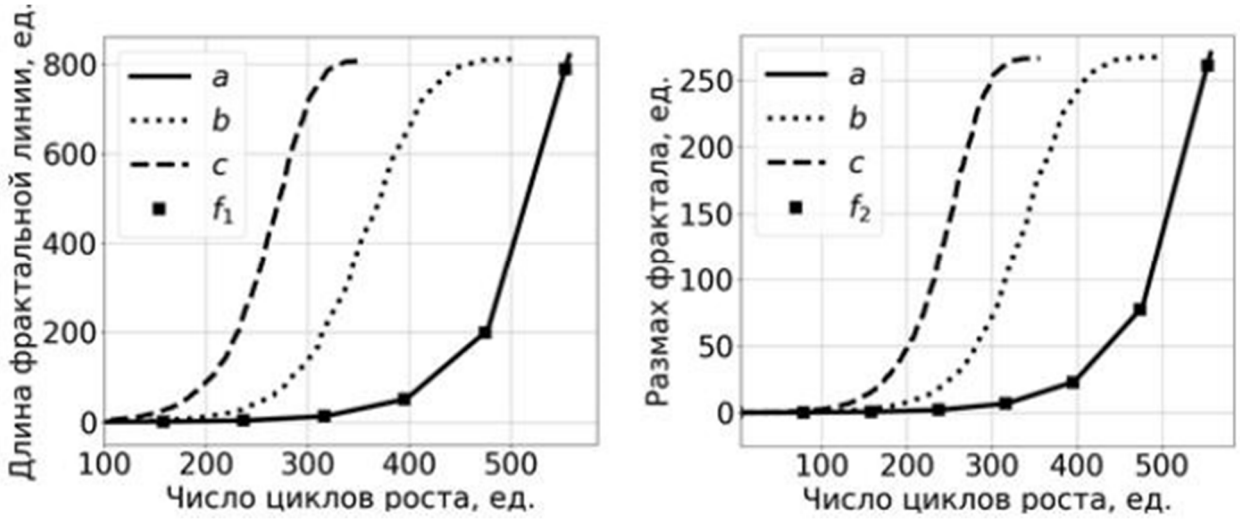

Рисунок 6 – Длина и размах фрактальной линии для однофазной (a) и многофазной (b, c) моделей роста. Квадратные маркеры в узловых точках ломаной линии f_1, f_2 соответствуют теоретическим зависимостям длины и размаха для фракталов такого типа (7, 9)
Figure 6 – Length and span of fractal line for single-phase (a) and multi-phase (b, c) growth models. Square markers at the nodes of polyline f1 and f2 correspond to theoretical dependencies of length and span for fractals of this type (7, 9)

Её параметры для данной задачи заменяются на следующие. Роль времени t играет число циклов построения фрактала. Начальное число отрезков $N_0 = 1$. Оптимальное число элементов фрактала $N_m = 4^k$ согласно соотношению (8). Относительная скорость роста ε определяется как параметр аппроксимации для каждой кривой. Таким образом, для нашего случая логистический закон принимает вид (в скобках второго слагаемого пренебрегаем единицей, т.к. $4^k >> 1$)

$$N(t) = \frac{4^k}{1 + 4^k e^{-\varepsilon t}}. \tag{16}$$

Для длины и размаха соответствующие законы роста согласно (9), (12) принимают вид

$$L(t) = \frac{4^k a}{1 + 4^k e^{-\varepsilon t}}, \tag{17}$$

$$l(t) = \frac{\left(2 + 2\cos\beta\right)^k a}{1 + 4^k e^{-\varepsilon t}}. \tag{18}$$

Этими функциями хорошо аппроксимируются соответствующие кривые на рисунке 6.

Таким образом, смена алгоритма роста с однофазного на многофазный с ограничением глубины роста приводит к существенной трансформации закона роста метрических характеристик фрактала. Логистический закон является одной из самых универсальных характеристик ростовых процессов самой разной природы.

Важную информацию о процессе роста дают траектории роста характерных точек фрактала, например его узловых точек. На рисунке 7 представлены несколько промежуточных форм при росте полигональной фрактальной формы (слева) и соответствующие траектории их характерных точек (справа). По мере увеличения скорости роста траектория из сплошной линии превращается в точечную. Расстояние между точками пропорционально скорости роста. В зависимости от сложности фрактальных границ траектории для различных точек мо-

гут пересекаться или накладываться. При необходимости по таким данным можно построить векторные поля перемещений и скоростей роста.

