

УДК 519.766.2

БЫСТРЫЙ РАСЧЕТ ИНДЕКСОВ НЕЧЕТКОСТИ КОНСЕКВЕНТОВ ИМПЛИКАЦИИ МАМДАНИ И ПОСЛЕДУЮЩЕГО ИХ ОБЪЕДИНЕНИЯ

К. В. Бухенский, к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой ВМ РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0003-2602-2112, e-mail: bukhensky.k.v@rsreu.ru

А. Н. Конохов, к.п.н., доцент кафедры ВМ РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0002-1523-7110, e-mail: chronos@bk.ru

К. В. Анисимов, студент четвертого курса факультета ВТ РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0001-8889-0818, e-mail: k.anisimov29@yandex.ru

Цель работы: 1) получить аналитическую формулу для расчета индекса нечеткости (ИН) консеквента импликации (правила) Мамдани; 2) вывести аналитическую формулу для расчета ИН нечеткого множества (НМ), полученного в результате объединения произвольного числа субнормальных консеквентов импликации Мамдани. Работа развивает ранее выполненные исследования в рамках проекта «Трансформации нечеткости в системах нечеткого вывода». В качестве меры математической нечеткости НМ использован ИН Ягера с линейной метрикой Хэмминга. Получены аналитические выражения для интегральных функций индекса нечеткости некоторых функций формы (ИФИН ФФ) нечетких чисел (НЧ) LR-типа, позволяющие рассчитывать ИН НМ, получаемых в результате логических операций над НЧ. Приведены как общие расчетные формулы, так и частные для НЧ LR-типа с функциями формы «линейная» и «усеченная парабола». Проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие корректность теоретических выводов. Полученные формулы позволяют рассчитывать ИН на этапах нечеткого вывода Мамдани и последующего объединения консеквентов, не прибегая к интегрированию, что существенно сокращает время расчетов. Полученные формулы допускают анализ на предмет оптимизации вывода типа Мамдани с точки зрения нечеткости.

Ключевые слова: нечеткое множество, нечеткое число LR-типа, функция принадлежности, функция формы, индекс нечеткости, интегральная функция индекса нечеткости, антецедент, консеквент, импликация Мамдани, терм лингвистической переменной, фактор перекрытия.

DOI: 10.21667/1995-4565-2021-78-75-88

Введение

Данная статья освещает очередные промежуточные результаты исследований в рамках проекта «Трансформации нечеткости в системах нечеткого вывода (FIS)» [1-5], основная цель которого – совершенствование математического обеспечения нечетко-логического управления.

Ключевую роль в системах нечеткого вывода (FIS) играют логические операции (нечеткие отрицание, пересечение, объединение, импликация) над антецедентами, задаваемыми первоначально в виде нечетких чисел (НЧ) и нечетких интервалов, допускающих LR-представление [6, 7]. Однако после применения указанных операций, например, пересечения с использованием различных T-норм или в результате нечеткой импликации, образуются субнормальные, а также невыпуклые нечеткие множества (НМ). Особенности формульно-аналитического представления индексов нечеткости (ИН) таких НМ обсуждаются в данной статье.

Теоретическая часть

Обозначения и определения

1. $\tilde{A} = \{ \langle x \in U, \mu_{\tilde{A}}(x) > 0 \mid 0 < \mu_{\tilde{A}}(x) \leq 1 \}$ – нечеткое подмножество \tilde{A} универсального множества U , где $\mu_{\tilde{A}}(x)$ – функция принадлежности (ФП) элемента x множеству \tilde{A} .

2. ФП нечеткого числа LR-типа (в том числе, нечеткого интервала – полимодального НЧ):

$$\mu_{LR}(x) = [m_1, m_2, ls, rs]_{LR}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m_1 - x}{ls}\right), & \text{если } m_1 - ls \leq x < m_1, \\ 1, & \text{если } m_1 \leq x \leq m_2, \\ R\left(\frac{x - m_2}{rs}\right), & \text{если } m_2 < x \leq m_2 + rs, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (1)$$

где $m_1 \leq x \leq m_2$ – ядро НЧ; $ls > 0$ и $rs > 0$ – левый и правый спрэды НЧ; $L(t), R(t): [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ – левая и правая функции формы (ФФ), т.е. непрерывные убывающие функции, такие что $R(0) = L(0) = 1$ и $R(1) = L(1) = 0$, [7]. Запись $f(t) \in F[0, 1]$ означает, что $f(t)$ является ФФ на отрезке $[0, 1]$. При $m_1 = m_2 = m$ получается унимодальное НЧ.

3. Нечеткая импликация (правило) Мамдани – это нечеткое отношение вида

$$\tilde{\mathcal{R}}_M(x, y) = \min_{X \times Y} \{\mu_{\tilde{u}}(x), \mu_{\tilde{v}}(y)\} = \tilde{u}(x) \wedge \tilde{v}(y), \quad (2)$$

где $x \in X, y \in Y$; $\tilde{u}(x) = [m_{1u}, m_{2u}, ls_u, rs_u]_{L_u, R_u}(x)$, – антецедент, $\tilde{v}(y) = [m_{1v}, m_{2v}, ls_v, rs_v]_{L_v, R_v}(y)$ – консеквент импликации. Примечание: для упрощения записей будем отождествлять символы НЧ и его ФП, например $\tilde{u}(x)$ и $\mu_{\tilde{u}}(x)$, а индекс M – опускать.

4. Индекс нечеткости Ягера с линейной метрикой Хэмминга НМ \tilde{A} с непрерывной на носителе (a, b) функцией принадлежности $\mu_{\tilde{A}}(x)$ [8]:

$$if_{\tilde{A}} = 1 - \frac{1}{b-a} \int_a^b |2\mu_{\tilde{A}}(x) - 1| dx. \quad (3)$$

Результаты теоретического исследования

1. Для целей исследования введем интегральную функцию индекса нечеткости НМ, порождаемого функцией формы $F(t) \in F[0, 1]$, (ИФИН ФФ), взяв (3) за основу:

$$Iif_F(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{1-x} \int_x^1 |2F(t) - 1| dt, & 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{при } x = 1. \end{cases} \quad (4)$$

Значение данной функции при $0 \leq x \leq 1$ является индексом нечеткости НМ \tilde{Z} с ФП

$$\mu_{\tilde{Z}}(t) = \begin{cases} F(t), & \text{если } x \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (5)$$

Из (4) следует, что $Iif_F(0) = 1 - \frac{1}{1} \int_0^1 |2F(t) - 1| dt = if_F$, т.е. равно значению ИН ФФ $F(t)$.

Исследуем $Iif_F(x)$ на монотонность. Дифференцируя (4), получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} Iif_F(x) &= \frac{1}{1-x} |2F(x) - 1| - \frac{1}{(1-x)^2} \int_x^1 |2F(t) - 1| dt, \\ \frac{d}{dx} Iif_F(x) < 0 &\Leftrightarrow |2F(x) - 1| < \frac{1}{1-x} \int_x^1 |2F(t) - 1| dt. \end{aligned} \quad (6)$$

Сначала рассмотрим (6) при $tp_F \leq x < 1$, где $0 < tp_F < 1$ – точка перехода ФФ $F(t)$, т.е. такая, что $F(tp_F) = 1/2$. Тогда

$$\frac{d}{dx} Iif_F(x) < 0 \Leftrightarrow 1 - 2F(x) < \frac{1}{1-x} \int_x^1 (1 - 2F(t)) dt, \tag{7}$$

что справедливо в силу возрастания функции $1 - 2F(x)$ на всем промежутке интегрирования. Т.е. после точки перехода включительно (при $tp_F \leq x < 1$) ИФИН ФФ $F(t)$ строго убывает.

