

УДК 004.942

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ПАРАШЮТИСТА В ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ

И. Ю. Клочкова, преподаватель кафедры МиЕНД РВВДКУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0002-4265-6759, e-mail: i-usacheva@mail.ru

Анализируется математическая модель движения парашютиста, рассматривающая снижение на раскрытом парашюте.

Целью работы является изучение автономной системы дифференциальных уравнений, определяющей скорость движения парашютиста, на предмет наличия и устойчивости состояний равновесия. Первоначально система дифференциальных уравнений определяет связь ускорения парашютиста и скорости по каждой из трех координат пространства. Рассматриваются различные вариации этой системы дифференциальных уравнений. Доказываются теоремы о количестве и устойчивости состояний равновесия.

На основе реальных данных прыжков, полученных с помощью специального устройства, закреплённого на теле парашютиста, для изучаемой системы дифференциальных уравнений методом регрессионного анализа получены численные значения коэффициентов. Определяются состояния равновесия для каждого прыжка, их устойчивость, практическая значимость и предельное значение скоростей в момент приземления. Для полученной системы дифференциальных уравнений построена теоретическая траектория парашютиста, проведено ее сравнение с фактической траекторией.

Ключевые слова: математическая модель движения парашютиста, состояние равновесия, регрессионный анализ, коэффициент корреляции, траектория парашютиста, скорость приземления парашютиста.

DOI: 10.21667/1995-4565-2021-78-120-129

Введение

Процесс десантирования парашютиста традиционно делят на четыре этапа. В данной работе будем исследовать движение парашютиста в четвёртой части прыжка. Движение парашютиста отнесём к прямоугольной системе координат $Oxyz$, причём ось Oy направим горизонтально, в сторону движения транспортного средства, ось Oz направим вертикально вверх, ось Ox – перпендикулярно к осям Oy и Oz ; начало координат O – ортогональная проекция начального положения движущегося парашютиста на поверхность земли (рисунок 1).

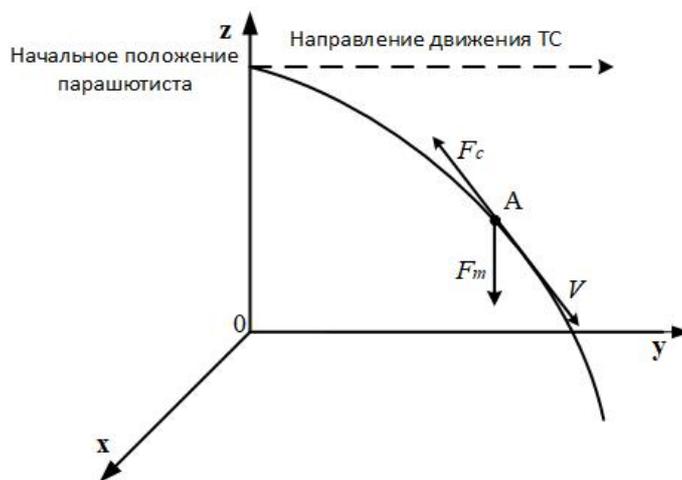


Рисунок 1 – Система координат
Figure 1 – Coordinate system

Пусть $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – координаты движения парашютиста в заданный момент времени t .

В этом случае изменение скорости парашютиста в пространстве описывается следующей автономной системой дифференциальных уравнений [3]

$$\begin{cases} \dot{V}_x = c_1 + b_1 \cdot V_x + a_1 \cdot V_x \cdot (V_x^2 + V_z^2)^{1/2} \\ \dot{V}_y = c_2 + b_2 \cdot V_y + a_2 \cdot V_y \cdot (V_y^2 + V_z^2)^{1/2} \\ \dot{V}_z = c_3 + b_3 \cdot V_z + V_z \cdot (k_3 \cdot (V_x^2 + V_z^2)^{1/2} + m_3 \cdot (V_y^2 + V_z^2)^{1/2}), \end{cases} \quad (1)$$

где V_x , V_y , V_z – проекции скорости парашютиста на оси OX , OY , OZ соответственно; коэффициенты a_1, a_2, k_3, m_3, b_n зависят от площади поперечного сечения тела по отношению к воздушному потоку, формы тела, свойств среды; c_n определяются массой тела и ускорением свободного падения, $n = \overline{1,3}$.

