УДК 004.023

АНАЛИЗ СОГЛАСОВАННОСТИ МНЕНИЙ СПЕЦИАЛИСТОВ В УСЛОВИЯХ ПРОТИВОРЕЧИВОСТИ ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК ПРОЕКТНЫХ АЛЬТЕРНАТИВ

С. В. Скворцов, д.т.н., профессор РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0001-9495-4953, e-mail: s.v.skvor@gmail.com
В. И. Хрюкин, к.т.н., доцент РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0002-7736-115X, e-mail: vi_x@mail.ru
Т. С. Скворцова, к.т.н., старший преподаватель Академии ФСИН России, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0001-7504-5973, e-mail: t.s.skvortsova@yandex.ru

Рассматривается задача определения групп специалистов, имеющих согласованные мнения относительно эффективности проектных альтернатив, при использовании метода ранжирования с возможностью применения связанных рангов. Показана ограниченность известных методов корреляционного и кластерного анализа для решения этой задачи в условиях противоречивости экспертных оценок. ***Целью работы*** *являются разработка и обоснование подхода к анализу согласованности экспертных оценок при неоднозначности мнений специалистов, основанного на использовании групповой ранговой корреляции. Предложены количественные показатели, характеризующие согласованность мнений группы экспертов. Разработан итерационный алгоритм поиска допустимых вариантов распределения экспертов по группам, который позволяет автоматизировать поиск согласованного экспертного мнения в системах поддержки принятия решений.*

Ключевые слова: *экспертные оценки, коэффициент корреляции Спирмена, коэффициент конкордации, кластерный анализ, ранжирование, связанные ранги, проектные альтернативы, группы экспертов, согласованность оценок, системы поддержки принятия решений.*

DOI: 10.21667/1995-4565-2021-76-53-64

Введение

На ранних этапах решения сложных технических задач, например, при разработке больших программных систем заказчик обычно привлекает множество подрядчиков, которые готовят разные варианты технических предложений или технических заданий [1]. Эти документы представляются в виде описаний, отражающих наиболее существенные особенности решаемой задачи в заданных условиях. Очевидно, что такие варианты описаний, подготовленные разными подрядчиками, являются альтернативными, поскольку для решения задачи должен быть выбран только один из них. Далее для удобства будем называть эти варианты описаний проектными альтернативами [2].

Выбор проекта из множества альтернатив представляет собой отдельную задачу, для решения которой часто используются методы экспертных оценок [2, 3]. В простейшем случае эксперты ранжируют проекты по степени эффективности, для чего с ними сопоставляются порядковые номера, называемые рангами. При этом также могут использоваться связанные ранги, когда проекты с одинаковой эффективностью получают одинаковые оценки, равные среднему значению рангов проектных альтернатив.

Сложность применения методов экспертных оценок связана с необходимостью учета таких ситуаций, когда получаемые результаты противоречивы. В этом случае возникает необходимость анализа согласованности оценок экспертов, а одной из решаемых задач является нахождение групп экспертов с «близкими» мнениями, что позволяет сформировать некоторое групповое решение [2].

В статье рассматривается задача определения групп экспертов, обеспечивающих получение согласованного группового решения для метода ранжирования с возможностью использования связанных рангов, допускающих выражение неоднозначных мнений при оценке проектных альтернатив.

Анализ известных решений

Пусть оценивается m проектных альтернатив n экспертами с использованием рангов r_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$), где r_{ij} – ранг j-й альтернативы, присвоенный i-м экспертом. Ранги могут быть представлены целыми значениями $r_{ij} \in \{1,2,\ldots,m\}$, причем будем считать, что ранги возрастают по убыванию эффективности проектных альтернатив. Исходными данными для решаемой задачи служит прямоугольная матрица $\boldsymbol{R} = [r_{ij}]_{n\times m}$.

Если проекты ранжированы двумя экспертами, то имеется возможность оценить тесноту связи между ранговыми переменными r_{kj} и r_{lj} ($j = 1, 2, \ldots, m$) с использованием коэффициента ранговой корреляции Спирмена [4]:

$$\rho_{kl} = 1 - \frac{6\sum_{j=1}^{m}(r_{kj} - r_{lj})^2}{m^3 - m}, \tag{1}$$

который может принимать значения $-1 \le \rho_{kl} \le 1$.

Для значимых проектов может привлекаться большее число специалистов с целью получения коллективного мнения группы экспертов. Тогда возникает необходимость оценить качество проектов по данным n экспертов ($n > 2$) и определить, мнения каких экспертов согласуются между собой. Согласованность мнений нескольких экспертов определяется с помощью множественного коэффициента корреляции рангов (коэффициента конкордации) [5], который вычисляется по формуле

$$W = \frac{12\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} r_{ij} - \overline{r}_j\right)^2}{n^2(m^3 - m)}, \tag{2}$$

где $\overline{r}_j$ – среднее значение ранга j-го проекта.

Проверка значимости коэффициента конкордации основана на распределении хи-квадрат и выполняется следующим образом. Сначала определяется величина $\chi^2 = m(n - 1)W$. Затем она сравнивается с критическим значением распределения $\chi^2_{кр}$ для принятого уровня значимости α и числа степеней свободы $f = (m - 1)(n - 1)$, которое определяется из справочных таблиц [4]. Если $\chi^2 > \chi^2_{кр}$, то гипотеза об отсутствии связи отвергается, а корреляция признаётся значимой. В противном случае гипотеза об отсутствии связи принимается.