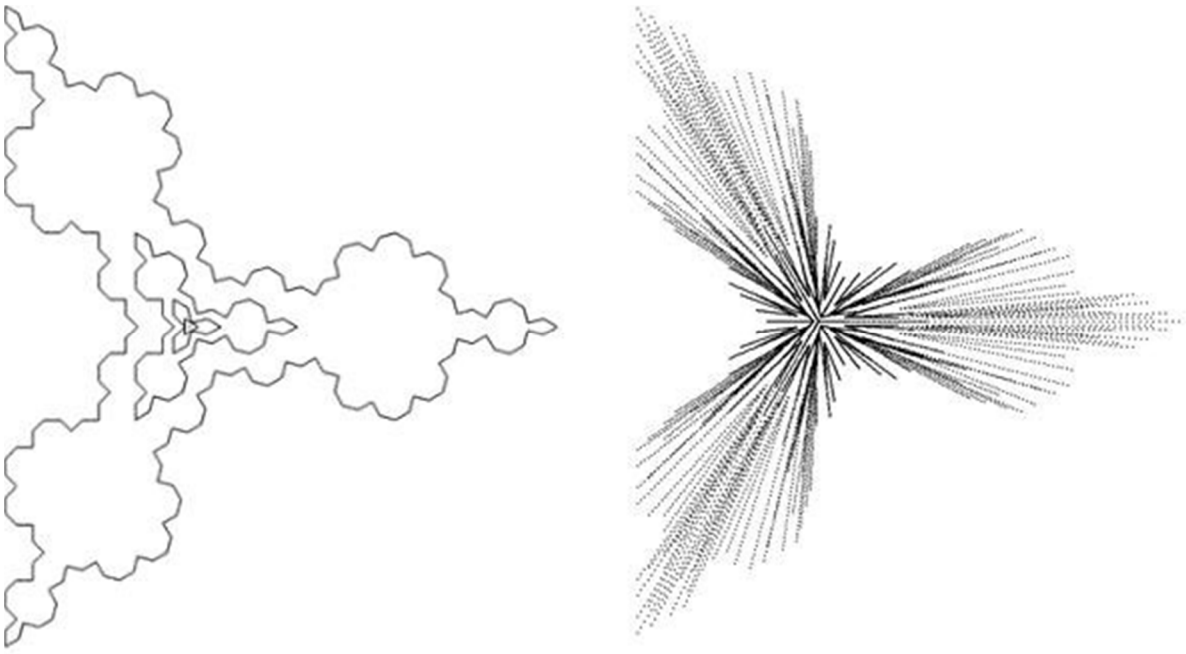

Рисунок 7 – Последовательные этапы роста полигональной (треугольник) фрактальной формы из материальной точки, расположенной в центре, и траектории роста узловых точек фрактала. Плотность точек на траекториях отражает скорость роста
Figure 7 – Successive stages of growth of polygonal (triangle) fractal shape from a material point located in center, and growth trajectory of fractal nodal points. Density of points on the trajectories reflects growth rate

Существенной структурной, топологической характеристикой растущего фрактала являются набор и динамика появления различных углов ориентации отрезков фрактала. Теоретически набор углов для фракталов использованного типа может принимать значения

$$\varphi_k = \pm k\,\beta, \quad k = 0,1,2,3,\ldots, \tag{19}$$

где разные знаки соответствуют разным симметричным ветвям фрактала. Таким образом, для идеального фрактала число различных углов возрастает пропорционально глубине фрактала k с шагом, равным базовому углу фрактала, все углы φ_k кратны базовому. Наглядно угловая структура фрактала представляется диаграммой (рисунок 8) в полярных координатах

$$\rho_k = 1 + 0,2k \quad \varphi_k = \pm k\,\beta, \qquad k = 0,1,2,3,\ldots \tag{20}$$

Коэффициент 0,2 в радиальной переменной выбран для растяжки диаграммы в этом направлении, чтобы предотвратить накладывание повторяющихся углов и, тем самым отображать информацию обо всех отрезках фрактала.

Высказанные общие соображения и вид угловых диаграмм позволяют сделать следующие заключения об угловой структуре фракталов в процессе их роста:

– чем меньше значение базового угла, тем плотнее набор углов во фрактале, но уменьшается скорость заполнения углового пространства (рисунок 8, слева);

– если базовый угол β кратен полному углу 360°, то набор углов получается конечным (рисунок 8, в центре). И чем соразмернее углы β и 360°, тем набор углов во фрактале меньше;

– при несоразмерности углов β и 360° набор углов во фрактале ограничен только его глубиной (рисунок 8, справа);

– при сложных композициях фрактальных алгоритмов [4] угловая структура фрактала может быть сделана сколь угодно разнообразной.