Для системы (1) определим состояния равновесия. А также выясним условия их устойчивости.

Теоретическая часть

Получены координаты траектории движения парашютиста в четвёртой части для нескольких прыжков. В результате для каждого десантирования, был сформирован массив, который отображает зависимость трех координат от времени.

Применяя для автономной системы уравнений (1) метод регрессионного анализа итогов измерений, получаем случаи:

- 1) $a_1 = k_3 = 0$;
- 2) $b_1 = c_2 = k_3 = 0$;
- 3) $a_2 = b_1 = m_3 = 0$.

Случай 1: детально рассмотрен в работе [4].

В данной работе будут рассмотрены случаи 2) и 3).

Случай 2: $b_1 = c_2 = k_3 = 0$.

Система дифференциальных уравнений (1) примет вид

$$\begin{cases} \dot{V}_x = c_1 + a_1 \cdot V_x \cdot (V_x^2 + V_z^2)^{1/2} \\ \dot{V}_y = b_2 \cdot V_y + a_2 \cdot V_y \cdot (V_y^2 + V_z^2)^{1/2} \\ \dot{V}_z = c_3 + b_3 \cdot V_z + m_3 \cdot V_z \cdot (V_y^2 + V_z^2)^{1/2}. \end{cases} \quad (2)$$

Найдем и определим устойчивости состояний равновесия системы дифференциальных уравнений (2). Для этого рассмотрим следующие возможные два варианта.

Вариант 1. Скорость $V_y = 0$.

Тогда на основании системы (2) для нахождения V_z получили уравнение

$$m_3 \cdot V_z \cdot |V_z| + b_3 \cdot V_z + c_3 = 0. \quad (3)$$

Потребуем, чтобы $V_z < 0$, тогда $|V_z| = -V_z$, и уравнение (3) в этом случае, примет вид

$$-m_3 \cdot V_z^2 + b_3 \cdot V_z + c_3 = 0. \quad (4)$$

Вычислим дискриминант уравнения (4)

$$D_z^- = b_3^2 + 4 \cdot m_3 \cdot c_3. \quad (5)$$

Далее, используя равенство (5) находим корни уравнения (4):

$$\gamma_1^- = \frac{b_3 - \sqrt{D_z^-}}{2 \cdot m_3}; \quad \gamma_2^- = \frac{b_3 + \sqrt{D_z^-}}{2 \cdot m_3}. \quad (6)$$

Если для уравнения (4) выполнены соотношения

$$D_z^- = b_3^2 + 4 \cdot m_3 \cdot c_3 > 0; -\frac{c_3}{m_3} > 0; -\frac{b_3}{m_3} > 0; \quad (7)$$

то корни (6) уравнения (4) будут отрицательными.

Для определения V_x получим уравнение

$$a_1 \cdot V_x \cdot (V_x^2 + (\gamma_{1,2}^-)^2)^{1/2} = -c_1 \quad (8)$$

или

$$a_1^2 \cdot V_x^4 + a_1^2 \cdot (\gamma_{1,2}^-)^2 \cdot V_x^2 - c_1^2 = 0.$$

Обозначим $D_{1,2} = a_1^4 \cdot (\gamma_{1,2}^-)^4 + 4 \cdot a_1^2 \cdot c_1^2$,

$$\alpha_{1,2} = \sqrt{\frac{\sqrt{D_{1,2}} - a_1^2 \cdot (\gamma_{1,2}^-)^2}{2 \cdot a_1^2}}. \quad (9)$$

Тогда, с учетом (9), уравнение (8) обладает решениями $V_{x_{1,2}}^\pm = \pm \alpha_{1,2}$. Более того, если $c_1 \cdot a_1 < 0$, то $V_{x_{1,2}} = \alpha_{1,2} > 0$, если $c_1 a_1 > 0$, то $V_{x_{1,2}} = -\alpha_{1,2} < 0$.