При наличии связанных (одинаковых) рангов формулы для расчета W и χ^2 несколько усложняются [2, 5]:

$$W = \frac{12\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} r_{ij} - \overline{r}\right)^2}{n^2(m^3 - m) - n\sum_{i=1}^{n} T_i}, \tag{3}$$

где $\overline{r}$ – средний ранг, T_i – показатель связанных рангов в i-й ранжировке, значения которых определяется следующим образом:

$$\overline{r} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\overline{r}_j; \quad T_i = \sum_{k=1}^{H_i}(h_k^3 - h_k), \tag{4}$$

где H_i – число групп равных рангов в i-й ранжировке; h_k – число равных рангов в k-й группе связанных рангов при ранжировке i-м экспертом.

Таким образом, коэффициент конкордации позволяет определить, случайна или не случайна согласованность мнений специалистов. Чем больше коэффициент конкордации, тем выше степень согласованности мнений специалистов. Коэффициент конкордации может принимать значения $0 \le W \le 1$. Если $W = 0$, то это означает полное отсутствие согласованности между ранжировками экспертов, а значение $W = 1$ показывает, что специалисты одинаково упорядочили проекты. При $W \ge 0,7$ можно говорить о сильной положительной ранговой связи, что позволяет утверждать о примерно одинаковой оценке проектов экспертами. Величина $W < 0{,}7$ означает, что эта связь слабая или умеренная, т.е. оценки экспертов связаны друг с другом несущественно.

Однако, методы корреляционного анализа, основанные на использовании коэффициента конкордации, имеют ограниченное применение, так как только позволяют установить согласованы или нет оценки экспертов. В последнем случае возникает необходимость дополнительных исследований, например, направленных на определение групп специалистов, мнения которых согласованы в наибольшей степени [2, 3].

Для этого можно воспользоваться методами кластерного анализа [7, 8], который позволяет выделить однородные в некотором смысле кластеры, т.е. группы экспертов, оценки проектов у которых в значительной степени совпадают. В свою очередь, кластерный подход также имеет существенный недостаток, связанный с тем, что каждый эксперт может входить только в один из кластеров. Это заметно усложняет процедуру получения всех допустимых вариантов распределения экспертов по группам, которые могут использоваться для дополнительного анализа проектных альтернатив.

Постановка задачи

Для оценки согласованности мнений коллектива экспертов в работе предлагается подход к анализу экспертных оценок, основанный на комплексном использовании методов корреляционного и кластерного анализа. Это позволяет компенсировать недостатки указанных методов и получить более полную информацию для принятия управленческих решений.

Пусть имеются результаты экспертного анализа ряда проектных альтернатив множествам экспертов, представленные матрицей $\boldsymbol{R} = [r_{ij}]_{n \times m}$ с возможностью применения связанных рангов. Требуется найти группы из наибольшего количества экспертов, имеющих согласованные мнения.

В качестве меры согласованности мнений специалистов в таких группах предлагается использовать коэффициент групповой ранговой корреляции [9], который количественно оценивает возможность включения эксперта t в некоторую группу экспертов M_s и вычисляется по формуле

$$\rho_{M_s,t} = 1 - \frac{6\sum_{j=1}^{m}(r_j^{(s)} - r_{tj})^2}{m^3 - m}, \tag{5}$$

где s – индекс группы экспертов, $r_j^{(s)}$ – среднее значение ранга j-го проекта в группе M_s.

Группа M_s рассматривается как подмножество экспертов, оценки которых в значительной степени совпадают. При этом эксперт с индексом t включается в группу M_S, если значение указанного коэффициента не меньше чем 0,7. Величина коэффициента групповой ранговой корреляции для группы M_s определяется как $\rho(M_s) = \rho_{M_s,t}$.

При реализации такого подхода любой эксперт может входить сразу в несколько групп экспертов M_s, s =1, 2, …, если его индивидуальные оценки проектных альтернатив согласованы с групповыми оценками. В качестве окончательного результата анализа выбирается группа экспертов M_s, включающая в себя максимальное число специалистов. Если таких групп несколько, то выбор производится по итоговому коэффициенту групповой ранговой корреляции, значение которого должно быть наибольшим.

Средние значения рангов выбранной группы и их статистические дисперсии принимаются за итоговые оценки качества проектных альтернатив. Проверку достоверности результатов на определенном уровне значимости (обычно с вероятностью 95 или 99 %) можно провести с использованием t-критерия Стьюдента или F-критерия Фишера [4, 5].

Алгоритмический подход к решению задачи

Пусть число экспертов n >2. Тогда взаимосвязь их оценок можно описать симметричной матрицей коэффициентов ранговой корреляции $\mathbf{P} = [\rho_{kl}]_{n\times n}$, элементы которой вычисляются по формуле (1), причем $\rho_{kl} = \rho_{lk}$, а диагональные элементы $\rho_{ii} = 1$, i =1, 2, …, n.

На основании этой матрицы можно судить о близости оценок для всех пар экспертов и определить процедуру объединения экспертов в одну группу. Очевидно, чем больше величина ρ_{kl}, тем значительнее однородность оценок (выше коэффициент ранговой корреляции). Связь между оценками считается значительной, если $\rho_{kl} \geq 0{,}7$. Если таких значений в матрице нет, то мнения всех экспертов не согласованы.

