УДК 004.932.2

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МЕТОДИК СПЕКТРАЛЬНОГО ОЦЕНИВАНИЯ МНОГОМЕРНЫХ СИГНАЛОВ МЕТОДОМ ПРОНИ

В. Г. Андреев, д.т.н., профессор кафедры РТС РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0003-3059-3532, e-mail: andrejev.v.g@rsreu.ru
Д. В. Авраменко, аспирант РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0003-1796-436X, e-mail: avramenko.denis2014@yandex.ru

Проведен сравнительный анализ методик спектрального оценивания многомерных сигналов методом Прони. Представлена структурная схема предложенной методики. ***Целью работы*** *ставится увеличение точности спектрального анализа изменений интенсивности многочастотных сигналов методом Прони. Сопоставляются качественные показатели двустороннего метода Прони с двумерным методом Прони. Подтверждено, что для анализа спектра исследуемых сигналов относительные отклонения ΔF оценки доминантной частоты значительно (до 3 раз) уменьшаются при помощи использования двустороннего метода Прони по сравнению с двумерным методом Прони. Эффективность обеспечивается в результате учёта факта вариации мощности сигнала.*

Ключевые слова: *двусторонний метод Прони, двумерный метод Прони, система уравнений Юла – Уолкера, весовой вектор, спектральное параметрическое оценивание, квазиобратная матрица, минимизация среднего квадрата ошибки.*

DOI: 10.21667/1995-4565-2021-76-17-24

Введение

В связи с технологическим совершенствованием в области радиотехники, произошедшим за последние десятилетия, появилось множество сфер науки и техники, в которых используют радиотехнические системы и устройства. К ним можно отнести цифровую обработку сигналов, медицинскую неинвазивную диагностику, радиолокацию, инерциальную навигацию и многие другие. Все эти сферы объединяет то, что существует необходимость в обработке данных, в частности в проведении анализа спектра сигнала для оценки его параметров. Особый интерес представляют методы спектрального анализа, принимающие во внимание действительность вариации мощности сигнала во времени наблюдения, к таковым можно отнести и метод наименьших квадратов Прони. Отметим, что параметрические и классические непараметрические методы не принимают во внимание данную особенность обрабатываемых процессов.

Формально метод Прони не является методом спектрального анализа, к нему больше подходит формулировка – спектральное оценивание (СО), так как любой анализируемый сигнал данный метод представляет в виде суммы комплексных экспонент [1, 2]. Однако близость к спектральному анализу подтверждается сходством метода Прони с алгоритмами линейного предсказания по методу наименьших квадратов, которые используются для оценивания авторегрессионных (АР) и авторегрессии скользящего среднего (АРСС) параметров.

Сравнительный анализ методик СО многомерных сигналов двустороннего метода Прони [3] с двумерным методом Прони [4] проведем путем моделирования наблюдаемого процесса $\mathbf{X}$ в виде суммы затухающих (нарастающих) гармоник, длительностью T выборок (строк) $T = 3$.

Целью данной работы является сравнительный анализ качественных показателей двумерного и двустороннего методов Прони для повышения точности СО изменений интенсивности многочастотных сигналов с изменяющейся мощностью.

Двусторонний метод Прони

Рассмотрим в качестве выполнения дискретного марковского векторного N-мерного случайного процесса конечной зависимости результат моделирования наблюдаемого процесса, который запишем в следующей форме:

$$\mathbf{X}=[\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_t, \ldots, \mathbf{x}_{T-1}], \tag{1}$$

где $\mathbf{x}_t$ – N-мерный векторный t-й временной отсчёт исследуемого процесса [5]. С математического аспекта N-мерный исследуемый процесс представим в виде [6]:

$$\mathbf{x}_t = \sum_{k=1}^{K} \mathbf{Z}_k^t \mathbf{h}_k + \mathbf{e}_t, \tag{2}$$