Замечание. Практически значимым для исследования движения парашютиста является случай $V_z < 0$. Вместе с тем совершенно аналогично можно рассмотреть и случай $V_z > 0$.

Проанализируем устойчивость состояний равновесия $A_1^\pm(\pm\alpha_1, 0, \gamma_1^-)$, $A_2^\pm(\pm\alpha_2, 0, \gamma_2^-)$, введём следующие обозначения:

$$c_1 + a_1 \cdot V_x \cdot (V_x^2 + V_z^2)^{1/2} = P(V_x, V_y, V_z)$$

$$b_2 \cdot V_y + a_2 \cdot V_y \cdot (V_y^2 + V_z^2)^{1/2} = Q(V_x, V_y, V_z)$$

$$c_3 + b_3 \cdot V_z + m_3 \cdot V_z \cdot (V_y^2 + V_z^2)^{1/2} = M(V_x, V_y, V_z)$$

Для функций $P(V_x, V_y, V_z), Q(V_x, V_y, V_z), M(V_x, V_y, V_z)$ отыщем частные производные

$$P'_{V_x} = \frac{a_1 \cdot (2 \cdot V_x^2 + V_z^2)}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2}}; P'_{V_y} = 0; P'_{V_z} = \frac{a_1 \cdot V_x \cdot V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2}};$$

$$Q'_{V_x} = 0; Q'_{V_y} = b_2 + \frac{a_2 \cdot (2 \cdot V_y^2 + V_z^2)}{\sqrt{V_y^2 + V_z^2}}; Q'_{V_z} = b_3 + \frac{a_2 \cdot V_y \cdot V_z}{\sqrt{V_y^2 + V_z^2}};$$

$$M'_{V_x} = 0; M'_{V_y} = \frac{m_3 \cdot V_y \cdot V_z}{\sqrt{V_y^2 + V_z^2}}; M'_{V_z} = b_3 + \frac{m_3 \cdot (2 \cdot V_z^2 + V_y^2)}{\sqrt{V_z^2 + V_y^2}}.$$

Для матрицы линейной части системы уравнений (2) найдём собственные значения в состояниях равновесия A_1^\pm, A_2^\pm :

$$\lambda_1^{A_{1,2}^\pm} = \frac{a_1 \cdot (2 \cdot \alpha_{1,2}^2 + (\gamma_{1,2}^\pm)^2)}{\sqrt{\alpha_{1,2}^2 + (\gamma_{1,2}^\pm)^2}}; \lambda_2^{A_{1,2}^\pm} = b_2 + a_2 \cdot |\gamma_{1,2}^\pm|; \lambda_3^{A_{1,2}^\pm} = b_3 + 2 \cdot m_3 \cdot |\gamma_{1,2}^\pm|. \quad (10)$$

Тогда, если потребовать, чтобы выполнялись неравенства

$$a_1 < 0; b_2 + a_2 \cdot |\gamma_{1,2}^\pm| < 0; b_3 + 2 \cdot m_3 \cdot |\gamma_{1,2}^\pm| < 0, \quad (11)$$

то собственные значения матрицы линейной части (10) будут отрицательными. Поэтому, состояния равновесия A_1^\pm, A_2^\pm будут устойчивыми.

Таким образом, установлена справедливость следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Предположим, что для системы дифференциальных уравнений (2) выполняются неравенства (7).

Тогда:

1) если $c_1 \cdot a_1 < 0$, то $A_1^+(\alpha_1; 0; \gamma_1^-), A_2^+(\alpha_2; 0; \gamma_2^-)$ являются состояниями равновесия системы дифференциальных уравнений (2);

2) если $c_1 \cdot a_1 > 0$, то $A_1^-(\alpha_1; 0; \gamma_1^-), A_2^-(\alpha_2; 0; \gamma_2^-)$ являются состояниями равновесия системы дифференциальных уравнений (2);

3) если, кроме того, потребовать выполнения неравенства (11), то состояния равновесия $A_1^+, A_2^+, A_1^-, A_2^-$ будут устойчивыми.