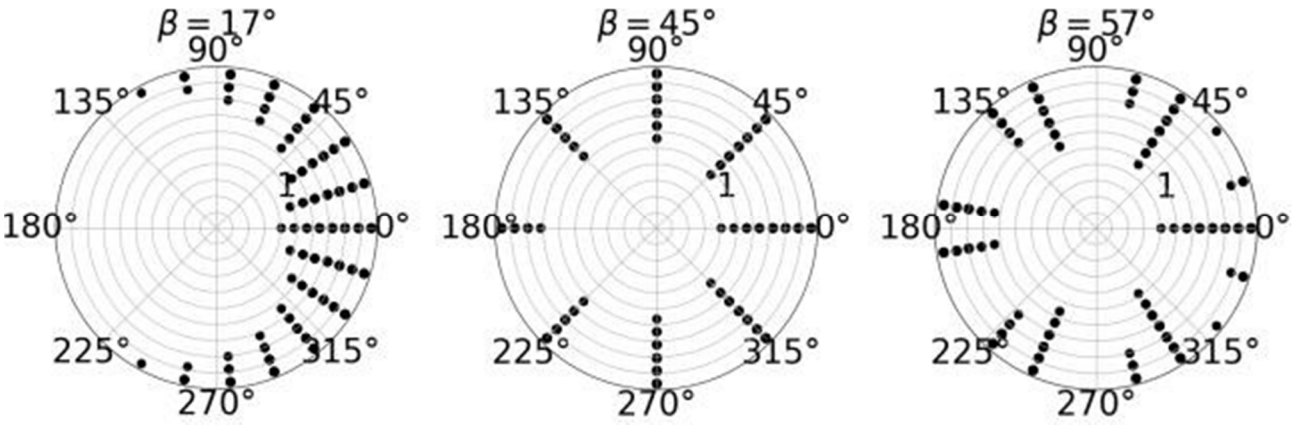

Рисунок 8 – Полярные диаграммы распределения углов наклона отрезков растущего фрактала для трех моделей с разными углами β
Figure 8 – Polar diagrams to distribute segments slope angles of growing fractal for three models with different angles β

Влияние стохастичности на процессы роста

Реальные процессы роста всегда подвержены большому числу стохастических возмущений. К тому же рост является процессом накопительным, интегральным – всякое возмущение на его ранних этапах приводит к последствиям на следующих этапах. Поэтому в ростовых процессах стохастическое воздействие может проявляться значительно существеннее, чем в стационарных состояниях. В данной работе влияние стохастичности на процесс роста фракталов моделировалось путем случайных вариаций длины фрактальных отрезков с амплитудой Δa_s. Три фрагмента такого моделирования для многофазного алгоритма роста представлены на рисунке 9. При анимационном просмотре процесса роста наблюдаются значительные стохастические колебания всей структуры фрактала. Их интенсивность наиболее высока на участках наибольшей скорости роста фрактала, который хорошо описывается логистическими законами (17, 18). Результаты роста радикально отличаются от представленных на рисунке 4. Прежде всего, видны существенная асимметрия всех элементов фрактала, искажение структуры значительной части деталей. Хорошо проявляется, отмеченный выше накопительный эффект. С ростом амплитуды стохастических колебаний Δa_s в структуре растущего фрактала возникают сначала обратимые самопересечения, т.е. исчезающие при дальнейшем росте. В конце концов, возникают также и необратимые самопересечения, которые можно считать недопустимыми дефектами роста.

Стохастический, независимый характер изменения длины элементов фрактала предполагает возможность частичной компенсации искажений. Более реалистичной была бы модель зависимости стохастических изменений на поздних этапах роста от дефектов структуры, накопленных на ранних этапах. Это существенно усилило бы общий накопительный эффект. Использованная модель обладает потенциалом для такого обобщения.

Заключение

Предложенная методика анализа роста фрактальных структур позволяет:

1) анализировать законы роста фрактальных структур;

2) управлять процессами роста путем вариации фазовых и метрических закономерностей роста отдельных элементов фрактала;

3) анализировать траектории векторных полей скоростей роста точек фрактала;

4) формировать сложные фрактальные формы, например полигональные и других;

5) анализировать и управлять законами распределения угловых характеристик элементов фрактала;

6) изучать влияние стохастических искажений элементов фрактала на его структуру и характеристики.