где $\mathbf{h}_k$ – N-мерный вектор-столбец k-й комплексной амплитуды, данный параметр не зависит от времени; $\mathbf{Z}_k^t$ – $(N\times N)$-мерная матрица k-й комплексной экспоненты для t-го векторного временного отсчёта, данная величина зависит от времени; $\mathbf{e}_t$ – N-мерный вектор-столбец t-го векторного отсчёта $e_{n,t}$ процесса ошибки аппроксимации. Запишем (2) в более удобном представлении:

$$\begin{bmatrix} x_{0,t} \\ x_{1,t} \\ \vdots \\ x_{n,t} \\ \vdots \\ x_{N-1,t} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{K} \begin{bmatrix} z_{0,k}^t & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_{1,k}^t & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & z_{n,k}^t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & z_{N-1,k}^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_{0,k} \\ h_{1,k} \\ \vdots \\ h_{n,k} \\ \vdots \\ h_{N-1,k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{0,t} \\ e_{1,t} \\ \vdots \\ e_{n,t} \\ \vdots \\ e_{N-1,t} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где $x_{n,t}$ – значение t-го наблюдения в n-й строке, при $n = 0,1,\ldots, N-1$; $h_{n,k}$, $z_{n,k}^t$ – параметры вектора $\mathbf{h}_k$ и матрицы $\mathbf{Z}_k^t$, которые определяются из следующих выражений:

$$h_{n,k} = A_{n,k} \exp(\mathrm{i}\theta_{n,k}), \tag{4}$$

$$z_{n,k}^t = \exp[(\alpha_{n,k} + \mathrm{i}2\pi F_{n,k} t)/T], \tag{5}$$

где i – мнимая единица; $A_{n,k}$ – амплитуда; $\theta_{n,k}$ – начальная фаза; $\alpha_{n,k}$ – коэффициент затухания; $F_{n,k}$ – частота k-й комплексной экспоненты в n-мерном канале наблюдения. Данные величины находятся из следующих выражений:

$$A_{n,k} = \left|h_{n,k}\right|, \ \alpha_{n,k} = [\ln\left|z_{n,k}\right|]/T,$$

$$\theta_{n,k} = \operatorname{arctg}\left[\frac{\operatorname{Im}\left(h_{n,k}\right)}{\operatorname{Re}\left(h_{n,k}\right)}\right], \ F_{n,k} = \operatorname{arctg}\left[\frac{\operatorname{Im}\left(z_{n,k}\right)}{\operatorname{Re}\left(z_{n,k}\right)}\right] / 2\pi T.$$

Представление $\mathbf{X}$, описываемое в (2) в виде линейного уравнения, которое с достаточной точностью представляет свойства исходной нелинейной системы, возможно путем определения компонент $h_{n,k}$ и $z_{n,k}^t$, запишем его в виде:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_t \\ \vdots \\ \mathbf{x}_{T-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_0^0 & \mathbf{Z}_1^0 & \cdots & \mathbf{Z}_k^0 & \cdots & \mathbf{Z}_{K-1}^0 \\ \mathbf{Z}_0^1 & \mathbf{Z}_1^1 & \cdots & \mathbf{Z}_k^1 & \cdots & \mathbf{Z}_{K-1}^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Z}_0^t & \mathbf{Z}_1^t & \cdots & \mathbf{Z}_k^t & \cdots & \mathbf{Z}_{K-1}^t \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{Z}_0^{T-1} & \mathbf{Z}_1^{T-1} & \cdots & \mathbf{Z}_k^{T-1} & \cdots & \mathbf{Z}_{K-1}^{T-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{h}_0 \\ \mathbf{h}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{h}_k \\ \vdots \\ \mathbf{h}_{K-1} \end{bmatrix}, \tag{6}$$

где $\mathbf{Z}$ – $(T\times K)$-мерная матрица комплексной экспоненты, $\mathbf{h}$ – K-мерный вектор-столбец комплексной амплитуды.

Нахождение значений **Z** и **h** осуществляется при помощи минимизации квадрата ошибки $\sum_{t=k+1}^{T}\left|\mathbf{e}_t\right|^2$ по каждому параметру $\mathbf{h}_k$, решением которого будет выражение [6]:

$$\left(\mathbf{Z}^{\mathrm{H}}\mathbf{Z}\right)^{-1}\left(\mathbf{Z}^{\mathrm{H}}\mathbf{Z}\right)\mathbf{h}=\left(\mathbf{Z}^{\mathrm{H}}\mathbf{Z}\right)^{-1}\mathbf{Z}^{\mathrm{H}}\mathbf{X}, \tag{7}$$

где $^{\mathrm{H}}$ – эрмитово сопряжение; $\left(\mathbf{Z}^{\mathrm{H}}\mathbf{Z}\right)$ – (K×K)-мерная эрмитова матрица.