Следствие. В случае выполнения, по крайней мере, одного из следующих неравенств: $a_1 > 0; b_2 + a_2 \cdot |\gamma_{1,2}^\pm| > 0; b_3 + 2 \cdot m_3 \cdot |\gamma_{1,2}^\pm| > 0$ состояния равновесия $A_1^+, A_2^+, A_1^-, A_2^-$ являются неустойчивыми.

Вариант 2. Скорость $V_y \neq 0$.

Система дифференциальных уравнений (2) может иметь дополнительные состояния равновесия, что зависит от знаков коэффициентов a_2, b_2 . Когда $a_2 \cdot b_2 < 0$, найдем

$\sqrt{V_y^2 + V_z^2} = -\frac{b_2}{a_2}$ из второго уравнения системы (2). Состояния равновесия системы уравнений (2) определяются равенствами

$$\begin{cases} a_1 \cdot V_x \cdot (V_x^2 + V_z^2)^{1/2} = -c_1 \\ V_y^2 = \frac{b_2^2}{a_2^2} - V_z^2 \\ -m_3 \cdot V_z \cdot \frac{b_2}{a_2} + b_3 \cdot V_z + c_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 \cdot V_x^2 \cdot (V_x^2 + V_z^2) = c_1^2 \\ V_y^2 = \frac{b_2^2}{a_2^2} - V_z^2 \\ V_z \cdot \left(\frac{a_2 \cdot b_3 - m_3 \cdot b_2}{a_2} \right) = -c_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1^2 \cdot V_x^2 \cdot (V_x^2 + V_z^2) - c_1^2 = 0 \\ V_y^2 = \frac{b_2^2}{a_2^2} - \gamma_3^2 \\ V_z = -\frac{c_3 \cdot a_2}{a_2 \cdot b_3 - m_3 \cdot b_2} = \gamma_3. \end{cases} \quad (12)$$

Потребуем, дополнительно, чтобы

$$\frac{b_2^2}{a_2^2} - \gamma_3^2 > 0, \quad (13)$$

и обозначим

$$\sqrt{\frac{b_2^2}{a_2^2} - \gamma_3^2} = \beta_3, \quad -\frac{1}{2} \gamma_3^2 + \sqrt{\frac{\gamma_3^4}{4} + \frac{c_1^2}{a_1^2}} = \alpha^2, \quad \alpha > 0. \quad (14)$$

Тогда система дифференциальных уравнений (2) при условии, что $c_1 \cdot a_1 < 0$, имеет состояния равновесия $A_3^+(\alpha; \beta_3; \gamma_3), A_4^+(\alpha; -\beta_3; \gamma_3)$, а при условии, что $c_1 \cdot a_1 > 0$ – $A_3^-(\alpha; \beta_3; \gamma_3), A_4^-(\alpha; -\beta_3; \gamma_3)$. В итоге система уравнений (2) будет иметь ещё четыре состояния равновесия A_3^\pm, A_4^\pm .

Состояния равновесия A_3^\pm, A_4^\pm проанализируем на предмет устойчивости. В качестве примера рассмотрим состояние равновесия A_3^+ .