При $0 \leq x < tp_F$ преобразуем (4), а затем продифференцируем:

$$Iif_F(x) = 1 - \frac{1}{1-x} \left(\int_x^{tp_F} (2F(t) - 1) dt - \int_{tp_F}^1 (2F(t) - 1) dt \right), \tag{8}$$

$$\frac{d}{dx} Iif_F(x) = -\frac{1}{(1-x)^2} \left(\int_x^{tp_F} (2F(t) - 1) dt - \int_{tp_F}^1 (2F(t) - 1) dt \right) + \frac{1}{1-x} (2F(x) - 1).$$

Применяем к (8) необходимое условие экстремума:

$$\frac{d}{dx} Iif_F(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{(1-x)^2} \left(\int_x^{tp_F} (2F(t) - 1) dt - \int_{tp_F}^1 (2F(t) - 1) dt \right) + \frac{1}{1-x} (2F(x) - 1) = 0. \tag{9}$$

Преобразуя (9), получим

$$(2F(x) - 1) - \frac{1}{1-x} \int_x^{tp_F} (2F(t) - 1) dt + \frac{1}{1-x} \int_{tp_F}^1 (2F(t) - 1) dt = 0. \tag{10}$$

Исследуем уравнение (10) на предмет наличия корней на промежутке $0 < x < tp_F$. Так, левая часть (10) при $x = 0$ равна

$$2 \int_0^{tp_F} (1 - F(t)) dt + 2 \int_{tp_F}^1 F(t) dt > 0, \tag{11}$$

а при $x = tp_F$

$$\frac{1}{1 - tp_F} \int_{tp_F}^1 (2F(t) - 1) dt < 0. \tag{12}$$

Таким образом, на промежутке $0 < x < tp_F$ существует по меньшей мере один действительный корень. И если он единственный, то это максимум.

Вывести аналитическое выражение для ИФИН ФФ в наиболее распространенных случаях не представляет труда. Так, например, для линейной ФФ $F_{lin}(t) = 1 - t$ получим

$$Iif_F^{lin}(x) = \begin{cases} \frac{1 - 2x^2}{2(1-x)}, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - x, & \text{если } \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases} \tag{13}$$

Для ФФ типа «усеченная парабола» $F_{cp}(t) = 1 - t^2$ имеем

$$Iif_F^{cp}(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} \cdot \frac{2 - \sqrt{2} - x^3}{1-x}, & \text{если } 0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \frac{2}{3} (1-x)(2+x), & \text{если } \frac{1}{\sqrt{2}} < x \leq 1. \end{cases} \tag{14}$$

Для дальнейших преобразований нам удобнее выразить ИФИН ФФ (4) через $\alpha = F(x)$:

$$Iif_F(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha = 0, \\ 1 - \frac{1}{1 - F^{-1}(\alpha)} \int_{F^{-1}(\alpha)}^1 |2F(t) - 1| dt, & \text{если } 0 < \alpha \leq 1, \end{cases} \tag{15}$$

или, что то же

$$Iif_F(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha = 0, \\ 1 - \frac{1}{1 - F^{-1}(\alpha)} \int_0^{1 - F^{-1}(\alpha)} |2F(1-t) - 1| dt, & \text{если } 0 < \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (16)$$

Выражение для функции (15) получается формальной заменой переменной x на $F^{-1}(\alpha)$ в выражении для $Iif_F(x)$. Так, например, для линейной ФФ $F_{lin}^{-1}(\alpha) = 1 - \alpha$ и ФФ типа «усеченная парабола» $F_{cp}^{-1}(\alpha) = \sqrt{1 - \alpha}$, имеем из (13) и (14) соответственно

$$Iif_F^{lin}(\alpha) = \begin{cases} \alpha, & \text{при } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - \alpha - \frac{1}{2\alpha}, & \text{при } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1, \end{cases} \quad (17)$$

$$Iif_F^{cp}(\alpha) = \begin{cases} \frac{2}{3}(1 + \alpha - \sqrt{1 - \alpha}), & \text{если } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{2 - \sqrt{2} - (1 - \alpha)^{\frac{3}{2}}}{1 - \sqrt{1 - \alpha}}, & \text{если } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (18)$$

Теперь может быть решена задача нахождения ИН унимодального субнормального НМ, полученного в результате пересечения НЧ LR-типа.

2. Рассмотрим операцию пересечения двух унимодальных НЧ LR-типа \tilde{u} и \tilde{v} , описываемых ФП (1): $\tilde{u}(x) = [m_u, ls_u, rs_u]_{L_u R_u}(x)$ и $\tilde{v}(x) = [m_v, ls_v, rs_v]_{L_v R_v}(x)$. Кроме того потребуем, чтобы $(m_v > m_u) \wedge (m_v - ls_v > m_u - ls_u) \wedge (m_v + rs_v > m_u + rs_u)$. Это означает, что в пересечении участвуют только правая ветвь НЧ $\tilde{u}(x)$ и левая ветвь НЧ $\tilde{v}(x)$. Также предполагаем, что точка пересечения единственная, как это имеет место в системах нечеткого вывода.

В качестве оператора пересечения возьмем Т-норму Заде: $\tilde{u}(x) \wedge \tilde{v}(x) = \min\{\mu_{\tilde{u}}(x), \mu_{\tilde{v}}(x)\}$.

Индекс нечеткости каждого из операндов определяется по взвешенной формуле [2]:

$$if_{\tilde{u}} = \frac{if_{L_u} ls_u + if_{R_u} rs_u}{ls_u + rs_u}; \quad if_{\tilde{v}} = \frac{if_{L_v} ls_v + if_{R_v} rs_v}{ls_v + rs_v}, \quad (19)$$

где if_{L_u} – ИН левой ФФ числа \tilde{u} и т.д.

Результатом пересечения будет в общем случае субнормальное НМ $\tilde{W}(x) = \tilde{u}(x) \wedge \tilde{v}(x)$ высотой $height(\tilde{W}(x)) = \alpha_c$, ($0 < \alpha_c \leq 1$). Случай $\alpha_c = 0$ является тривиальным и не представляет интереса, так как очевидно, что при этом $if(\tilde{W}) = if(\emptyset) = 0$.

Абсцисса x_c точки пересечения правой ветви $\tilde{u}(x)$ и левой ветви $\tilde{v}(x)$ равна

$$x_c = m_u + rs_u R_u^{-1}(\alpha_c) = m_v - ls_v L_v^{-1}(\alpha_c). \quad (20)$$

Получается унимодальное субнормальное НМ с функцией принадлежности

$$\tilde{W}(x) = \tilde{u}(x) \wedge \tilde{v}(x) = \begin{cases} L_v \left(\frac{m_v - x}{ls_v} \right), & \text{если } m_v - ls_v \leq x \leq x_c, \\ R_u \left(\frac{x - m_u}{rs_u} \right), & \text{если } x_c < x \leq m_u + rs_u, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (21)$$

Тогда в силу взвешенной формулы расчета ИН [3,4] имеем

$$if_{\tilde{W}} = Iif_{L_u}(\alpha_c) ls_{\tilde{W}}^*(\alpha_c) + Iif_{R_u}(\alpha_c) rs_{\tilde{W}}^*(\alpha_c), \quad (22)$$

где $ls_{\tilde{W}}^*(\alpha_c)$, $rs_{\tilde{W}}^*(\alpha_c)$ – приведенные спрэды НМ \tilde{W} , равные в соответствии с (20) и (21)

$$ls_{\tilde{W}}^*(\alpha_c) = \frac{ls_v(1-L_v^{-1}(\alpha_c))}{m_u + rs_u - m_v + ls_v}; \quad rs_{\tilde{W}}^*(\alpha_c) = \frac{rs_u(1-R_u^{-1}(\alpha_c))}{m_u + rs_u - m_v + ls_v}, \quad (23)$$

причем, как легко убедиться, $ls_{\tilde{W}}^*(\alpha_c) + rs_{\tilde{W}}^*(\alpha_c) = 1$ при любых $0 < \alpha_c \leq 1$.

Формулы (22), (23) позволяют быстро найти результат, не прибегая к интегрированию.