Определение АР-параметров (коэффициентов a_k линейного предсказания) является одним из этапов оценивания спектра методом Гаспара Рише. В данной работе предлагается использовать одну из особенностей двустороннего метода Прони, заключающуюся в возможности применения векторной переопределенной модели, что позволит в значительной степени уменьшить уровень аддитивного шума, влияние которого сопровождается регистрацией ошибочных оценок коэффициентов a_k.

Определение вектора $\mathbf{a}_{k+P}$ коэффициентов переопределенной АР модели осуществляется на основе переопределённой системы линейных уравнений, которую представим в виде [6]:

$$\mathbf{X}_{k+P}\mathbf{a}_{k+P}\rightarrow-\mathbf{x}_{k+P}, \tag{8}$$

где $\mathbf{X}_{k+P}$ – (2p+P)N×pN-мерная матрица наблюдений моделируемого процесса, $\mathbf{x}_{k+P}$ – (2p+P)×N-мерный вектор-столбец его векторных отсчётов, P – глубина переопределённости.

Запишем получение вектора коэффициентов $\mathbf{a}_{k+P}$ из (8) с помощью модифицирования прямоугольной матрицы $\mathbf{X}_{k+P}$ в квадратную домножением на $\mathbf{X}_{k+P}^{\mathrm{H}}$:

$$\mathbf{a}_{k+P}=-(\mathbf{X}_{k+P}^{\mathrm{H}}\mathbf{X}_{k+P})^{-1}\mathbf{X}_{k+P}^{\mathrm{H}}\mathbf{x}_{k+P}, \tag{9}$$

где $\mathbf{X}_{k+P}^{\mathrm{H}}\mathbf{X}_{k+P}$ – pN×pN-мерная матрица, $\mathbf{X}_{k+P}^{\mathrm{H}}\mathbf{x}_{k+P}$ – (2p+P)×N-мерный вектор-столбец.

Для практических расчётов $\mathbf{a}_{k+P}$, а также с целью получения регуляризации задачи обращения произведения $\mathbf{X}_{k+P}^{\mathrm{H}}\mathbf{X}_{k+P}$ матриц рассмотрим выражение (9) в качестве системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\mathbf{a}_{k+P}=-(\mathbf{X}_{k+P}^{\mathrm{H}}\mathbf{X}_{k+P}+\lambda\mathbf{I})^{-1}\mathbf{X}_{k+P}^{\mathrm{H}}\mathbf{x}_{k+P}, \tag{10}$$

где **I** – единичная матрица, λ – регуляризующая величина [3, 7].

Следующий ход оценивания методом Прони заключается в выражении полинома $\boldsymbol{\varphi}_z$ в виде степенной последовательности [6]:

$$\boldsymbol{\varphi}_z=\sum_{k=0}^{K}\mathbf{Z}_k^{t-k}\mathbf{a}_{k+P}, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{\varphi}_z=[\varphi_{0,z};\ \varphi_{1,z};\ \ldots;\ \varphi_{n,z};\ \ldots;\ \varphi_{N-1,z}]^{\mathrm{T}}$ – N-мерный вектор-столбец полинома, корнями которого являются экспоненты $\mathbf{Z}_k^t$; $\mathbf{a}_{k+P}$ – комплексные полиномиальные коэффициенты переопределённой векторной АР модели; $^{\mathrm{T}}$ – знак транспонирования.

Отметим одну из отличительных особенностей двустороннего метода Прони, которая заключается в том, что формируемая модель по отсчётам **X** наблюдений учитывает плавное изменение мощности сигнала, а также факты его возрастания, а затем затухания. Для этого предлагается взвесить отсчёты **X** весовым вектором $\mathbf{w}_t$, где $\mathbf{w}_t$ – N-мерный вектор-столбец t-го векторного отсчёта $\mathbf{w}_t=[w_{0,t};\ w_{1,t};\ \ldots;\ w_{n,t};\ \ldots;\ w_{N-1,t}]^{\mathrm{T}}$, имеющий смысл весов значимости наблюдаемых отсчётов, с компонентами:

$$w_{n,t}=\cos\left[\frac{\pi\cdot t}{T}-\frac{t}{2}\right]^{l}, \tag{12}$$

где w_t – весовой коэффициент временных отсчётов, l – степенной множитель, оптимизация которого осуществлялась путем оценки зависимости среднеквадратического отклонения $E(l)$, относительного отклонения оцененных частот от истинных $\Delta F(l)$ и коэффициента β, на основе выражения:

$$\mu(l,\beta)=\beta E(l)+(1-\beta)\Delta F(l), \tag{13}$$

где μ – выигрыш в эффективности, параметр, зависящий от l и $\beta\in[0;1]$.