Матрица линейного приближения для состояния равновесия A_3^+ имеет вид

$$\mathbf{B}_{A_3^+} = \begin{pmatrix} \frac{a_1 \cdot (2 \cdot \alpha^2 + \gamma_3^2)}{(\alpha^2 + \gamma_3^2)^{1/2}} & 0 & \frac{a_1 \cdot \alpha \cdot \gamma_3}{(\alpha^2 + \gamma_3^2)^{1/2}} \\ 0 & b_2 + \frac{a_2 \cdot (2 \cdot \beta_3^2 + \gamma_3^2)}{(\beta_3^2 + \gamma_3^2)^{1/2}} & \frac{a_2 \cdot \beta_3 \cdot \gamma_3}{(\beta_3^2 + \gamma_3^2)^{1/2}} \\ 0 & \frac{m_3 \cdot \beta_3 \cdot \gamma_3}{(\beta_3^2 + \gamma_3^2)^{1/2}} & b_3 + \frac{m_3 \cdot (2 \cdot \beta_3^2 + \gamma_3^2)}{(\beta_3^2 + \gamma_3^2)^{1/2}} \end{pmatrix}.$$

Применим теорему Рауса – Гурвица к матрице $\mathbf{B}_{A_3^+}$. Получим, что если выполнены неравенства [5-8]

$$\begin{aligned} a_1 < 0; \Delta_1 = b_2 + \frac{a_2 \cdot (2 \cdot \beta_3^2 + \gamma_3^2)}{(\beta_3^2 + \gamma_3^2)^{1/2}} < 0; \\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_2 \cdot (\beta_3^2 + \gamma_3^2)^{1/2} + a_2 \cdot (2 \cdot \beta_3^2 + \gamma_3^2) & a_2 \cdot \beta_3 \cdot \gamma_3 \\ m_3 \cdot \beta_3 \cdot \gamma_3 & b_3 \cdot (\beta_3^2 + \gamma_3^2)^{1/2} + m_3 \cdot (2 \cdot \beta_3^2 + \gamma_3^2) \end{vmatrix} > 0 \end{aligned} \quad (15)$$

то действительные части собственных значений матрицы $\mathbf{B}_{A_3^+}$ отрицательны. Поэтому состояние равновесия $A_3^+(\alpha; \beta_3; \gamma_3)$ будет устойчивым. Аналогично рассматриваются и состояния равновесия A_4^+, A_3^-, A_4^- . Таким образом, имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. Предположим, что для системы дифференциальных уравнений (2) выполняются неравенства $a_2 \cdot b_2 < 0$, (13), (15).

Тогда

1) если $c_1 \cdot a_1 < 0$, то $A_3^+(\alpha; \beta_3; \gamma_3)$, $A_4^+(\alpha; -\beta_3; \gamma_3)$ являются устойчивыми состояниями равновесия системы дифференциальных уравнений (2);

2) если $c_1 \cdot a_1 > 0$, то $A_3^-(-\alpha; \beta_3; \gamma_3)$, $A_4^-(-\alpha; -\beta_3; \gamma_3)$ являются устойчивыми состояниями равновесия системы дифференциальных уравнений (2).

Модельные примеры

Рассмотрим реальное движение парашютиста в завершающей четвёртой части прыжка. Методом регрессионного анализа вычислим коэффициенты системы дифференциальных уравнений (2) [9]:

$$c_1 = 0,3041, \quad a_1 = -0,0356, \quad b_2 = 0,2925, \quad a_2 = -0,0273, \quad c_3 = -3,9240, \quad b_3 = -1,0631, \\ m_3 = 0,0034.$$

То есть система дифференциальных уравнений (2) принимает вид

$$\begin{cases} \dot{V}_x = 0,3041 - 0,0356 \cdot V_x \cdot (V_x^2 + V_z^2)^{1/2} \\ \dot{V}_y = 0,2925 \cdot V_y - 0,0273 \cdot V_y \cdot (V_y^2 + V_z^2)^{1/2} \\ \dot{V}_z = -3,9240 - 1,0631 \cdot V_z + 0,0034 \cdot V_z \cdot (V_y^2 + V_z^2)^{1/2}. \end{cases} \quad (16)$$

Пусть для системы (16) $V_y = 0$, тогда уравнение (3) имеет решения $\gamma_1^- = -3,7352$, $\gamma_2^- = -312,2064$, $\gamma_2^+ = 319,5904$.

Решение $\gamma_2^+ = 319,5904$ практически значимым не является, поэтому его из рассмотрения исключим.