В «одноклассовом» случае, т.е. когда $L_v(t) \equiv R_u(t) \equiv F(t)$, (22) упрощается до

$$if_{\tilde{W}} = If_F(\alpha_c). \quad (24)$$

Так, взяв линейную ФФ, получим

$$if_{\tilde{W}}^{lin}(\alpha_c) = \begin{cases} \alpha_c, & \text{если } 0 \leq \alpha_c \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - \alpha_c - \frac{1}{2\alpha_c}, & \text{если } \frac{1}{2} < \alpha_c \leq 1. \end{cases} \quad (25)$$

В случае ФФ типа «усеченная парабола»:

$$If_{\tilde{W}}^{cp}(\alpha_c) = \begin{cases} \frac{2}{3}(1 + \alpha_c - \sqrt{1 - \alpha_c}), & \text{если } 0 \leq \alpha_c \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{2 - \sqrt{2} - (1 - \alpha_c)^{\frac{3}{2}}}{1 - \sqrt{1 - \alpha_c}}, & \text{если } \frac{1}{2} < \alpha_c \leq 1. \end{cases} \quad (26)$$

Введем количественную меру (фактор) перекрытия соседних унимодальных НЧ LR-типа:

$$f_c \stackrel{def}{=} 1 - \frac{m_v - m_u}{ls_v + rs_u}, \quad 0 \leq f_c \leq 1. \quad (27)$$

Заметим также, что для «одноклассового» случая очень просто найти точку пересечения x_c левой ветви $\tilde{y}(x)$ и правой ветви $\tilde{v}(x)$. Действительно, в соответствии с (21) имеем

$$\begin{cases} x_c = m_u + rs_u F^{-1}(\alpha_c) \\ x_c = m_v - ls_v F^{-1}(\alpha_c) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F^{-1}(\alpha_c) = \frac{m_v - m_u}{ls_v + rs_u} \\ x_c = m_v - ls_v \frac{m_v - m_u}{ls_v + rs_u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_c = F\left(\frac{m_v - m_u}{ls_v + rs_u}\right) \\ x_c = \frac{m_u ls_v + m_v rs_u}{ls_v + rs_u}. \end{cases} \quad (28)$$

В случае линейных ФФ (28) дает

$$\alpha_c = 1 - \frac{m_v - m_u}{ls_v + rs_u} = f_c \quad (29)$$

и формула (25) принимает вид

$$if_{\tilde{W}}^{lin}(f_c) = \begin{cases} f_c, & \text{если } 0 \leq f_c \leq \frac{1}{2}, \\ 2 - f_c - \frac{1}{2f_c}, & \text{если } \frac{1}{2} < f_c \leq 1, \end{cases} \quad (30)$$

а в случае ФФ типа «усеченная парабола» $\sqrt{1 - \alpha} = 1 - f_c \Leftrightarrow \alpha = 1 - (1 - f_c)^2$:

$$if_{\tilde{W}}(f_c) = \begin{cases} \frac{2}{3} f_c (3 - f_c), & \text{если } 0 \leq f_c \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{2 - \sqrt{2} - (1 - f_c)^3}{f_c}, & \text{если } 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < f_c \leq 1. \end{cases} \quad (31)$$

Выведенные в разделах 1, 2 соотношения позволят нам решить аналитически задачу нахождения индекса нечеткости консеквента в результате нечеткой импликации Мамдани и последующей процедуры объединения консеквентов.

3. Реализуем импликацию Мамдани для антецедента $\tilde{u}_1(x)$, заданного на универсуме X :

$$\tilde{V}_1(y) = \bigvee_{x \in X} \tilde{u}_1(x) \wedge \tilde{\mathcal{R}}(x, y) = \bigvee_{x \in X} \tilde{u}_1(x) \wedge (\tilde{u}(x) \wedge \tilde{v}(y)), \quad (32)$$

где знак \wedge понимаем в смысле Т-нормы \min , а знак \vee в смысле Т-конормы \max ; $\tilde{\mathcal{R}}(x, y) = \tilde{u}(x) \wedge \tilde{v}(y)$ – импликация Мамдани, т.е. нечеткое отношение между $\tilde{u}(x)$ и $\tilde{v}(y)$; $\tilde{V}_1(y)$ – консеквент, соответствующий произвольному антецеденту $\tilde{u}_1(x)$.

В силу ассоциативности Т-нормы можно переписать (32) в виде

$$\tilde{V}_1(y) = \bigvee_{x \in X} (\tilde{u}_1(x) \wedge \tilde{u}(x)) \wedge \tilde{v}(y) = \begin{cases} \tilde{v}(y), & \text{если } \text{core } \tilde{u}_1(x) \cap \text{core } \tilde{u}(x) \neq \emptyset, \\ \alpha \wedge \tilde{v}(y), & \text{иначе,} \end{cases} \quad (33)$$

где $\alpha = \bigvee_{x \in X} (\tilde{u}_1(x) \wedge \tilde{u}(x))$ – степень выполнения правила Мамдани для антецедента $\tilde{u}_1(x)$.

Первый случай (33) тривиальный: $(\tilde{V}_1 = \tilde{v}) \Rightarrow (if(\tilde{V}_1) = if(\tilde{v}))$. Второй случай дает

$$\alpha = \max_{x_j: \tilde{u}(x_j) = \tilde{u}_1(x_j)} \{\tilde{u}(x_j)\}. \quad (34)$$

Для унимодальных НЧ LR-типа $\tilde{u} = [m_u, ls_u, rs_u]_{L_u R_u}$ и $\tilde{u}_1 = [m_{u_1}, ls_{u_1}, rs_{u_1}]_{L_{u_1} R_{u_1}}$ при $m_u \neq m_{u_1}$

$$\alpha = \max_{x_j: \tilde{u}(x_j) = \tilde{u}_1(x_j)} \{\tilde{u}(x_j)\} < 1 \quad (35)$$

и нечеткий консеквент уже не НЧ, а субнормальное НМ вида

$$\tilde{V}_1(y) = \begin{cases} L_v \left(\frac{m_v - y}{ls_v} \right), & \text{если } m_v - ls_v \leq y \leq m_v - ls_v L_v^{-1}(\alpha), \\ \alpha, & \text{если } m_v - ls_v L_v^{-1}(\alpha) < y \leq m_v + rs_v R_v^{-1}(\alpha), \\ R_v \left(\frac{y - m_v}{rs_v} \right), & \text{если } m_v + rs_v R_v^{-1}(\alpha) < y \leq m_v + rs_v, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (36)$$

Тогда в соответствии со взвешенным способом расчета ИН консеквента $\tilde{V}_1(y)$

$$if_{\tilde{V}_1}(\alpha) = If_{L_v}(\alpha) ls_{\tilde{V}_1}^*(\alpha) + (1 - |2\alpha - 1|) cs_{\tilde{V}_1}^*(\alpha) + If_{R_v}(\alpha) rs_{\tilde{V}_1}^*(\alpha), \quad (37)$$

где $ls_{\tilde{V}_1}^*(\alpha)$, $cs_{\tilde{V}_1}^*(\alpha)$, $rs_{\tilde{V}_1}^*(\alpha)$ – соответственно левый, центральный и правый приведенные спрэды НМ $\tilde{V}_1(y)$, которые согласно (36) равны

$$ls_{\tilde{V}_1}^*(\alpha) = \frac{ls_v (1 - L_v^{-1}(\alpha))}{ls_v + rs_v}, \quad cs_{\tilde{V}_1}^*(\alpha) = \frac{rs_v R_v^{-1}(\alpha) + ls_v L_v^{-1}(\alpha)}{ls_v + rs_v}, \quad rs_{\tilde{V}_1}^*(\alpha) = \frac{rs_v (1 - R_v^{-1}(\alpha))}{ls_v + rs_v}. \quad (38)$$