Рассматривая выражения (12) и (13), получаем, что значение веса $0\le w_t\le 1$ учитывает уменьшение достоверности оценки отсчётов $\mathbf{X}$ при модуляции сигнала квадрата косинусоиды. Самое приемлемое значение весового коэффициента $w_{n,t}$ достигается при $l = 1$.

С целью проведения последующего оценивания спектра, используя величину w_t, изменения амплитуды сигнала x_t за время T наблюдений можем представить в следующем виде $\mathbf{Y}=\mathbf{WX}$, или в развернутой форме:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{y}_0\\ \mathbf{y}_1\\ \vdots\\ \mathbf{y}_t\\ \vdots\\ \mathbf{y}_{T-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{W}_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & \mathbf{W}_1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \mathbf{W}_t & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \mathbf{W}_{T-1}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{x}_0\\ \mathbf{x}_1\\ \vdots\\ \mathbf{x}_t\\ \vdots\\ \mathbf{x}_{T-1}\end{bmatrix}, \tag{14}$$

где $\mathbf{Y}=[\mathbf{y}_t]$ – реализация наблюдаемого процесса со взвешиванием отсчётов $\mathbf{X}=[\mathbf{x}_t]$; $\mathbf{y}_t=[y_{0,t}, y_{1,t}, \ldots, y_{n,t}, \ldots, y_{N-1,t}]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}_t=[x_{0,t}, x_{1,t}, \ldots, x_{n,t}, \ldots, x_{N-1,t}]^{\mathrm{T}}$; $\mathbf{W}=[\mathrm{diag}(\mathbf{W}_t)]$ – квадратная матрица с элементами $\mathbf{W}_t=[\mathrm{diag}(\mathbf{w}_t)]=\mathrm{diag}([w_{0,t}, w_{1,t}, \ldots, w_{n,t}, \ldots, w_{N-1,t}]^{\mathrm{T}})$, $t = 0, 1, \ldots, T-1$.

Двумерный метод Прони

Моделирование двумерных данных, в сопоставляющем методе Прони, устанавливается схоже линейной комбинации двумерных экспонент на интервалах $t\in[0, T-1]$ и $s\in[0, S-1]$, из чего следует, что модель принятого сигнала запишется в виде [4, 8]:

$$r_{s,t}=x_{s,t}+e_{s,t}=\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}C_{k,m}v_k^s z_m^t+e_{s,t}, \tag{15}$$

где $K=M$ – известная система разложения, v_k^s, z_m^t – полюсы, комплексные экспоненты, $C_{k,m}$ – комплексные амплитуды, $e_{s,t}$ – отсчёты белого гауссова шума.

Получить двумерный ряд из (15) возможно при равенстве $K = M$, так как в данном случае матрица амплитуд $C_{k,m}$ станет диагональной. Комплексные параметры

$$x_{s,t}=\sum_{i=1}^{N}A_i v_i^s z_i^t. \tag{16}$$

подобно (15) представляют собой определение однородного линейно-разностного уравнения с постоянными коэффициентами, данное выражение имеется возможность разделить на два независимых [9]:

$$\sum_{k=0}^{K}\sum_{m=0}^{M}a_{k,m}x_{s-k,t-m}=0, \tag{17}$$

где $a_{k,m}$ – комплексные полиномиальные коэффициенты. В этом случае определение $a_k^{(1)}$ и $a_m^{(2)}$ заключается в решении двух независимым задачам по оценке этих коэффициентов:

$$\sum_{k=0}^{K}a_k^{(1)}x_{s-k,S}=0,\ \sum_{m=0}^{M}a_m^{(2)}x_{L,t-m}=0. \tag{18}$$