Для системы (14) $c_1 \cdot a_1 < 0$ корни уравнения (8) положительны: $\alpha_1 = 2,0141$ для γ_1^- и $\alpha_2 = 0,0267$ для γ_2^- . Система дифференциальных уравнений (16) имеет состояния равновесия $A_1^+(\alpha_1; 0; \gamma_1^-)$, $A_2^+(\alpha_2; 0; \gamma_2^-)$. Неравенства (11) для γ_1^- , γ_2^- примут вид

$$a_1 < 0; b_2 + a_2|\gamma_1^-| = 0,1906 > 0; b_3 + 2m_3|\gamma_1^-| = -1,038 < 0,$$

$$a_1 < 0; b_2 + a_2|\gamma_2^-| = -8,2275 < 0; b_3 + 2m_3|\gamma_2^-| = 1,0380 > 0,$$

Следовательно, состояния равновесия A_1^+ , A_2^+ , согласно следствию к теореме 1, являются неустойчивыми (рисунок 2).

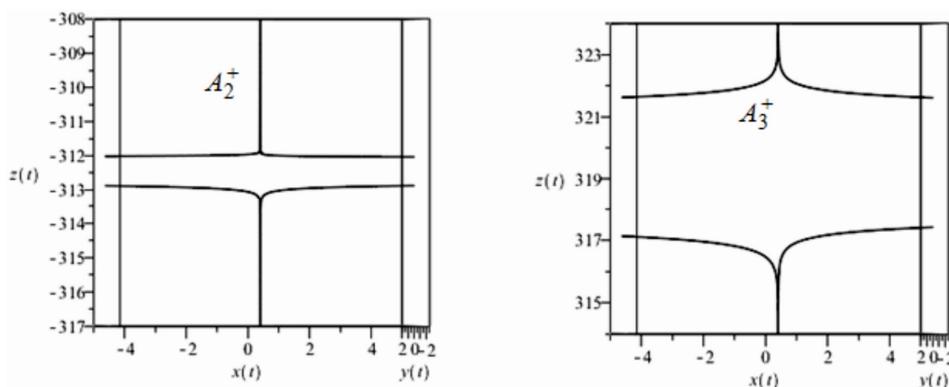


Рисунок 2 – Неустойчивые состояния равновесия A_1^+ , A_2^+

Figure 2 – Unstable equilibrium states A_1^+ , A_2^+

Далее, для системы дифференциальных уравнений (16) выполняется неравенства $b_2 \cdot a_2 < 0$, $c_1 \cdot a_1 < 0$. Используя (12), (14) находим $\gamma_3 = -3,8206$, $\beta_3 = 10,0146$, $\alpha = 1,9842$. Система (16) имеет состояние равновесия $A_3^+(\alpha; \beta_3; \gamma_3)$, $A_4^+(\alpha; -\beta_3; \gamma_3)$. Неравенства (13),

(15) для A_3^+ , A_4^+ примут вид $\frac{b_2^2}{a_2^2} - \gamma_3^2 = 107,6 > 0$, $a_1 < 0, \Delta_1^{A_3^+} = \Delta_1^{A_4^+} = -0,2556 < 0$;

$$\Delta_2^{A_3^+} = \Delta_2^{A_4^+} = 29,3455 > 0.$$

Следовательно, по теореме 2, состояния равновесия A_3^+ , A_4^+ являются устойчивыми (рисунок 3).