Рассмотрим наиболее распространенный на практике «одноклассовый» случай $L_v(t) \equiv R_v(t) \equiv F(t)$. Тогда (37) преобразуется в

$$if_{\tilde{V}_1}(\alpha) = If_F(\alpha) (1 - F^{-1}(\alpha)) + (1 - |2\alpha - 1|) F^{-1}(\alpha). \quad (39)$$

Так, для линейной ФФ результатом (39) будет

$$if_{\tilde{V}_1}^{lin}(\alpha) = \alpha If_{lin}(\alpha) + (1 - \alpha) (1 - |2\alpha - 1|) = \begin{cases} \alpha(2 - \alpha), & \text{если } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \\ (\alpha - 1)^2 + \frac{1}{2}, & \text{если } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1, \end{cases} \quad (40)$$

а для ФФ типа «усеченная парабола»

$$if_{\tilde{V}_1}^{cp} = (1 - \sqrt{1 - \alpha}) If_{cp}(\alpha) + \sqrt{1 - \alpha} (1 - |2\alpha - 1|) = \begin{cases} \frac{4}{3} \left(1 - (1 - \alpha)^{\frac{3}{2}} \right), & \text{если } 0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + (1 - \alpha)^{\frac{3}{2}} \right), & \text{если } \frac{1}{2} < \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (41)$$

4. Исследуем операцию объединения субнормальных консеквентов импликации Мамдани, т.е. НМ вида (36). Используем T-конорму max. Результат операции в общем случае – субнормальное невыпуклое НМ. Сначала объединим два НМ – два различных консеквента $\tilde{V}_1(y)$ и $\tilde{V}_2(y)$, а затем распространим результат на произвольное количество операндов.

Следуя рисунку 1 а, запишем по определению индекс нечеткости агрегата в самом общем случае, т.е. когда $\tilde{V}_1(y) \vee \tilde{V}_2(y)$ – полимодальное НМ:

$$if_{\tilde{V}_1 \vee \tilde{V}_2} = 1 - \frac{1}{d - a} \left[\int_a^b |2\mu_{\tilde{V}_1}(y) - 1| dy + \int_c^d |2\mu_{\tilde{V}_2}(y) - 1| dy - \int_c^e |2\mu_{\tilde{V}_2}(y) - 1| dy - \int_e^f |2\alpha_1 - 1| dy - \int_f^b |2\mu_{\tilde{V}_1}(y) - 1| dy \right]. \quad (42)$$

Заметим, что формула (42) описывает также и ситуацию, показанную на рисунке 1, б при $e = f$.

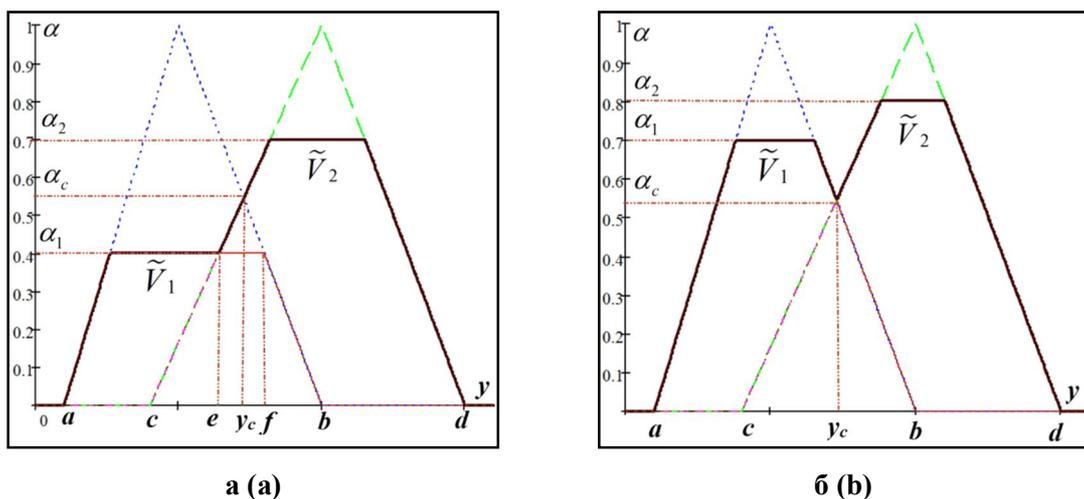


Рисунок 1 – К выводу формулы (45) индекса нечеткости агрегата из двух консеквентов \tilde{V}_1, \tilde{V}_2 (сплошная линия): а – случай $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\} < \alpha_c$; б – случай $\alpha_c \leq \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$

Figure 1 – On derivation formula (45) of fuzziness index of two consequents \tilde{V}_1, \tilde{V}_2 aggregate (solid line): а – case $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\} < \alpha_c$; б – case $\alpha_c \leq \min\{\alpha_1, \alpha_2\}$

Перепишем (42) через ИН операндов:

$$if_{\tilde{V}_1 \vee \tilde{V}_2} = 1 - \frac{1}{d - a} \left[(1 - if_{\tilde{V}_1})(b - a) + (1 - if_{\tilde{V}_2})(d - c) - (1 - if_{\tilde{V}_1 \wedge \tilde{V}_2})(b - c) \right] = if_{\tilde{V}_1} \frac{b - a}{d - a} + if_{\tilde{V}_2} \frac{d - c}{d - a} - if_{\tilde{V}_1 \wedge \tilde{V}_2} \frac{b - c}{d - a}, \quad (43)$$

или в терминах приведенных длин носителей

$$if_{\tilde{V}_1 \vee \tilde{V}_2} = if_{\tilde{V}_1} \left| \text{supp}(\tilde{V}_1) \right|^* + if_{\tilde{V}_2} \left| \text{supp}(\tilde{V}_2) \right|^* - if_{\tilde{V}_1 \wedge \tilde{V}_2} \left| \text{supp}(\tilde{V}_1 \wedge \tilde{V}_2) \right|^*, \quad (44)$$

где $if_{\tilde{V}_1}$ и $if_{\tilde{V}_2}$ определяются через ИФИН ФФ в соответствии с (37).

Рассмотрим «одноклассовый» случай – операнды $\tilde{V}_1(y)$ и $\tilde{V}_2(y)$ одного типа, имеющие ФФ $F(t)$. Имеем из (44) и (39)

$$if_{\tilde{V}_1 \vee \tilde{V}_2} = \left| \text{supp}(\tilde{V}_1) \right|^* \left(If_F(\alpha_1)(1 - F^{-1}(\alpha_1)) + (1 - |2\alpha_1 - 1|)F^{-1}(\alpha_1) \right) + \\ + \left| \text{supp}(\tilde{V}_2) \right|^* \left(If_F(\alpha_2)(1 - F^{-1}(\alpha_2)) + (1 - |2\alpha_2 - 1|)F^{-1}(\alpha_2) \right) - if_{\tilde{V}_1 \wedge \tilde{V}_2} \left| \text{supp}(\tilde{V}_1 \wedge \tilde{V}_2) \right|^* . \quad (45)$$

Осталось исследовать последний член формулы (45), содержащий ИН пересечения термов $if_{\tilde{V}_1 \wedge \tilde{V}_2}$. ИН $if_{\tilde{V}_1 \wedge \tilde{V}_2}$ должен рассчитываться для субнормального НМ (уни- или полиморфного). Здесь имеются два варианта. Как видно из рисунка 1 при $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\} < \alpha_c$

$$\frac{|ef|}{|bc|} = \frac{m_1 - m_2 + F^{-1}(\alpha)(rs_1 + ls_2)}{m_1 - m_2 + rs_1 + ls_2} = \frac{\frac{m_1 - m_2}{rs_1 + ls_2} + F^{-1}(\alpha)}{1 + \frac{m_1 - m_2}{rs_1 + ls_2}} = \frac{f_c - 1 + F^{-1}(\alpha)}{f_c} = 1 - \frac{1 - F^{-1}(\alpha)}{f_c}. \quad (46)$$