Известно [8, 10] нахождение комплексных амплитуд A_i двумерного метода Прони:

$$\mathbf{A}=\mathbf{V}^{+}\mathbf{X}\mathbf{Z}^{+}, \tag{19}$$

где $^+$ – знак обозначающий инверсию Мура – Пенроуза (квазиобращение), $\mathbf{V}$, $\mathbf{Z}$ – соответствующие матрицы Вандермонда, которые имеют вид [11]:

$$\mathbf{V}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_1^{S-1} & v_2^{S-1} & \cdots & v_k^{S-1} \end{bmatrix}, \mathbf{Z}=\begin{bmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{T-1} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{T-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_K & \cdots & z_K^{T-1} \end{bmatrix}. \quad (20)$$

В целях проведения сравнительного анализа алгоритмов аппроксимации Прони для известного и предложенного подходов на рисунках 1 и 2 представлены структурные схемы формальных процедур.

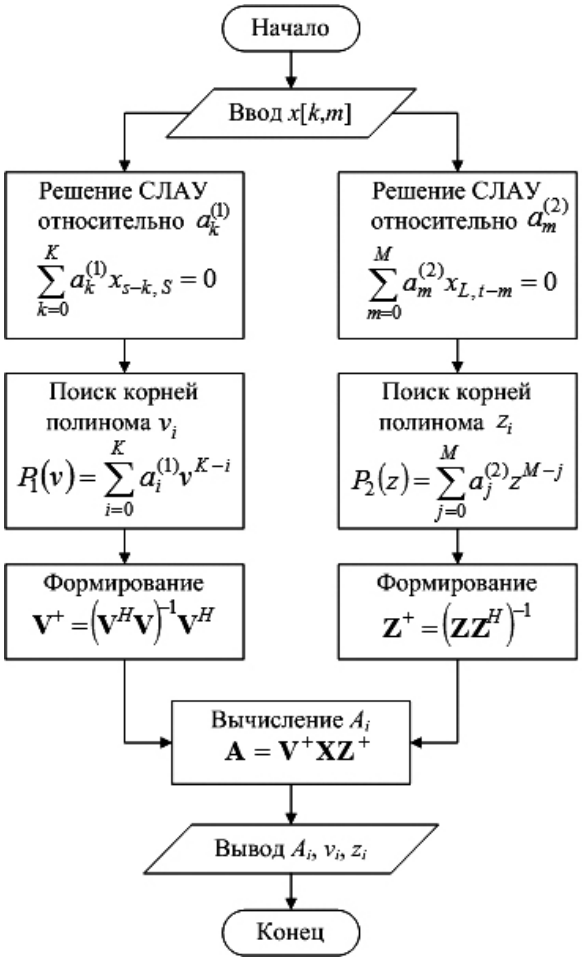

Рисунок 1 – Структурная схема алгоритма построения разложения в двумерный ряд Прони

Figure 1 – Block diagram of the algorithm for constructing the expansion in a two-dimensional Prony's series