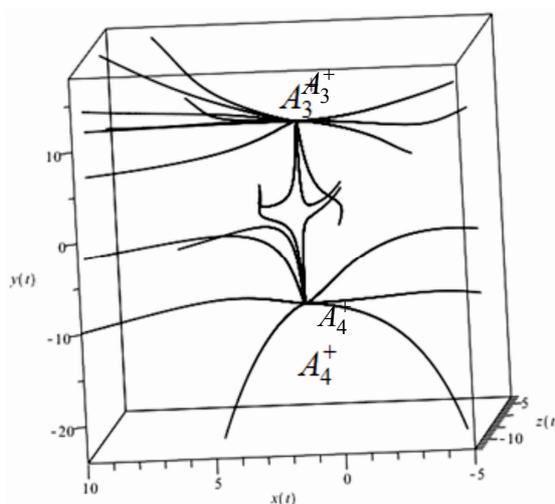


Рисунок 3 – Устойчивые состояния равновесия A_3^+ , A_4^+

Figure 3 – Stable equilibrium states A_3^+ , A_4^+

Таким образом, у системы уравнений (16) существует пять состояний равновесия, три из которых неустойчивые, а два устойчивые.

Практически важным для скоростей V_x , V_y , V_z является состояние равновесия A_4^+ . Следовательно, если изменение скорости движения парашютиста описывается системой (16), то справедливы равенства

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V_x(t) = 1,9842 \text{ м/с}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} V_y(t) = 10,0146 \text{ м/с}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} V_z(t) = -3,8206 \text{ м/с}.$$

Случай 3: $a_2 = b_1 = m_3 = 0$.

Движение парашютиста в этом случае, определяется системой дифференциальных уравнений следующего вида

$$\begin{cases} \dot{V}_x = c_1 + a_1 \cdot V_x \cdot (V_x^2 + V_z^2)^{1/2} \\ \dot{V}_y = c_2 + b_2 \cdot V_y \\ \dot{V}_z = c_3 + b_3 \cdot V_z + k_3 \cdot V_z \cdot (V_x^2 + V_z^2)^{1/2}. \end{cases} \quad (17)$$

Рассмотрим координаты фактической траектории движения парашютиста. Методом регрессионного анализа получим значения коэффициенты системы (17): $a_1 = -0,039$, $b_2 = -0,24$, $b_3 = -0,31$, $c_1 = 0,469$, $c_2 = 1,621$, $c_3 = -2,917$, $k_3 = 0,032$.

Таким образом, система дифференциальных уравнений (17) примет вид

$$\begin{cases} \dot{V}_x = 0,469 - 0,039 \cdot V_x \cdot (V_x^2 + V_z^2)^{1/2} \\ \dot{V}_y = 1,621 - 0,24 \cdot V_y \\ \dot{V}_z = -2,917 - 0,758 \cdot V_z + 0,032 \cdot V_z \cdot (V_x^2 + V_z^2)^{1/2}. \end{cases} \quad (18)$$

Для нахождения состояний равновесия системы (18) вначале рассмотрим уравнение

$$\dot{V}_y = 1,621 - 0,24 \cdot V_y. \quad (19)$$

Так как $V_y = \dot{y}(t)$, то уравнение (19) будет иметь вид

$$\ddot{y}(t) = 1,621 - 0,24 \cdot \dot{y}(t).$$

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение второго порядка. Его общее решение имеет вид

$$y(t) = c_1^* + c_2^* e^{-0,24t} + 6,75t,$$

где $c_1^*, c_2^* \in R$.

Таким образом, получим зависимость координаты y от времени t в явном виде.

Теперь найдем состояние равновесия уравнения (19)

$$1,621 - 0,24 \cdot V_y = 0 \Rightarrow V_y = \frac{1,621}{0,24} \approx 6,75.$$

Следовательно, $\lim_{t \rightarrow \infty} V_y(t) = 6,75 \text{ м/с}$.

Далее, рассмотрим подсистему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{V}_x = 0,469 - 0,039 \cdot V_x \cdot (V_x^2 + V_z^2)^{1/2} \\ \dot{V}_z = -2,917 - 0,758 \cdot V_z + 0,032 \cdot V_z \cdot (V_x^2 + V_z^2)^{1/2}. \end{cases} \quad (20)$$

Приравняем к нулю правые части системы (20):

$$\begin{cases} 0,469 - 0,039 \cdot V_x \cdot (V_x^2 + V_z^2)^{1/2} = 0 \\ -2,917 - 0,758 \cdot V_z + 0,032 \cdot V_z \cdot (V_x^2 + V_z^2)^{1/2} = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Решения системы (21) находим численными методами, используя пакет прикладных программ Maple.