При наличии в матрице **P** элементов $\rho_{kl} \geq 0{,}7$ формирование первой группы экспертов M_s, где s = 1, начинают с поиска такой пары экспертов k, l, для которой коэффициент ранговой корреляции наибольший:

$$\rho_{kl} = \max_{i,\ j, i\neq j}\{\rho_{ij}\};\ i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,n}. \tag{6}$$

Далее для полученной группы экспертов $M_s = \{k, l\}$ вычисляются средние значения рангов проектных альтернатив $r_j^{(s)},\ \ j = \overline{1,m}$. Это позволяет найти по формуле (5) коэффициент групповой ранговой корреляции $\rho_{M_s,t}$ и определить степень согласованности оценок между группой экспертов M_s и отдельным экспертом с индексом t.

В общем случае группа M_s может включать произвольное число экспертов, таких, что $t \notin M_s$. Для включения третьего и последующих экспертов в группу выбирается такой эксперт с индексом t, для которого значение $\rho_{M_s,t}$ является наибольшим. После добавления эксперта t в группу M_s производится определение новых значений $r_j^{(s)},\ \ j = \overline{1,m}$ и $\rho(M_s) = \rho_{M_s,t}$.

Включение эксперта с индексом t в группу M_s допустимо только в том случае, если коэффициент ранговой корреляции $\rho_{pt} > 0{,}7$, где $p \in M_s$. Важно отметить, что включение очередного эксперта t в группу M_s практически всегда уменьшает значение коэффициента групповой корреляции $\rho_{M_s,t}$. Если результат меньше чем 0,7, то включение эксперта t в текущую группу M_s невозможно и ее формирование завершается.

Аналогично может формироваться другая группа экспертов $M_{s+1} = \{k, l\}$, начиная с такого эксперта $k \notin M_i$, i =1, 2, …, s, для которого значение коэффициента ранговой корреляции $\rho_{kl} \geq 0{,}7$ и удовлетворяет условию (6), где $l \in \{1,2,\ldots, m\}$.

Для практического использования предложенный подход может быть реализован в виде следующего итерационного алгоритма, который на основе матрицы $\boldsymbol{R}$ формирует группы экспертов M_1, M_2, …, имеющих согласованное мнение. Полученные группы упорядочиваются по убыванию количества экспертов и имеют значение коэффициента групповой ранговой корреляции $\rho(M_s) \geq 0{,}7$.

Шаг 1. Вычислить коэффициент конкордации по формуле (2) или с использованием соотношений (3, 4) при наличии связанных рангов. Если $W \geq 0{,}7$, то мнения всех экспертов согласованы, конец алгоритма.

Шаг 2. Вычислить по формуле (1) элементы матрицы $\mathbf{P} = [\rho_{kl}]_{n\times n}$ и положить s = 1.

Шаг 3. В матрице **P** найти наибольший элемент ρ_{kl}, где $k \neq l$ и $k \notin M_i$ для $i = \overline{1, s-1}$.

Шаг 4. Если $\rho_{kl} < 0{,}7$, то мнения экспертов не согласованы, конец алгоритма.

Шаг 5. Образовать группу $M_s = \{k, l\}$.

Шаг 6. Вычислить средние значения рангов $r_j^{(s)},\ \ j = \overline{1,m}$, для группы M_s.

Шаг 7. Найти эксперта с индексом t, для которого

$\rho_{M_s,t} = \max_{iM_s}\{\rho_{M_s,i}\}$; $\rho_{kl} \geq 0{,}7$; $k \in M_s$.

Шаг 8. Если $\rho_{M_s,t} \geq 0{,}7$, то включить эксперта t группу $M_s = M_s \cup \{t\}$, выполнить переход к шагу 6. Иначе изменить индекс группы $s = s + 1$, выполнить переход к шагу 3.

Обоснование предложенного подхода

Покажем, что включение очередного эксперта t в группу M_s действительно уменьшает значение коэффициента групповой корреляции $\rho_{M_s,t}$. Без ограничения общности предположим, что в группу требуется объединить экспертов с индексами 1, 2 и 3, для которых

$$\rho_{12} > \rho_{13};\ \rho_{12} > \rho_{23}. \tag{7}$$

В соответствии с работами [2, 4], запишем:

$$\rho_{12} = 1 - \frac{6\sum_{j=1}^{m}(r_{1j} - r_{2j})^2}{m^3 - m} = 1 - \frac{6\sum_{j=1}^{m}(\Delta r_{12}^{(j)})^2}{m^3 - m}. \tag{8}$$

Аналогично будем иметь

$$\rho_{13} = 1 - \frac{6\sum_{j=1}^{m}(\Delta r_{13}^{(j)})^2}{m^3 - m};\ \rho_{23} = 1 - \frac{6\sum_{j=1}^{m}(\Delta r_{23}^{(j)})^2}{m^3 - m}. \tag{9}$$

Очевидно, что в силу (7) получим:

$$\sum_{j=1}^{m}\Delta r_{12}^{(j)} < \sum_{j=1}^{m}\Delta r_{13}^{(j)};\ \sum_{j=1}^{m}\Delta r_{12}^{(j)} < \sum_{j=1}^{m}\Delta r_{23}^{(j)}.$$

Так как величина ρ_{12} является максимальной среди ρ_{12}, ρ_{13} и ρ_{23}, то сначала группа должна включать экспертов 1 и 2, т.е. $M_s = \{1, 2\}$, где $s = 1$. Пусть далее имеем $\rho_{M_s,3} < \rho_{12}$, тогда в соответствии с (8) и (9) получим:

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{(\Delta r_{12}^{(j)})^2}{4} + \sum_{j=1}^{m}(\Delta r_{13}^{(j)})^2 + \sum_{j=1}^{m} r_{1j}(r_{2j} + r_{3j} - r_{1j}) > \sum_{j=1}^{m}(\Delta r_{12}^{(j)})^2,$$

где r_{1j}, r_{2j}, r_{3j} – значения дискретных случайных величин R_1, R_2, R_3, распределённых по равномерному закону. Заменим $\sum_{j=1}^{m}(\Delta r_{12}^{(j)})^2$ на $\sum_{j=1}^{m}(\Delta r_{13}^{(j)})^2$. В результате условия выполнения полученного неравенства становятся более жесткими, но его вид заметно упрощается для последующего анализа:

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{(\Delta r_{12}^{(j)})^2}{4} + \sum_{j=1}^{m} r_{1j}(r_{2j} + r_{3j} - r_{1j}) > 0. \tag{10}$$

Таким образом, если неравенство (10) справедливо при любом соотношении значений r_{1j}, r_{2j}, r_{3j} независимых случайных величин R_1, R_2, R_3, то добавление в группу нового эксперта с номером 3 снижает величину коэффициента групповой корреляции.

Закон распределения случайных величин R_1, R_2, R_3 является равномерным и описывается таблицей 1, где в первой строке указаны возможные значения обобщенной случайной величины $R = R_1 = R_2 = R_3$, т.е. возможные значения рангов, а во второй строке – вероятности этих значений.

Таблица 1 – Ряд распределения дискретной случайной величины *R*
Table 1 – The distribution series of a discrete random variable *R*

R	1	2	…	r	…	m
	$1/m$	$1/m$	…	$1/m$	…	$1/m$

Математическое ожидание $M[R]$ и дисперсия $D[R]$ случайной величины R имеют следующие значения [6]:

$$M[R] = \frac{m+1}{2};\quad D[R] = \frac{m^2 - 1}{12}.$$

Чтобы упростить анализ соотношения (10), введем в рассмотрение случайную величину

$$Z = \frac{1}{4} X^2 + R_1 \times Y,$$

где $X = |R_1 - R_2|$ и $Y = R_2 + R_3 - R_1$ – дискретные случайные величины, которые принимают значения $|r_{1j} - r_{2j}|$ и $r_{2j} + r_{3j} - r_{1j}$ соответственно, где $j = 1, 2, \ldots, m$.

Найдём математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z. При этом можно показать, что X имеет ряд распределения, которой показан в таблице 2.

Таблица 2 – Ряд распределения дискретной случайной величины *X*

Table 2 – The distribution series of a discrete random variable *X*

X	0	1	2	…	x	…	m-2	m-1
	$\frac{1}{m}$	$\frac{2(m-1)}{m^2}$	$\frac{2(m-2)}{m^2}$	…	$\frac{2(m-x)}{m^2}$	…	$\frac{2\cdot 2}{m^2}$	$\frac{2\cdot 1}{m^2}$

Математическое ожидание случайной величины X можно найти по известной формуле

$$M[X] = \sum_{i=0}^{m-1} x_i p_i = 0 \cdot \frac{1}{m} + 1 \cdot \frac{2(m-1)}{m^2} + \ldots + (m-1) \cdot \frac{2 \cdot 1}{m^2} =$$

$$= 0 + \frac{2}{m^2} \sum_{i=1}^{m-1} i(m-i) = \frac{2}{m} \sum_{i=1}^{m-1} i - \frac{2}{m^2} \sum_{i=1}^{m-1} i^2,$$

где x_i – возможные значения случайной величины, p_i –вероятности их появления. Первую и вторую суммы в последнем выражении можно представить как

$$\sum_{i=1}^{m-1} i = \frac{m(m-1)}{2}; \quad \sum_{i=1}^{m-1} i^2 = \frac{m(m-1)(2m-1)}{6}.$$

Отсюда окончательно получим:

$$M[X] = [|R_1 - R_2|] = \frac{2(m^2-1)}{3m}.$$

В соответствии с правилом умножения зависимых случайных величин, для которых коэффициент корреляции равен единице, математическое ожидание квадрата случайной величины X будет определяться как

$$M[X^2] = M^2[X] + K_{xx},$$

где K_{xx} – ковариация случайных величин X и X, которая равна дисперсии случайной величины X [6]:

$$K_{xx} = D[X] = D[|R_1 - R_2|] = D[R_1] + D[R_2] = 2D[R]. \tag{11}$$

В результате будем иметь:

$$M[X^2] = M^2[X] + 2D[R] = \left(\frac{2(m^2-1)}{3m}\right)^2 + \frac{2(n^2-1)}{12} = \frac{(m^2-1)(11m^2-8)}{18m^2}.$$

Далее определим математическое ожидание произведения случайных величин $R_1 \cdot Y$. В соответствии с правилом умножения и сложения независимых случайных величин получим

$$M[R_1 \times Y] = M[R_1] \times M[Y] = M[R_1] \times M[R_2 + R_3 - R_1] =$$

$$= M[R_1] \times (M[R_2] + M[R_3] - M[R_1]) = M[R] \times M[R] = \frac{(m+1)^2}{4}.$$

Тогда математическое ожидание случайной величины Z будет определяться как

$$M[Z] = M[X^2] + M[R_1 \times Y] = \frac{(m^2-1)(11m^2-8)}{18m^2} + \frac{(m+1)^2}{4}. \tag{12}$$