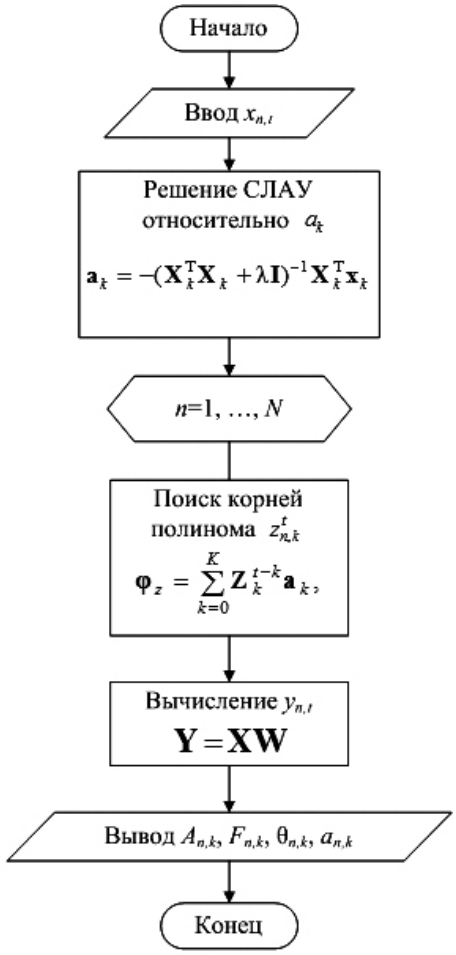

Рисунок 2 – Структурная схема двустороннего метода Прони

Figure 2 – Block diagram of two-sided Prony's method

Анализируя рисунки 1 и 2 допускается вывод о том, что построение разложения в двумерный ряд Прони возможно только при наличии последовательностей эквидистантных отсчетов $S\times T$ двумерного сигнала, при $S=T$. В предложенном же методе Прони возможно использование N-мерного случайного процесса, при котором значение $N\neq T$. Вместе с тем ещё одной из отличительных особенностей двустороннего метода Прони является нахождение АР-параметров коэффициентов a_k линейного предсказания.

Результаты статического моделирования

Проведем анализ рассматриваемых методик на основе моделирования наблюдаемого процесса **X** в виде суммы затухающих гармоник с циклическими частотами F, $2F$, $3F$. В данных целях были построены спектральные плотности мощности (СПМ) $S(F)$ двумерным ме-

тодом Прони, двусторонним методом Прони, а также для сравнения АР методом. В рассматриваемом примере для оценки АР-параметров переопределенная модель не использовалась ввиду малого количества T отсчетов наблюдения ($T = 3$). Оценки нормированных к своим максимальным значениям спектров представлены на рисунке 3. Соответственно на нем показаны введенные условные обозначения: сплошной линией $S_{\text{Р}}$ – СПМ, полученная с помощью предложенного метода (при $p = 2$, $P = 0$); пунктирной линией $\widetilde{S}_{\text{Р}}$ – СПМ, построенная с использованием двумерного метода Прони; точечной линией $S_{\text{а}}$ – СПМ, определенная АР методом (при $p = 2$). Так как отличия между энергетическими спектрами трёх гармоник малозаметны, они представлены на рисунке 3 едиными кривыми $\widetilde{S}_{\text{Р}}(F)$ и $S_{\text{Р}}(F)$.

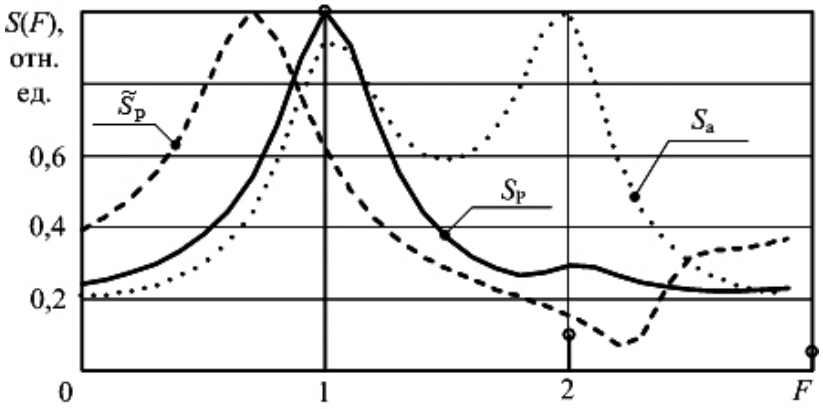

Рисунок 3 – Спектральные плотности мощности
Figure 3 – Power spectral density

На рисунке 3 можно наблюдать, что погрешность оценки параметров наблюдаемого процесса двусторонним методом Прони ниже погрешности двумерного метода Прони. Отметим, что истинные частоты обозначены в виде маркеров на $F = 1$ и $F = 2$, причём доминантная частота (гармоника) на $F = 1$. Введём формальный критерий численной оценки эффективности анализа спектра.

Анализ эффективности и выводы

Проведем расчёт критерия эффективности относительные отклонения ΔF оцененных доминантных частот $\hat{F}$ от истинной F:

$$\Delta F = \frac{\left| F - \hat{F} \right|}{F} \cdot 100\,\%.$$

Запишем полученные значения $\hat{F}$ измеренных доминантных частот для двустороннего метода Прони – $F_{\text{Р}} = 1$ Гц, для двумерного метода Прони – $\widetilde{F}_{\text{Р}} = 0{,}7$ Гц, а также – полученные для сравнения с параметрическим методом спектрального анализа значения, оцененные АР-методом – $F_{\text{а}} = 2$ Гц. При величине истинной частоты $F = 1$ Гц, получим, что относительная ошибка оцененных частот составляет – $\Delta F_{\text{Р}} = 0$ %, $\Delta \widetilde{F}_{\text{Р}} = 30$ % и $\Delta F_{\text{а}} = 100$ %.