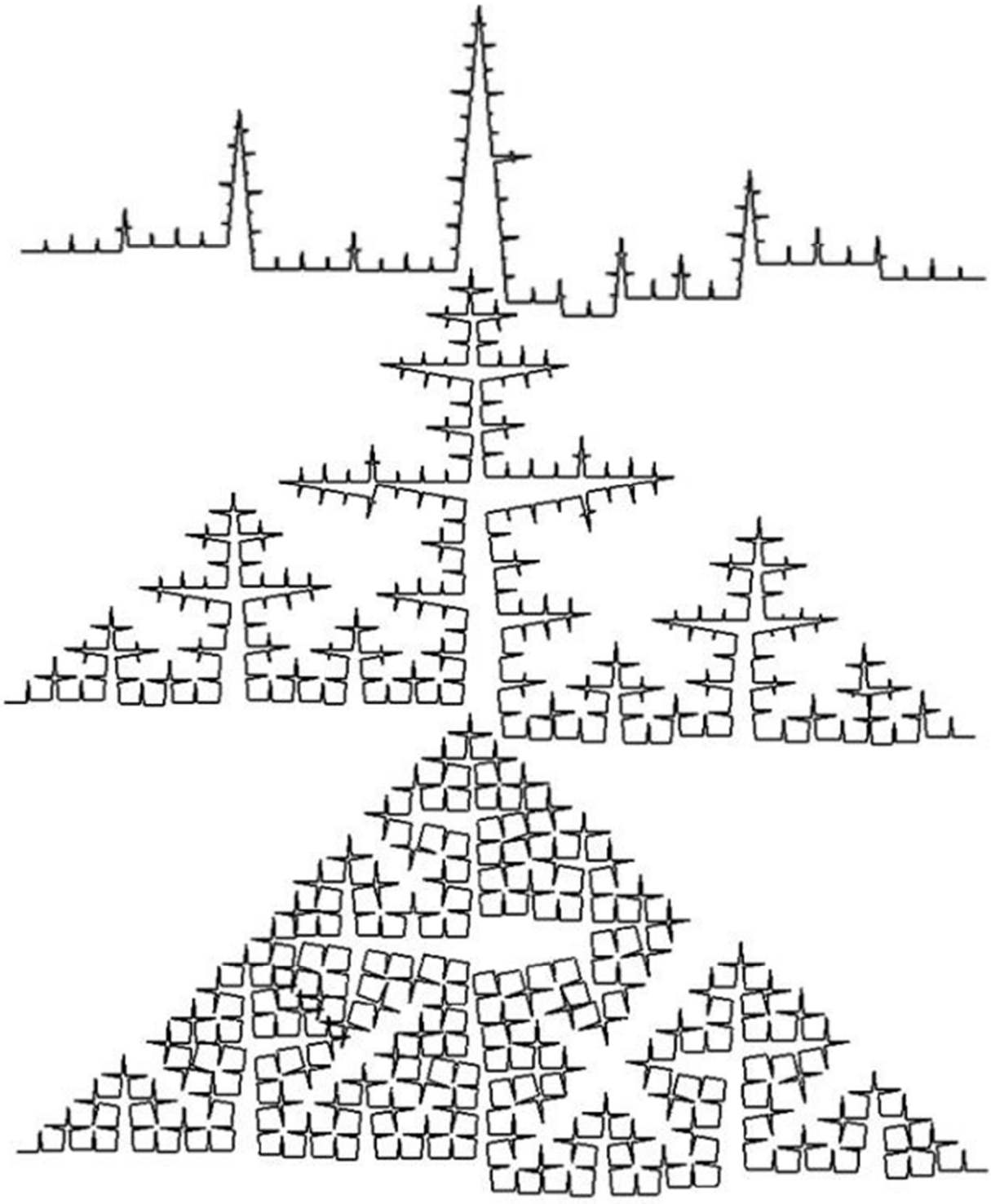

Рисунок 9 – Моделирование влияния стохастических факторов на процесс роста фрактала
Figure 9 – Modeling the influence of stochastic factors on fractal growth process

Реализация алгоритмов формирования однофазного и многофазного процессов роста фрактальной структуры подтвердила эффективность предложенных подходов к моделированию фракталов со сложной структурой с нужным масштабным представлением.

Библиографический список

1. **Балханов В. К.** Основы фрактальной геометрии и фрактального исчисления: под ред. Ю. Б. Башкуев. Улан-Удэ: Изд-во Бурятского госуниверситета, 2013. 224 с.

2. **Мандельброт Б.** Фрактальная геометрия природы. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.

3. **Морозов А. Д.** Введение в теорию фракталов. – М.-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 160 с.

4. **Майков К. А., Пылькин А. Н., Кузьменко С. Н., Теплов А. А.** Алгебраические особенности композиции алгоритмов вычисления фрактальных структур // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2020. № 71. С. 117-127.