Определим дисперсию квадрата случайной величины X. При этом следует учитывать, что случайная величина $\dot{X} = R_1 - R_2$ является центрированной, поскольку разность $r_{1j} - r_{2j}$ может принимать целые значения из диапазона от -(m - 1) до (m - 1) с равными вероятностями. Следовательно, $M[\dot{X}] = 0,$ но $D[\dot{X}] = D[X]$. Поэтому с учетом (11) получим:

$$D[X^2] = D^2[X] = \frac{4(m^2-1)^2}{12^2} = \frac{(m^2-1)^2}{36}.$$

Дисперсию произведения случайных величин $R_1 \cdot Y$ можно найти следующим образом [6]:

$$D[R_1 \times Y] = D[R_1] \times D[Y] + M^2[R_1] \times D[Y] + M^2[Y] \times D[R_1] =$$
$$= D[R_1] \times (D[R_2] + D[R_3] + D[R_1]) + M^2[R_1] \times (D[R_2] + D[R_3] + D[R_1]) +$$
$$+ (M[R_2] + M[R_3] - M[R_1])^2 \times D[R_1] = D[R] \times (3D[R] + 4M^2[R]) =$$
$$= \frac{m^2-1}{12}\left[\frac{3(m^2-1)}{12} + 4\left(\frac{m+1}{2}\right)^2\right] = \frac{(m^2-1)(5m^2+8m+3)}{48}.$$

В итоге дисперсия случайной величины Z составит:

$$D[Z] = D\left[\frac{1}{4}X^2\right] + D[R1Y] = \frac{1}{16}D[X2] + D[R1Y] =$$
$$= \frac{(m^2-1)^2}{16 \cdot 36} + \frac{(m^2-1)(5m^2+8m+3)}{48} = \frac{(m^2-1)(61m^2+96m+35)}{12 \cdot 48}. \tag{13}$$

Таким образом, случайная величина Z, которая принимает значения

$$\frac{1}{4}(r_{1j} - r_{2j})^2 + r_{1j}(r_{2j} + r_{3j} - r_{1j});\ j = 1,\ 2,\ \ldots, m,$$

имеет математическое ожидание (12) и дисперсию (13).

Необходимо отметить, что в неравенство (10) входит сумма m значений независимых случайных величин $Z_1, Z_2, \ldots, Z_m$, для которых $M[Z_i] = M[Z]$ и $D[Z_i] = D[Z]$, $i = 1,2,\ldots,m$. Это требует определения характеристик случайной величины $U = \sum_{i=1}^{m} Z_i$.

В соответствии с правилами определения математического ожидания и дисперсии суммы независимых случайных величин получим:

$$M[U] = mM[Z]; \quad D[U] = mD[Z]; \quad s[U] = \sqrt{mD[Z\ ]}.$$

В соответствии с центральной предельной теоремой теории вероятностей уже при $m > 3$ кривая распределения суммы независимых случайных величин по виду напоминает нормальную, а при $m = 6$ будет полностью удовлетворять нормальному закону [6]. Поэтому, если предположить, что случайная величина U удовлетворяет нормальному закону распределения, то можно оценить вероятность появления ее отрицательного значения:

$$P\{U < 0\} = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{u - M[U\ ]}{[U\ ]}\right),$$

где Φ – функция Лапласа; $u = 0$ – значение случайной величины U.

Таким образом, при появлении отрицательного значения $u < 0$ включение очередного эксперта в формируемую группу приводит к увеличению коэффициента групповой ранговой корреляции. Результаты оценочных расчетов, иллюстрирующие этот результат для разных значений m, приведены в таблице 3.

Таблица 3 – Результаты оценочных расчетов вероятности P{U < 0}
Table 3 – The results of P{U < 0} probability estimation

m	M[U]	D[U]	σ[U]	P{U < 0}, %
2	5,25	4,9	2,21	0,89
3	15,3	36,3	6,02	0,53
4	33,7	145,3	12,1	0,25
5	62,3	425	20,6	0,12
6	105	1023	32,1	0,05
7	162	2156	46,4	0,02

Из таблицы 3 видно, что уже при $m = 2$ предположение о том, что включение нового эксперта в группу снижает коэффициент групповой ранговой корреляции, выполняется с вероятностью более 99 %, а при $m \geq 4$ это предположение справедливо с вероятностью 99,75 %, что соответствует правилу трех сигм [6].

На практике это правило будет выполняться и при $m = 3$, так как при выполненном анализе предполагалось, что случайные величины R_1, R_2, R_3 являются независимыми. На самом деле между ними существует сильная связь, а значит, разброс между рангами r_{1j}, r_{2j}, r_{3j}, где $j = 1, 2, \ldots, m$, будет незначительным. Это приводит к тому, что величина дисперсии $D[U]$ существенно сокращается, а вероятность $P\{U < 0\}$ уменьшается.