Проведенный сравнительный анализ методик спектрального оценивания показал, что величины ΔF существенно (до 3 раз) уменьшаются путём использования двустороннего метода Прони по сравнению с двумерным методом Прони. Результативность достигается благодаря учёту факта изменения мощности процесса на фоне возрастания, а затем затухания сигнала. Отметим также, что возможно использование переопределенности при увеличении числа наблюдений [3, 6, 12, 13].

Библиографический список

1. **Марпл-мл. С. Л.** Цифровой спектральный анализ и его приложения: пер. с англ. М.: Мир, 1990. 584 с.

2. **Кривошеев В. И.** Современные методы цифровой обработки сигналов (цифровой спектральный анализ). Нижний Новгород. 2006. 117 с.

3. **Авраменко Д. В., Андреев В. Г.** Анализ спектра излучений от астрономического объекта искусственного происхождения двусторонним методом Прони // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2018. № 64. С. 3-8.

4. **Верстаков Е. В., Захарченко В. Д.** Сравнительный анализ алгоритмов аппроксимации двумерных сигналов по методу Прони и методу матричных пучков. Радиотехнические и телекоммуникационные системы. 2015. № 1.

5. **Fahrmeir L., Tutz G.** Multivariate Statistical Modelling Based on Generalized Linear Models (2nd ed.). New York: Springer-Verlag, 2001. P. 517.

6. **Авраменко Д. В., Андреев В. Г.** Метод распознавания изображений космических аппаратов на основе анализа спектра яркостной модуляции методом Прони // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2019. № 69. С. 26-32.

7. **Райс Дж. Р.** Матричные вычисления и математическое обеспечение: пер. с англ. О. Б. Арушаняна. М.: Мир, 1984. 264 с.

8. **Верстаков Е. В., Захарченко В. Д.** Потенциальная точность представления двумерного сигнала рядом Прони // Известия Волгоградского государственного технического университета: межвуз. сб. науч. статей. Волгоград: ВолгГТУ. 2010. № 4 (42). С. 76-79.

9. **Верстаков Е. В., Захарченко В. Д.** Модификация метода Прони для двумерных сигналов // Материалы международной научной конференции «Системы и модели в информационном мире», Ч. 3. Таганрог: Изд. ТТИ ЮФУ, 2009. С. 882-886.

10. **Дрюпина Н. С., Арсеньева Д. Г., Волчков В. П.** Расширение классической модели Прони на пространство непрерывных сигналов и вычисление ее основных характеристик во временной и спектральной областях // Телекоммуникации и информационные технологии. 2018. Т. 5. № 1. С. 83-88.

11. **Ильин В. А., Позняк Э. Г.** Линейная алгебра. М.: Наука. Физматлит, 1999. 296 с.

12. **Андреев В. Г., Нгуен Ш. В.** Параметрическое моделирование коррелированных радиоотражений для анализа эффективности обработки эхо-сигналов // Вестник Рязанскоого радиотехнического университета. 2006. № 18. С. 40-45.

13. **Андреев В. Г.** Оптимизация авторегрессионных моделей мешающих радиоотражений // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 2008. Т. 51. № 7. С. 40-47.

UDC 004.932.2

COMPARATIVE ANALYSIS OF TECHNIQUES FOR SPECTRAL ESTIMATION OF MULTI-DIMENSIONAL SIGNALS BY PRONY'S METHOD

D. V. Avramenko, post graduate student RSREU, Ryazan, Russia;
orcid.org/0000-0003-1796-436X; avramenko.denis2014@yandex.ru
V. G. Andrejev, Dr. in technical sciences, full professor, the department of Radioengineering systems, RSREU, Ryazan, Russia;
orcid.org/0000-0003-3059-3532; andrejev.v.g@rsreu.ru