Вновь, используя взвешенный подход, получим при $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\} < \alpha_c$

$$if_{\tilde{V}_1 \wedge \tilde{V}_2} = \frac{|ef|}{|bc|} (1 - |2\alpha - 1|) + \left(1 - \frac{|ef|}{|bc|} \right) If_F(\alpha) = \\ = \left(1 - \frac{1 - F^{-1}(\alpha)}{f_c} \right) (1 - |2\alpha - 1|) + \frac{1 - F^{-1}(\alpha)}{f_c} If_F(\alpha), \quad \alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\}. \quad (47)$$

Если же $\min\{\alpha_1, \alpha_2\} \geq \alpha_c$, то ИН пересечения

$$if_{\tilde{V}_1 \wedge \tilde{V}_2} = If_F(\alpha_c), \quad \alpha_c \leq \min\{\alpha_1, \alpha_2\}. \quad (48)$$

С учетом (47) и (48) получим

$$if_{\tilde{V}_1 \wedge \tilde{V}_2} = \begin{cases} 2\alpha + (If_F(\alpha) - 2\alpha) \frac{1 - F^{-1}(\alpha)}{f_c}, & \text{если } (\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\} < \alpha_c) \wedge \left(0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \right), \\ 2(1 - \alpha) - (If_F(\alpha) - 2\alpha) \frac{1 - F^{-1}(\alpha)}{f_c}, & \text{если } (\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\} < \alpha_c) \wedge \left(\frac{1}{2} < \alpha \leq 1 \right), \\ If_F(\alpha_c), & \text{если } \alpha_c \leq \min\{\alpha_1, \alpha_2\}. \end{cases} \quad (49)$$

Рассмотрим частный случай для линейной ФФ $F_{lin}(t) = 1 - t$; $F_{lin}^{-1}(\alpha) = 1 - \alpha$. Имеем из (49)

$$if_{\tilde{V}_1 \wedge \tilde{V}_2}^{lin} = \begin{cases} \alpha \left(2 - \frac{\alpha}{f_c} \right), & \text{если } (\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\} < \alpha_c) \wedge \left(0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2} \right), \\ 2(1 - \alpha) \left(1 - \frac{\alpha}{f_c} \right) + \frac{\alpha^2}{f_c}, & \text{если } (\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\} < \alpha_c) \wedge \left(\frac{1}{2} < \alpha \leq 1 \right), \\ \alpha_c & \text{если } (\alpha_c \leq \min\{\alpha_1, \alpha_2\}) \wedge \left(0 \leq \alpha_c \leq \frac{1}{2} \right), \\ 2 - \alpha_c - \frac{1}{2\alpha_c}, & \text{если } (\alpha_c \leq \min\{\alpha_1, \alpha_2\}) \wedge \left(\frac{1}{2} < \alpha_c \leq 1 \right). \end{cases} \quad (50)$$

Тогда с учетом (45) и (50) получим формулу для расчета ИН субнормального и невыпуклого НМ, образованного из треугольных antecedентов после нечеткого вывода Мамдани и объединения полученных консеквентов:

$$if_{\tilde{V}_1 \vee \tilde{V}_2}^{lin}(\alpha_1, \alpha_2, f_c) = \left| \text{supp}(\tilde{V}_1) \right|^* \cdot \begin{cases} \alpha_1(2 - \alpha_1), & \text{при } 0 \leq \alpha_1 \leq \frac{1}{2} \\ (\alpha_1 - 1)^2 + \frac{1}{2}, & \text{при } \frac{1}{2} < \alpha_1 \leq 1 \end{cases} + \quad (51)$$

$$+ |\text{supp}(\tilde{V}_2)|^* \cdot \begin{cases} \alpha_2(2-\alpha_2), & \text{при } 0 \leq \alpha_2 \leq \frac{1}{2} \\ (\alpha_2-1)^2 + \frac{1}{2}, & \text{при } \frac{1}{2} < \alpha_2 \leq 1 \end{cases} - |\text{supp}(\tilde{V}_1 \wedge \tilde{V}_2)|^* \cdot if_{\tilde{V}_1 \wedge \tilde{V}_2}^{lin}(\alpha_1, \alpha_2, f_c),$$

где $if_{\tilde{V}_1 \wedge \tilde{V}_2}^{lin}(\alpha_1, \alpha_2, f_c)$ задается формулой (50); $|\text{supp}(\tilde{V}_1)|^* = \frac{rs_1 + ls_1}{m_2 - m_1 + rs_2 + ls_1}$,

$$|\text{supp}(\tilde{V}_2)|^* = \frac{rs_2 + ls_2}{m_2 - m_1 + rs_2 + ls_1}, \quad |\text{supp}(\tilde{V}_1 \wedge \tilde{V}_2)|^* = \frac{m_1 - m_2 + rs_1 + ls_2}{m_2 - m_1 + rs_2 + ls_1}$$

– приведенные длины носителей консеквентов и их пересечения по отношению к длине носителя объединения.

В случае ФФ типа «усеченная парабола», имеем при $\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\} < \alpha_c$

$$\frac{|ef|}{|bc|} = \frac{m_1 - m_2 + \sqrt{1-\alpha}(rs_1 + ls_2)}{m_1 - m_2 + rs_1 + ls_2} = \frac{m_1 - m_2 + \sqrt{1-\alpha}}{rs_1 + ls_2} = \frac{f_c - 1 + \sqrt{1-\alpha}}{f_c} = 1 - \frac{1 - \sqrt{1-\alpha}}{f_c}, \quad (52)$$

или после всех преобразований

$$if_{\tilde{V}_1 \wedge \tilde{V}_2}^{cp} = \begin{cases} \frac{\alpha}{f_c}(2f_c - \alpha), & \text{если } (\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\} < \alpha_c) \wedge \left(0 < \alpha \leq \frac{1}{2}\right), \\ 2 - \frac{\alpha}{f_c}(2f_c - \alpha) - \frac{1}{2f_c}, & \text{если } (\alpha = \min\{\alpha_1, \alpha_2\} < \alpha_c) \wedge \left(\frac{1}{2} < \alpha \leq 1\right), \\ \frac{2}{3}(1 + \alpha_c - \sqrt{1-\alpha_c}), & \text{если } (\alpha_c \leq \min\{\alpha_1, \alpha_2\}) \wedge \left(0 \leq \alpha_c \leq \frac{1}{2}\right), \\ \frac{2}{3} \cdot \frac{2 - \sqrt{2} - (1-\alpha_c)^{\frac{3}{2}}}{1 - \sqrt{1-\alpha_c}}, & \text{если } (\alpha_c \leq \min\{\alpha_1, \alpha_2\}) \wedge \left(\frac{1}{2} < \alpha_c \leq 1\right). \end{cases} \quad (53)$$

Итоговая формула для расчета ИН НМ, образованного из antecedентов с ФФ типа «усеченная парабола» после нечеткого вывода Мамдани и последующего объединения консеквентов:

$$if_{\tilde{V}_1 \wedge \tilde{V}_2}^{cp}(\alpha_1, \alpha_2, f_c) = |\text{supp}(\tilde{V}_1)|^* \cdot \begin{cases} \frac{4}{3} \left(1 - (1-\alpha_1)^{\frac{3}{2}}\right), & \text{если } 0 \leq \alpha_1 \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + (1-\alpha_1)^{\frac{3}{2}}\right), & \text{если } \frac{1}{2} < \alpha_1 \leq 1. \end{cases} + \quad (54)$$

$$+ |\text{supp}(\tilde{V}_2)|^* \cdot \begin{cases} \frac{4}{3} \left(1 - (1-\alpha_2)^{\frac{3}{2}}\right), & \text{если } 0 \leq \alpha_2 \leq \frac{1}{2}, \\ \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + (1-\alpha_2)^{\frac{3}{2}}\right), & \text{если } \frac{1}{2} < \alpha_2 \leq 1. \end{cases} - |\text{supp}(\tilde{V}_1 \wedge \tilde{V}_2)|^* \cdot if_{\tilde{V}_1 \wedge \tilde{V}_2}^{cp}(\alpha_1, \alpha_2, f_c),$$

где $if_{\tilde{V}_1 \wedge \tilde{V}_2}^{cp}(\alpha_1, \alpha_2, f_c)$ задается формулой (53).