5. **Федер Е.** Фракталы: пер. с анг. М.: Мир, 1991. 254 с.

6. **Шредер М.** Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2001. 528 с.

7. **Zamir M.** Arterial Branching within the Confines of Fractal L-System Formalism. Journal of General Physiology, 2001. № 118 (3) 267. 276 p.

8. **Weber J., PENN J.** Creation and rendering of realistic trees // Proceedings of SIGGRAPH ’95, 1995, pp. 119-128 p.

9. **Cieslak M., Ferraro P., Hanan J.** Modeling Plant Development with L-Systems. Mathematical Modelling in Plant Biology, 2019, 139-169 p.

10. P**rusinkiewicz P., Hanan J., Mech R.** An L-System-Based Plant Modeling Language. International Workshop on Applications of Graph Transformations with Industrial Relevance, 1999, pp. 395-410.

UDC 004.925.86

MODELING AND ANALYSIS OF FRACTAL GROWTH PATTERNS FROM MATERIAL POINT

K. A. Maikov, Dr. in technical sciences, full professor, Informatics and control systems Department, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia;
orcid.org/0000-0003-1864-2397, e-mail: maikov@bmstu.ru
A. N. Pylkin, Dr. in technical sciences, full professor, RSREU, Ryazan, Russia;
orcid.org/0000-0001-9925-2870, e-mail: pylkin.a.n@rsreu.ru
S. N. Kuzmenko, PhD in physics and mathematics, associate professor, Department of mathematics, physics and Informatics, Kerch state marine technological University, Kerch, Russia;
orcid.org/0000-0002-1039-1274, e-mail: ksn1160@mail.ru
A. A. Teplov, post-graduate student, Informatics and control systems Department, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia;
orcid.org/0000-0002-1785-6089, e-mail: teploff.aa@gmail.com

The growth of fractals from a material point is modeled using single-phase and multi-phase algorithms for linear fractals and polygonal fractal forms. The connection of fractal growth processes with the phenomena of formation in nature is considered. A method for analyzing growth processes and their characteristics is proposed. Growth laws of fractals metric characteristics and their transformation when changing growth algorithm are revealed. A growth path of fractal points and the distribution of slope angles of their elements are analyzed. The influence of stochastic fluctuations in the length of fractal elements on the process of its growth is modeled. It is shown that the algorithms and methods used for analyzing growth processes have great potential for modernization and adaptation to a wide range of tasks.

Key words: *fractal growth, geometric fractals, stochastic fractals, algorithms for constructing fractals, analysis of building fractals.*

DOI: 10.21667/1995-4565-2021-75-86-99-112

References

1. **Balhanov V. K.** *Osnovy fraktal'noj geometrii i fraktal'nogo ischislenija ot. red. Bashkuev Ju. B.* Ulan-Udje: Izd-vo Burjatskogo gosuniversiteta. 2013. 224 p. (in Russian).

2. **Mandel'brot B.** *Fraktal'naja geometrija prirody*. Moskva: Institut komp'juternyh issledovanij. 2002, 656 p. (in Russian).

3. **Morozov A. D.** *Vvedenie v teoriju fraktalov.* Moskva-Izhevsk: Institut komp'juternyh issledovanij. 2002, 160 p. (in Russian).

4. **Teplov A. A., Maikov K. A., Kuzmenko S. N., Teplov A. A.** Algebraic features of fractal structure calculation algorithms. *Vestnik Ryazanskogo Gosudarstvennogo Radioteshnicheskogo Universiteta*. 2020, no 71. pp. 117-127.

5. **Feder E.** *Fraktaly: Per. s ang*. M.: Mir, 1991. 254 p. (in Russian).

6. **Shreder M.** *Fraktaly, haos, stepennye zakony. Miniatjury iz beskonechnogo raja*. Izhevsk: NIC «Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika». 2001. 528 p. (in Russian).

7. **Zamir M.** Arterial Branching within the Confines of Fractal L-System Formalism. *Journal of General Physiology*, 2001. № 118 (3), 276 p.

8. **Weber J., Penn J.** Creation and rendering of realistic trees. *Proceedings of SIGGRAPH '95*. 1995, pp. 119-128 p.

9. **Cieslak M., Ferraro P., Hanan J.** Modeling Plant Development with L-Systems. *Mathematical Modelling in Plant Biology*. 2019, pp. 139-169.

10. **Prusinkiewicz P., Hanan J., Mech R.** An L-System-Based Plant Modeling Language. *International Workshop on Applications of Graph Transformations with Industrial Relevance*. 1999, pp. 395-410.