A comparative analysis of the techniques for spectral estimation of multidimensional signals by Prony's method is carried out. The block diagram of the proposed technique is presented. ***The aim of this work*** *is to increase spectral analysis accuracy of changes in the intensity of multifrequency signals by Prony's method. The qualitative indicators of two-sided Prony's method are compared with two-dimensional Prony's method. It has been confirmed that to analyze the spectrum of the signals under study, relative deviations ΔF of the estimate of dominant frequency are significantly (up to 3 times) reduced by using two-sided Prony's method compared to two-dimensional Prony's method. The efficiency is achieved by taking into account the fact that signal strength changes during the observation process.*

Key words: *two-sided Prony's method, two-dimensional Prony's method, system of Yule – Walker equations, weight vector, spectral parametric estimation, pseudo-inverse matrix, minimization of the mean square of the error.*

DOI: 10.21667/1995-4565-2021-76-17-24

References

1. **Marpl-ml. S. L.** *Cifrovoj spektral'nyj analiz i ego prilozheniya* (Digital spectral analysis and its applications): per. s angl. Moscow.: Mir, 1990. 584 p. (in Russian).

2. **Krivosheev V. I.** *Sovremennye metody cifrovoj obrabotki signalov (cifrovoj spektral'nyj analiz)*. Nizhnij Novgorod. 2006. 117 p. (in Russian).

3. **Avramenko D. V., Andrejev V. G.** Analiz spektra izluchenij ot astronomicheskogo ob"ekta iskusstvennogo proiskhozhdeniya dvustoronnim metodom Proni. *Vestnik Ryazanskogo gosudar-stvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2018, no. 64, pp. 3 8. (in Russian).

4. **Verstakov E. V., Zaharchenko V. D.** Sravnitel'nyj analiz algoritmov approksimacii dvumernyh signalov po metodu Proni i metodu matrichnyh puchkov. *Radiotekhnicheskie i telekommunikacionnye sistemy*. 2015, no. 1. (in Russian).

5. **Fahrmeir L., Tutz G.** Multivariate Statistical Modeling Based on Generalized Linear Models (2nd ed.). New York: Springer-Verlag, 2001. 517 p.

6. **Avramenko D. V., Andrejev V. G.** Metod raspoznavaniya izobrazhenij kosmicheskih appara-tov na osnove analiza spektra yarkostnoj modulyacii metodom Proni. *Vestnik Ryazanskogo gos-udarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2019, no. 69, pp. 26 32. (in Russian).

7. **Rajs Dzh. R.** *Matrichnye vychisleniya i matematicheskoe obespechenie* (Matrix calculations and software): per. s angl. O. B. Arushanyana. Moscow: Mir. 1984, 264 p. (in Russian).

8. **Verstakov E. V., Zaharchenko V. D.** Potencial'naya tochnost' predstavleniya dvumernogo signala ryadom Proni. *Izvestiya Volgogradskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta: mezhvuz. sb. nauch. statej. Volgograd: VolgGTU*. 2010, no. 4 (42), pp. 76-79. (in Russian).

9. **Verstakov E. V., Zaharchenko V. D.** Modifikaciya metoda Proni dlya dvumernyh signalov. *Materialy mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii «Sistemy i modeli v informacionnom mire»*, Ch. 3. Taganrog: Izd. TTI YUFU. 2009, pp. 882-886. (in Russian).

10. **Dryupina N. S., Arsen'eva D. G., Volchkov V. P.** Rasshirenie klassicheskoj modeli Proni na prostranstvo nepreryvnyh signalov i vychislenie ee osnovnyh harakteristik vo vremennoj i spektral'noj oblastyah. *Telekommunikacii i informacionnye tekhnologii*. 2018, vol. 5, no 1, pp. 83-88. (in Russian).

11. **Il'in V. A., Poznyak E. G.** *Linejnaya algebra* (Linear algebra). Moscow: Nauka. Fizmatlit, 1999. 296 p. (in Russian).

12. **Andrejev V. G., Nguen Sh. V.** Parametricheskoe modelirovanie korrelirovannyh radiootrazhenij dlya analiza effektivnosti obrabotki ekhosignalov. *Vestnik Ryazanskoogo radio-tekhnicheskogo universiteta*. 2006, no. 18, pp. 40-45. (in Russian).

13. **Andrejev V. G.** Optimizaciya avtoregressionnyh modelej meshayushchih radiootrazhenij. *Izv. vuzov. Radioelektronika*. 2008, vol. 51, no. 7, pp. 40-47. (in Russian).