Наконец, распространим формулу (44) на произвольное число операндов (предполагается, что пересекаются только ФП каждых двух соседних antecedентов в единственной точке):

$$if_{\tilde{V}_1 \vee \tilde{V}_2 \dots \vee \tilde{V}_n} = \sum_{i=1}^n if_{\tilde{V}_i}(\alpha_i) |\text{supp}(\tilde{V}_i)|^* - \sum_{i=1}^{n-1} if_{\tilde{V}_i \wedge \tilde{V}_{i+1}}(\alpha_i, \alpha_{i+1}, f_{ci}) |\text{supp}(\tilde{V}_i \wedge \tilde{V}_{i+1})|^*, \quad (55)$$

где $|\text{supp}(\tilde{V}_i)|^* = \frac{ls_i + rs_i}{m_n - m_1 + ls_1 + rs_n}$, $|\text{supp}(\tilde{V}_i \wedge \tilde{V}_{i+1})|^* = \frac{m_i - m_{i+1} + ls_{i+1} + rs_i}{m_n - m_1 + ls_1 + rs_n}$, – приведенные длины носителей операндов по отношению к длине носителя объединения.

Результаты вычислительных экспериментов

Вычислительный эксперимент 1. Проверим формулу (22), приняв в качестве взаимодействующих ФФ линейную (*lin*) и усеченную параболы (*cp*). Возьмем два НЧ LR-типа (1): первое полимодальное $\tilde{u}[1,2,1,3]_{lin}$, где $R_u(t) = 1 - t$; второе унимодальное $\tilde{v}[6,1,4]_{cp}$, где $L_v(t) = 1 - t^2$, рисунок 2. Здесь и далее все НЧ записываются в спрэдовой форме (1).

Начальное положение ФП НЧ изображено на рисунке 2, *a* и соответствует $\alpha = 0$ (кросс-фактор $f_c = 0$, пересечение отсутствует). Затем начинаем сдвигать влево ФП НЧ \tilde{v} , причем α пробегает все значения от 0 до 1. Промежуточное и конечное взаимное расположение ФП НЧ показано на рисунке 2, *б* ($f_c = 0,5$) и 2В ($f_c = 1,0$) соответственно. ИН пересечения рассчитывали непосредственным интегрированием по формуле (3) с абсолютной погрешностью не более 0,001 и по формуле (22) с шагом 0,025 по фактору пересечения f_c . Как видно из рисунка 2, *г* теоретическая кривая ИН пересечения НЧ полностью совпадает с расчетной.

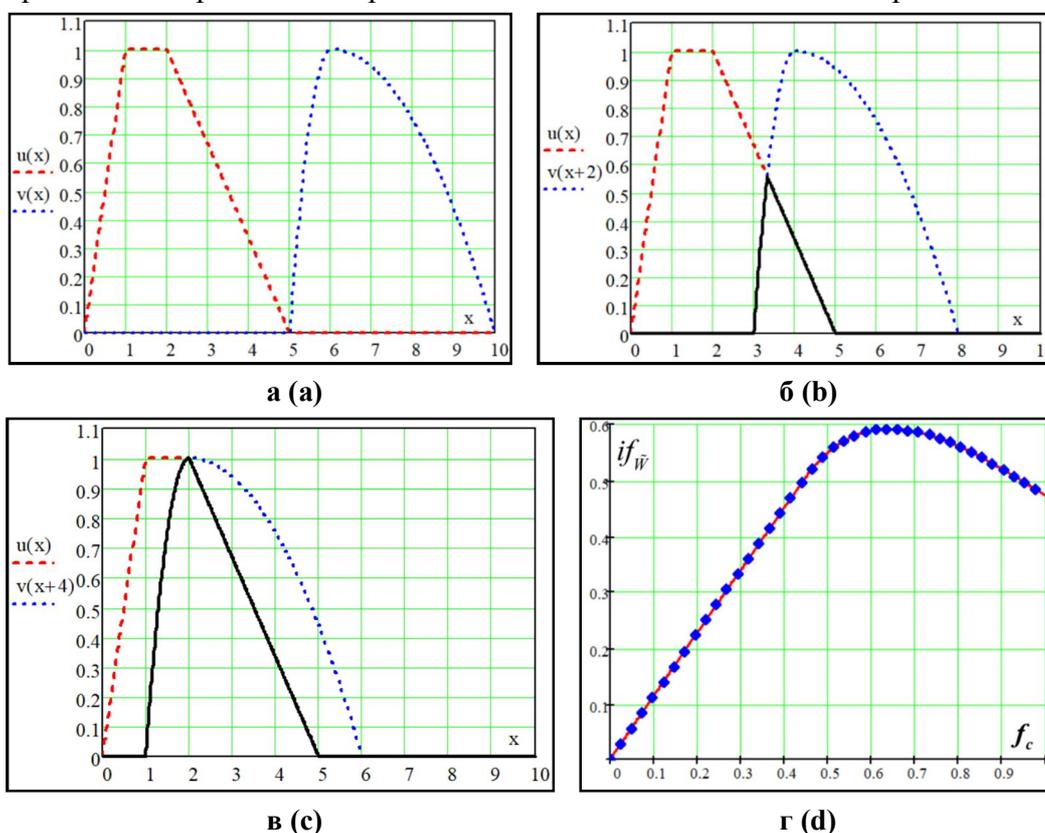


Рисунок 2: а – Исходное положение НЧ $\tilde{u}[1,2,1,3]_{lin}$ и $\tilde{v}[6,1,4]_{cp}$: $f_c = 0$; $\alpha = 0$; б – Промежуточное положение НЧ: $f_c = 0,5$; $\alpha = 0,556$; пересечение – сплошная линия; в – конечное положение НЧ: $f_c = 1$; $\alpha = 1$; г – значения ИН пересечения в зависимости от фактора пересечения f_c :

сплошная линия – расчет по формуле (3), квадраты – расчет по формуле (22)

Figure 2: а – initial position of FNs $\tilde{u}[1,2,1,3]_{lin}$ and $\tilde{v}[6,1,4]_{cp}$: $f_c = 0$; $\alpha = 0$;

б – midterm position of FNs: $f_c = 0,5$; $\alpha = 0,556$; intersection – solid line; в – final position of FNs: $f_c = 1$; $\alpha = 1$; д – the values of intersection fuzziness index against cross-factor f_c :

values: solid line – values according formula (3), square points – according formula (22)

Вычислительный эксперимент 2. Проверим формулу (37). В качестве консеквента исследуем НМ $\tilde{V}_1(y) = \tilde{v}[4, 2, 2]_{L,R} \wedge \alpha$ с ФФ $L_v(t) = 1 - t$ (линейная) и $R_v(t) = 1 - t^2$ (усеченная парабола). Параметр α (степень выполнения правила Мамдани) последовательно принимает значения в интервале от 0 до 1 (рисунок 3, а). Из рисунка 3, б видно, что теоретическая кривая ИН (3) и расчетная по аналитической формуле (37) полностью совпадают.