Пример

Покажем использование предложенного алгоритма на примере анализа согласованности мнений $n = 8$ экспертов при оценке $m = 7$ проектных альтернатив при условии возможности использования связанных рангов. Пусть результаты экспертных оценок представлены следующей матрицей $\mathbf{R} = [r_{ij}]_{8\times7}$:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 & 1{,}5 & 7 & 6 & 1{,}5 \\ 5 & 6 & 2 & 3 & 7 & 4 & 1 \\ 4{,}5 & 4{,}5 & 1{,}5 & 1{,}5 & 6 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 4 & 7 & 1{,}5 & 1{,}5 & 6 \\ 6 & 2 & 4 & 3 & 5 & 1 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 7 & 3 & 4 \\ 6{,}5 & 4{,}5 & 3 & 1 & 6{,}5 & 2 & 4{,}5 \\ 7 & 3 & 4 & 2 & 5 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица коэффициентов ранговой корреляции $\mathbf{P} = [\rho_{kl}]_{8\times8}$, сформированная на втором шаге алгоритма, будет иметь вид:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1{,}00 & 0{,}79 & 0{,}23 & -0{,}91 & -0{,}21 & 0{,}58 & 0{,}50 & 0{,}01 \\ 0{,}79 & 1{,}00 & 0{,}23 & -0{,}54 & -0{,}25 & 0{,}79 & 0{,}54 & 0{,}00 \\ 0{,}23 & 0{,}23 & 1{,}00 & 0{,}23 & 0{,}61 & 0{,}77 & 0{,}75 & 0{,}63 \\ -0{,}91 & -0{,}54 & 0{,}23 & 1{,}00 & 0{,}15 & -0{,}35 & -0{,}38 & -0{,}03 \\ -0{,}21 & -0{,}25 & 0{,}61 & 0{,}15 & 1{,}00 & 0{,}21 & 0{,}63 & 0{,}93 \\ 0{,}58 & 0{,}79 & 0{,}77 & -0{,}35 & 0{,}21 & 1{,}00 & 0{,}80 & 0{,}39 \\ 0{,}50 & 0{,}54 & 0{,}75 & -0{,}38 & 0{,}63 & 0{,}80 & 1{,}00 & 0{,}82 \\ 0{,}01 & 0{,}00 & 0{,}63 & -0{,}03 & 0{,}93 & 0{,}39 & 0{,}82 & 1{,}00 \end{bmatrix}.$$

Итерационная часть алгоритма включает шаги 3 – 8, причем на каждой итерации формируется очередная группа экспертов, имеющих согласованные мнения. Формирование группы M_1 начинается с поиска максимального элемента $\rho_{58} = 0{,}93$ при условии, что диагональные элементы не рассматриваются (шаг 3). Это означает, что мнения экспертов с номерами 5 и 8 наиболее согласованы и они (на шаге 5) включаются в первую группу $M_1 = \{5, 8\}$. Далее для полученной группы экспертов вычисляются средние значения рангов проектных альтернатив (шаг 6), которые представлены в табл. 4.

Таблица 4 – Средние ранги проектных альтернатив для группы экспертов M_1
Table 4 - Average ranks of design alternatives for expert group M_1

Состав группы экспертов M_1	Средние ранги $r_j^{(M_1)}$ проектных альтернатив с индексом j						
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$	$j = 7$
$M_1 = \{5, 8\}$	6,5	2,5	4	2,5	5	1	6,5
$M_1 = \{5, 8, 7\}$	6,50	3,17	3,67	2,00	5,50	1,33	5,83
$M_1 = \{5, 8, 7, 3\}$	6,00	3,50	3,13	1,88	5,63	1,75	6,13

Выбор следующих кандидатов на включение в формируемую группу производится на шаге 7. Для этого определяются эксперты с индексами $t \notin M_1$, для которых $\rho_{tk} > 0{,}7$ и $k \in M_1$. Таким условиям удовлетворяет эксперт с номером 7, так как $\rho_{78} = 0{,}82$. Далее по формуле (5) вычисляется коэффициент групповой корреляции $\rho_{M_1,7} = 0{,}74$. Поскольку его значение больше 0,7 (шаг 8), эксперт с номером 7 включается в группу M_1, т.е. $M_1 = \{5, 8, 7\}$. Новые средние значения рангов проектных альтернатив также показаны в таблице 4.

Повторное выполнение шагов 6 и 7 позволяет добавить в группу M_1 еще одного эксперта с номером 3, так как $\rho_{37} = 0{,}75$ и $\rho_{M_1,3} = 0{,}73$. Это дает новые средние значения рангов проектных альтернатив (таблица 4) для полученной группы экспертов $M_1 = \{5, 8, 7, 3\}$. Следующая попытка (шаг 7) включения эксперта 6, для которого $\rho_{67} = 0{,}8$, в группу M_1 является неудачной, поскольку получаемое при этом значение коэффициент групповой корреляции составит $\rho_{M_1,6} = 0{,}64 < 0{,}7$ (шаг 8).

Таким образом, на первой итерации алгоритма сформирована группа M_1 экспертов, имеющих согласованное мнение, которую составляют специалисты с номерами 5, 8, 7, 3. Уровень согласованности экспертных оценок определяется коэффициентом групповой корреляции $\rho(M_1) = \rho_{M_1,3} = 0{,}73$. Итоговые значения средних рангов проектных альтернатив, а также дисперсии рангов приведены в таблице 5.

Таблица 5 – Средние ранги и дисперсии рангов для группы экспертов M_1
Table 5 – Average ranks and variances of ranks for expert group M_1

Индекс проекта j	1	2	3	4	5	6	7
Средний ранг $r_j^{(M_1)}$	6,00	3,50	3,13	1,88	5,63	1,75	6,13
Дисперсия ранга $r_j^{(M_1)}$	0,88	1,13	1,05	0,55	0,42	0,69	1,05

На второй итерации производится формирование группы M_2. На шаге 3 в матрице **P** отыскивается максимальный элемент ρ_{tj}, такой, что $t \notin M_1$ и $j \neq t$, имеющий значение большее, 0,7 (шаг 5). Выбранный элемент $\rho_{12} = 0{,}79$ определяет состав группы $M_2 = \{1, 2\}$, причем эксперт с индексом $t = 1$ не входит в первую группу M_1. Средние значения рангов проектных альтернатив для группы M_2, вычисленные на шаге 6, представлены в таблице 6.

Таблица 6 – Средние ранги проектных альтернатив для группы экспертов M_2
Table 6 – Average ranks of design alternatives for expert group M_2

Состав группы экспертов M_2	Средние ранги $r_j^{(M_2)}$ проектных альтернатив с индексом j						
	$j = 1$	$j = 2$	$j = 3$	$j = 4$	$j = 5$	$j = 6$	$j = 7$
$M_2 = \{1, 2\}$	5,00	5,00	2,50	2,25	7,00	5,00	1,25
$M_2 = \{1, 2, 6\}$	5,00	5,33	2,00	2,17	7,00	4,33	2,17
$M_2 = \{1, 2, 6, 7\}$	5,38	5,13	2,25	1,88	6,88	3,75	2,75

Дальнейшее выполнение шагов 7 и 8 позволяет добавить в группу эксперта номер 6, для которого $\rho_{62} = 0{,}79 > 0{,}7$ и $\rho_{M_2,6} = 0{,}73 > 0{,}7.$ Результат вычисления (шаг 6) средних рангов проектных альтернатив для полученной группы $M_2 = \{1, 2, 6\}$ приведен в таблице 6.

Следующими кандидатами на включение в группу M_2 являются эксперты с номерами 3 и 7, для которых $\rho_{36} = 0{,}77$ и $\rho_{76} = 0{,}8.$ Найденные по формуле (5) значения $\rho_{M_2,3} = 0{,}5 < 0{,}7$ и $\rho_{M_2,7} = 0{,}7$ показывают, что всем необходимым условиям (шаг 7) удовлетворяет только эксперт с номером 7, а значит, $M_2 = \{1, 2, 6, 7\}$, а полученный коэффициент групповой корреляции $\rho(M_2) = \rho_{M_2,7} = 0{,}7.$ Так как добавление нового эксперта в группу практически всегда уменьшает этот коэффициент, то формирование M_2 на этом завершается.

Таким образом, вторую группу экспертов, имеющих согласованное мнение с показателем $\rho(M_2) = 0{,}7,$ составляют специалисты с номерами 1, 2, 6, 7. Средние ранги проектных альтернатив, а также дисперсии рангов для этой группы экспертов даны в таблице 7.

Таблица 7 – Средние ранги и дисперсии рангов для группы экспертов M_2

Table 7 – Average ranks and variances of ranks for expert group M_2

Индекс проекта j	1	2	3	4	5	6	7
Средний ранг $r_j^{(M_2)}$	5,38	5,13	2,25	1,88	6,88	3,75	2,75
Дисперсия ранга $r_j^{(M_2)}$	0,42	0,80	0,69	0,55	0,05	2,19	2,31

Третья итерация алгоритма завершается после выполнения шагов 3 и 4. Сначала в матрице **P** отыскивается наибольший элемент ρ_{kl}, где $k \notin M_1 \cup M_2$ и $k \neq l$. Таким элементом будет $\rho_{34} = \rho_{43} = 0{,}23$. Индексы элемента ρ_{43} означают (шаг 3) выбор эксперта с номером 4, не вошедшего в сформированные группы M_1 и M_2. Однако величина $\rho_{43} < 0{,}7$ показывает, что мнения экспертов 4 и 3 не согласованы и формирование группы M_3 невозможно. Другими словами, в новую группу можно включить только одного эксперта $M_3 = \{4\}$, что в алгоритме не предусмотрено.

Таким образом, в коллективе из 8 экспертов выделено две группы специалистов, номера которых определяются множествами $M_1 = \{5, 8, 7, 3\}$ и $M_2 = \{1, 2, 6, 7\}$. Они содержат одинаковое число экспертов, причем номер 7 входит одновременно в две группы. Коэффициент групповой корреляции для первой группы несколько выше и составляет $\rho(M_1) = 0{,}73$ против $\rho(M_2) = 0{,}70$ для второй группы. Следовательно, мнения экспертов первой группы более согласованы, что позволяет использовать их средние ранги альтернатив (таблица 5) для выбора и анализа лучших проектных решений. Такими являются: проект с номером 6, имеющий средний ранг 1,75 с разбросом (дисперсией) 0,69; проект с номером 4, для которого итоговый ранг равен 1,88 с дисперсией 0,55.

Следует отметить, что проект 4 в числе лучших выбрала и вторая группа экспертов (таблица 7). Кроме того, мнение эксперта с индексом 4, который мог бы входить в третью группу, не согласуется с мнением других специалистов.

Заключение

Разработан и обоснован подход к выявлению групп экспертов, имеющих наиболее согласованное мнение относительно эффективности проектных альтернатив при использовании метода ранжирования со связанными рангами. Для статистической оценки уровня согласованности мнений экспертов в таких группах предложено использовать коэффициент групповой ранговой корреляции, который позволяет количественно определить корреляционную зависимость между мнением отдельного эксперта и групповым решением. Для практического использования предложенного подхода разработан итерационный алгоритм выделения указанных групп экспертов на основе матрицы ранговой корреляции, который позволяет автоматизировать поиск согласованного группового экспертного мнения в системах поддержки принятия решений. Полученные результаты также могут применяться для оценки важности частных критериев качества при решении многокритериальных задач оптимизации и оптимального проектирования [10].