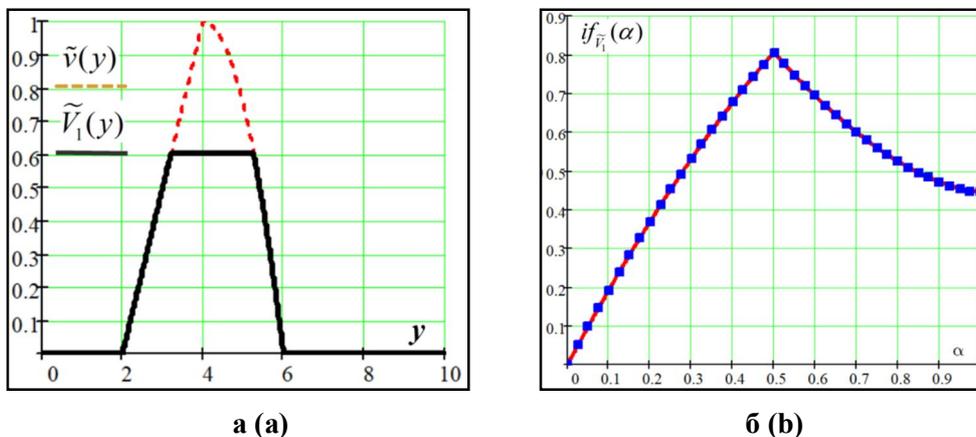


Рисунок 3: а – субнормальный консеквент импликации Мамдани при $\alpha = 0,6$; б – значения индекса нечеткости консеквента в зависимости от α : сплошная линия – расчет по формуле (3), квадраты – расчет по формуле (37)

Figure 3: a – Mamdani implication subnormal consequent at $\alpha = 0,6$; b – index of fuzziness values of a consequent against α : solid line – according formula (3), square points – according formula (37)

Вычислительный эксперимент 3. Проверим формулы (53) и (54), используя в качестве консеквентов НМ с ФФ типа «усеченная парабола»: $\tilde{V}_1(y) = \tilde{v}_1[4, 4, 4]_{cp} \wedge \alpha_1$ и $\tilde{V}_2(y) = \tilde{v}_2[8, 2, 2]_{cp} \wedge \alpha_2$. Для симуляции одновременного изменения степеней выполнения правил Мамдани введем параметр k такой, что $\alpha_1 = 1 - k$, $\alpha_2 = k$ (рисунок 4, а). По формулам (3) и (53), (54) установим зависимость индекса нечеткости $\tilde{V}_1(y) \vee \tilde{V}_2(y)$ от параметра k , который изменяется в интервале от 0 до 1. Как видно из рисунка 4, б, теоретическая и расчетная зависимости ИН объединения двух консеквентов совпадают при всех значениях k . При изменении фактора перекрытия f_c соответствие результатов не нарушалось.

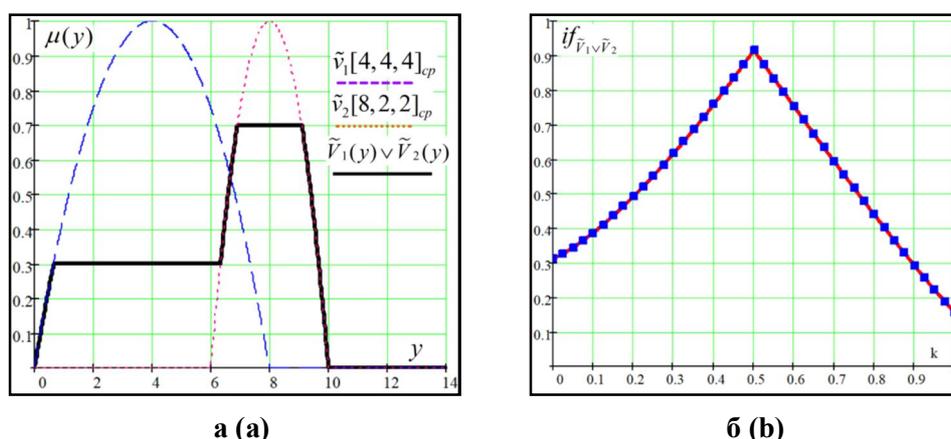


Рисунок 4: а – агрегат двух консеквентов импликации Мамдани при $k = 0,7$ (т.е. $\alpha_1 = 0,3$, $\alpha_2 = 0,7$); б – значения индекса нечеткости агрегата в зависимости от параметра k : сплошная линия – расчет по формуле (3), квадраты – расчет по формулам (53), (54)

Figure 4: a – Aggregate of two consequents of Mamdani implication at $k = 0,7$ (i.e. $\alpha_1 = 0,3$, $\alpha_2 = 0,7$); b – index of fuzziness of an aggregate against parameter k : solid line – values according formula (3), square points – according formulas (53), (54)

Вычислительный эксперимент 4. Проверим формулы (55) и (51) для случая четырех консеквентов импликации Мамдани для треугольных НЧ: $\tilde{V}_1(y) = \tilde{v}_1[3, 2, 2]_{lin} \wedge \alpha_1$, $\tilde{V}_2(y) = \tilde{v}_2[6, 2, 2]_{lin} \wedge \alpha_2$, $\tilde{V}_3(y) = \tilde{v}_3[9, 2, 5]_{lin} \wedge \alpha_3$, $\tilde{V}_4(y) = \tilde{v}_4[13, 1, 5]_{lin} \wedge \alpha_4$. В таком случае результат будет зависеть от семи переменных: четырех степеней выполнения нечетких правил $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ и трех факторов перекрытия f_{c1}, f_{c2}, f_{c3} . Для удобства введем параметр k , изменяющийся в интервале от 0 до 1 и модифицирующий степени выполнения правил следующим образом: $\alpha_1 = k$; $\alpha_2 = 1 - 0,5k$; $\alpha_3 = 0,7k$; $\alpha_4 = 0,5 + 0,4k$, а факторы перекрытия оставим постоянными (рисунок 5 б). Построим зависимости индекса нечеткости агрегата от k , используя формулы (3) и (55). Как видно из рисунка 5, б, теоретические и расчетные кривые ИН совпадают. При изменении факторов перекрытия соответствие результатов не нарушалось.

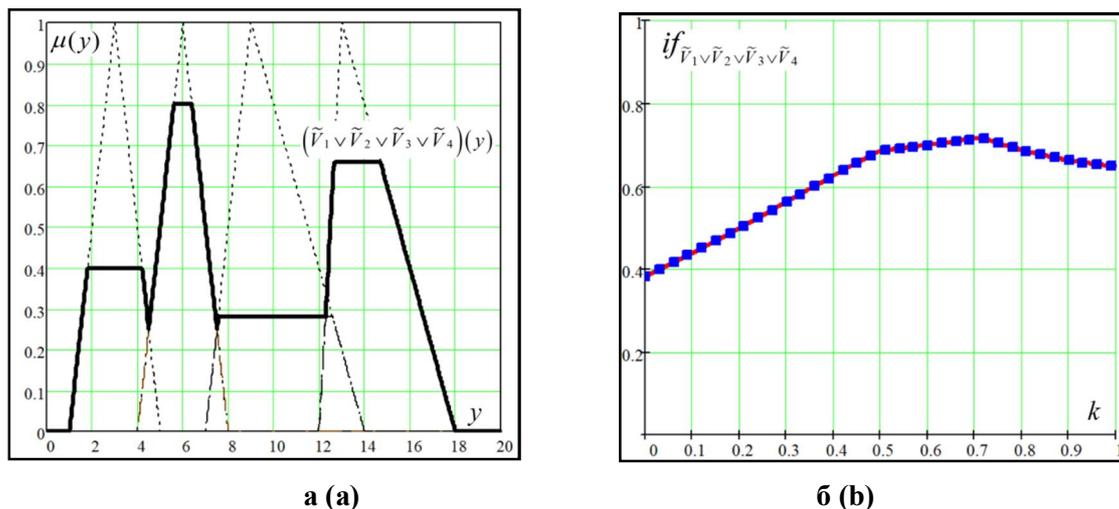


Рисунок 5: а – агрегат четырех консеквентов импликации Мамдани при $k = 0,4$ (т.е. $\alpha_1 = 0,4, \alpha_2 = 0,8, \alpha_3 = 0,28, \alpha_4 = 0,66$); б – значения индекса нечеткости агрегата в зависимости от параметра k : сплошная линия – расчет по формуле (3), квадраты – расчет по формулам (55), (51)

Figure 5: а – aggregate of four consequents of Mamdani implication at $k = 0,4$ (т.е. $\alpha_1 = 0,4, \alpha_2 = 0,8, \alpha_3 = 0,28, \alpha_4 = 0,66$); б – index of fuzziness of an aggregate against parameter k : solid line – values according formula (3), square points – according formulas (55), (51)

Заключение

В данной работе выведены формулы для расчетов индексов нечеткости для консеквентов импликации Мамдани, примененной к антецедентам, заданным в виде нечетких чисел и интервалов в LR-представлении, а также индекса нечеткости НМ – результата объединения полученных консеквентов на выходе FIS типа Мамдани до дефаззификации.