Библиографический список

1. **Норенков И. П.** Основы автоматизированного проектирования. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. 336 с.
2. **Бешелев С. Д., Гурвич Ф. Г.** Математико-статистические методы экспертных оценок. М.: Статистика, 1980. 263 с.
3. **Орлов А. И.** Организационно-экономическое моделирование: теория принятия решений. М.: КНОРУС, 2017. 568 с.
4. **Кремер Н. Ш., Путко Б. А.** Эконометрика / под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Юнити-Дана, 2010.
5. **Айвазян С. А., Мхитарян В. С.** Теория вероятностей и прикладная статистика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. 656 с.
6. **Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.** Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1988. 480 с.
7. **Паклин Н. Б., Орешков В. И.** Бизнес-аналитика: от данных к знаниям. СПб.: Питер, 2010. 704 с.
8. **Дубов А. М., Мхитарян В. С., Трошин Л. И.** Многомерные статистические методы. М.: Финансы и статистика, 2003. 352 с.
9. **Скворцов С. В., Хрюкин В. И.** Анализ экспертных оценок проектов на основе коэффициентов ранговой корреляции // Современные технологии в науке и образовании – СТНО-2018: сб. тр. международного научно-технического форума: в 10 т. Т. 4. Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2018. С. 181-184.
10. **Батищев Д. И.** Методы оптимального проектирования. М.: Радио и связь, 1984. 248 с.

UDC 004.023

CONSISTENCY ANALYSIS OF SPECIALIST VIEWS UNDER CONDITIONS OF CONTRADICTORY EXPERT ESTIMATES OF PROJECT ALTERNATIVES

S. V. Skvortsov, Dr. in technical sciences, full professor, RSREU, Ryazan, Russia;
orcid.org/0000-0001-9495-4953, e-mail: s.v.skvor@gmail.com
V. I. Khryukin, Ph.D. (in technical sciences), associate professor, RSREU, Ryazan, Russia;
orcid.org/0000-0002-7736-115X, e-mail: vi_x@mail.ru
T. S. Skvortsova, Ph.D. (in technical sciences), lecturer, Academy of the FPS of Russia, Ryazan, Russia;
orcid.org/0000-0001-7504-5973, e-mail: t.s.skvortsova@yandex.ru

The task of identifying groups of specialists with agreed views on the effectiveness of project alternatives for a ranking method with the possibility of using related ranks is considered. The limitations of known methods of correlation and cluster analysis for solving this problem in the conditions of contradictory expert estimates are shown. The aim of this work is to develop and substantiate the approach to analyze the consistency of expert estimates with the ambiguity of the opinions of specialists, based on group rank correlation usage. Quantitative indicators for consistency of expert group views are proposed. An iterative algorithm to find acceptable options for distributing experts by group has been developed, which allows you to automate the search for agreed expert opinion in decision support systems.

Key words: *expert estimates, Spearman correlation coefficient, concordance coefficient, cluster analysis, project alternatives ranking, related ranks, expert groups, estimates consistency, decision support systems.*

DOI: 10.21667/1995-4565-2021-76-53-64

References

1. **Norenkov I. P.** *Osnovy avtomatizirovannogo proektirovanija*. (Computer-aided design basics), Moscow, MGTU imeni N. Je. Baumana. 2002, 336 p. (in Russian).

2. **Beshelev S. D., Gurvich F. G.** *Matematiko-statisticheskie metody jekspertnyh ocenok.* (Mathematical and statistical methods of expert estimates). Moscow: Statistika. 1980, 263 p. (in Russian).

3. **Orlov A. I.** *Organizacionno-jekonomicheskoe modelirovanie: teorija prinjatija reshenij*. (Organizational and economic modeling: decision-making theory). Moscow: KNORUS, 2017. 568 p. (in Russian).

4. **Kremer N. Sh., Putko B. A.** *Jekonometrika*. (Econometrics). Moscow: JUNITI-DANA. 2002. 311 p. (in Russian).

5. **Ajvazjan S. A., Mhitarjan V. S.** *Teorija verojatnostej i prikladnaja statistika*. (Probability theory and applied statistics). Moscow: JUNITI-DANA. 2001. 656 p. (in Russian).

6. **Ventcel' E. S., Ovcharov L. A.** *Teorija verojatnostej i ee inzhenernye prilozhenija*. (Probability theory and its engineering applications). Moscow: Nauka, 1988, 480 p. (in Russian).

7. **Paklin N. B., Oreshkov V. I.** *Biznes-analitika: ot dannyh k znanijam*. (Business analytics: from data to knowledge). St. Petersburg: Piter. 2010. 704 p. (in Russian).

8. **Dubov A. M., Mhitarjan V. S., Troshin L. I.** *Mnogomernye statisticheskie metody*. (Multivariate statistical methods). Moscow: Finansy i statistika. 2003, 352 p. (in Russian).

9. **Skvortsov S. V., Khryukin V. I.** Analiz jekspertnyh ocenok proektov na osnove kojefficientov rangovoj korreljacii. *Sovremennye tehnologii v nauke i obrazovanii – STNO-2018: sbornik trudov mezhdunarodnogo nauchno-tehnicheskogo foruma*, vol. 4. Ryazan, RGRTU. 2018, pp. 181-184. (in Russian).

10. **Batishhev D. I.** *Metody optimal'nogo proektirovanija*. (Optimal Design Methods). Moscow, Radio i svjaz'. 1984, 248 p. (in Russian).