Сформулируем основные результаты.

1. Введена интегральная функция индекса нечеткости функции формы (ИФИН ФФ), позволяющая рассчитывать индексы нечеткости субнормальных НМ, полученных в результате пересечения или объединения антецедентов, выраженных изначально нечеткими числами и интервалами LR-типа. Исследованы некоторые общие свойства этой функции. Для иллюстрации возможностей предлагаемой методики расчетов получены аналитические выражения ИФИН для ФФ типа «линейная» и «усеченная парабола».

2. Выведена аналитическая формула, позволяющая, не прибегая к интегрированию, находить ИН субнормальных унимодальных НМ, полученных в результате пересечения термов лингвистической переменной, представленных в виде НЧ LR-типа с произвольными ФФ.

3. Получена аналитическая формула, позволяющая, не прибегая к интегрированию, рассчитывать ИН субнормального полимодального консеквента при нечетком выводе (импликации) Мамдани в зависимости от степени α выполнения правила Мамдани.

4. Выведена аналитическая формула, позволяющая, не прибегая к интегрированию, рассчитывать ИН объединения произвольного количества субнормальных консеквентов импликации Мамдани в агрегат, представляющий собой субнормальное полимодальное невыпуклое (в общем случае) НМ.

5. Произведены компьютерные верифицирующие расчеты для НЧ с ФФ «линейная» и «усеченная парабола», подтвердившие корректность выведенных зависимостей.

На очередном этапе исследования планируется: 1) произвести анализ полученных формул; 2) выявить взаимосвязи между ИН агрегата на выходе FIS типа Мамдани и результатом его дефаззификации различными методами.

Библиографический список

1. Бухенский К. В., Колюхов А. Н., Дюбуа А. Б., Сафошкин А. С. Операции над нечеткими числами и мера нечеткости // III Международный научно-технический форум СТНО-2020. Сборник трудов / под ред. О.В. Миловзорова. Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2020. Т. 5. С. 12-19.

2. Бухенский К. В., Колюхов А. Н., Дюбуа А. Б., Сафошкин А. С. Быстрый алгоритм расчета индексов нечеткости для унимодальных нечетких чисел LR-типа // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2019. № 70. С. 65-75.

3. Бухенский К. В., Колюхов А. Н., Дюбуа А. Б., Сафошкин А. С. Преобразования нечеткости при линейных операциях над нечеткими числами LR-типа // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2020. № 71. С. 137-150.

4. Бухенский К. В., Колюхов А. Н., Дюбуа А. Б., Сафошкин А. С. Особенности преобразования нечеткости при операции умножения нечетких чисел LR-типа // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2020. № 73. С. 83-96.

5. Бухенский К. В., Колюхов А. Н., Дюбуа А. Б., Анисимов К. В. О нечеткости правила Мамдани как бинарного отношения нечетких чисел // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2021. № 75. С. 85-98.

6. Бакулева М. А., Корячко В. П., Орешков В. И. Интеллектуальные системы и нечеткая логика – Москва, КУРС, ИНФРА-М, 2017. 352 с.

7. Bede B. Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. London: Springer, 2013. 276 p.

8. Yager R. On the measure of fuzziness and negation. Part I: membership in the unit interval. International Journal of General Systems. 1979, vol. 5, pp. 221-229.

UDC 519.766.2

RAPID CALCULATION OF CONSEQUENTS FUZZINESS INDICES AFTER MAMDANI IMPLICATION AND FURTHER AGGREGATION

K. V. Bukhensky, Ph.D. (Phys. and Math.), associate professor, Head of the Department of Higher Mathematics, RSREU, Ryazan, Russia;

orcid.org/0000-0003-2602-2112, e-mail: bukhenky.k.v@rsreu.ru

A. N. Konyukhov, Ph.D. (Ped.), associate professor, RSREU, Ryazan, Russia;

orcid.org/0000-0002-1523-7110, e-mail: chronos@bk.ru

K. V. Anisimov, fourth year student of the Faculty of Computer Science, RSREU, Ryazan, Russia;

orcid.org/0000-0001-8889-0818, e-mail: k.anisimov29@yandex.ru

The aim is to – 1) obtain the analytical formula for consequent index of fuzziness after Mamdani implication (rule); 2) derive the analytical formula for fuzziness index of a fuzzy set (FS) gained after aggregation of arbitrary number subnormal consequents of Mamdani implication. This work is the proceeding of former research on the project “Fuzziness transformations in fuzzy inference systems (FIS)”. As a measure of math fuzziness a Yager’s index with linear Hamming metric was used. The analytical formulas for integral functions of fuzziness index for some shape functions (IFFI SF) of LR-types of fuzzy numbers (FNs) were derived. IFFI SF allows us to calculate FS’s index of fuzziness obtained from FNs via logical operations. Common

and partial formulas for LR-type FNs with linear and clipped parabola shape functions were represented. In order to test theoretical results several numerical experiments were accomplished. The expressions obtained allow calculating the index of fuzziness for FSs after Mamdani implication and further consequents aggregation without integration procedure thus reducing calculation time dramatically. Formulas may be further analyzed in order to search the optimal conditions of Mamdani type inference in the terms of fuzziness.

Key words: fuzzy set, LR-type fuzzy number, membership function, shape function, index of fuzziness, integral functions of fuzziness index, antecedent, consequent, Mamdani implication, linguistic variable term, cross-factor.

DOI: 10.21667/1995-4565-2021-78-75-88

References

1. Bukhensky K. V., Konyukhov A. N., Dubois A. B., Safoshkin A. S. Operacii nad nechetkimi chislami i mera nechetkosti. III Mezhdunarodnyj nauchno-tehnicheskij forum STNO-2020. *Sbornik trudov pod red. O.V. Milovzorova*. Rjazan': Rjazan. gos. radiotehn. un-t, 2020. vol. 5, pp. 12-19. (in Russian).
2. Bukhensky K. V., Konyukhov A. N., Dubois A. B., Safoshkin A. S. Bystryj algoritm rascheta indeksov nechetkosti dlja unimodal'nyh nechetkih chisel LR-tipa. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2019, no. 70, pp. 68-75. (in Russian).
3. Bukhensky K. V., Konyukhov A. N., Dubois A. B., Safoshkin A. S. Preobrazovanija nechetkosti pri linejnyh operacijah nad nechetkimi chislami LR-tipa. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2020, no. 71, pp. 137-150. (in Russian).
4. Bukhensky K. V., Konyukhov A. N., Dubois A. B., Safoshkin A. S. Osobennosti preobrazovaniya nechetkosti pri operacii umnozheniya nechetkih chisel LR-tipa. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2020, no. 73, pp. 83-96. (in Russian).
5. Bukhensky K. V., Konyukhov A. N., Dubois A. B., Anisimov K. V. O nechetkosti pravila Mamdani kak binarnogo otnoshenija nechetkih chisel. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2021, no. 75. pp. 85-98. (in Russian).
6. Bakuleva M. A., Koryachko V. P., Oreshkov V. I. *Intellektual'nye sistemy i nechetkaya logika* – Moskva, KURS, INFRA-M, 2017. 352 p.
7. Bede B. *Mathematics of Fuzzy Sets and Fuzzy Logic*. London: Springer, 2013. 276 p.
8. Yager R. On the measure of fuzziness and negation. Part I: membership in the unit interval. *International Journal of General Systems*. 1979, vol. 5, pp. 221-229.