Сформируем найденные решения в таблицу 1 состояний равновесия системы дифференциальных уравнений (21).

Таблица 1 – Состояния равновесия системы (20)

Table 1 – System equilibrium states (20)

Скорость по координатам	$A_1(V_x, V_z)$	$A_2(V_x, V_z)$	$A_3(V_x, V_z)$
V_x	0,43	0,62	2,18
V_z	27,46	-19,27	-4,96

Для анализа состояний равновесия из таблицы 1 системы дифференциальных уравнений (17) обозначим

$$c_1 + a_1 \cdot V_x \cdot (V_x^2 + V_z^2)^{1/2} = Q(V_x, V_y, V_z)$$

$$c_3 + b_3 \cdot V_z + k_3 \cdot V_z \cdot (V_x^2 + V_z^2)^{1/2} = M(V_x, V_y, V_z)$$

Найдем частные производные функций Q, M

$$Q'_{V_x} = a_1 \frac{2 \cdot V_x^2 + V_z^2}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2}}; \quad Q'_{V_z} = \frac{a_1 \cdot V_x \cdot V_z}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2}}; \quad M'_{V_x} = \frac{k_3 \cdot V_z \cdot V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2}}; \quad M'_{V_z} = b_3 + k_3 \frac{V_x^2 + 2 \cdot V_z^2}{\sqrt{V_x^2 + V_z^2}}.$$

Используя найденные частные производные, составляем матрицу линейного приближения:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} Q'_{V_x} & Q'_{V_z} \\ M'_{V_x} & M'_{V_z} \end{pmatrix}.$$

Найдем её собственные значения для состояний равновесия A_1, A_2, A_3 . Полученные результаты запишем в таблицу 2.

Таблица 2 – Собственные значения матрицы F

Table 2 – Eigenvalues of matrix F

Собственные значения	$A_1(V_x, V_z)$	$A_2(V_x, V_z)$	$A_3(V_x, V_z)$
λ_1	-1,096	-0,769	-0,41485
λ_2	0,971	0,455	-0,281

Анализируя результаты, приведенные в таблице 2, можем заключить, что единственным устойчивым, а следовательно, и практически значимым состоянием равновесия является $A_3(V_x, V_z)$.

Из полученных выше результатов следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} V_x(t) = 2,18 \text{ м/с}$; $\lim_{t \rightarrow \infty} V_y(t) = 6,76 \text{ м/с}$; $\lim_{t \rightarrow \infty} V_z(t) = -4,959 \text{ м/с}$. Тогда результирующая скорость движения парашютиста по трем координатам стремится к 8,6 м/с. При замерах реальная скорость в момент приземления парашютиста имела значение 5,9 м/с. [2]. Расхождения в значениях реальной скорости и скорости теоретической возникают вследствие неучтенных внешних воздействий, например, ветра и других.

Заключение

В итоге займемся поиском реальной точки приземления, а также сравнением этого значения с теоретической величиной. Для этого запишем систему (17) в виде:

$$\begin{cases} \ddot{x} = c_1 + a_1 \cdot \dot{x} \cdot (\dot{x}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}; \\ \ddot{y} = c_2 + b_2 \cdot \dot{y}; \\ \ddot{z} = c_3 + b_3 \cdot \dot{z} + k_3 \cdot \dot{z} \cdot (\dot{x}^2 + \dot{z}^2)^{1/2}. \end{cases} \quad (22)$$

Используя систему компьютерной математики, предназначенную для выполнения решения математических задач – Maple, поставим в соответствие системе дифференциальных уравнений (22) массив данных.

На основании данных из массивов наглядно изобразим теоретическую и фактическую траектории системы уравнений (22) (рисунок 4).

Заметим, что дистанция между теоретической и фактической точками приземления не превышает значения 40 м.

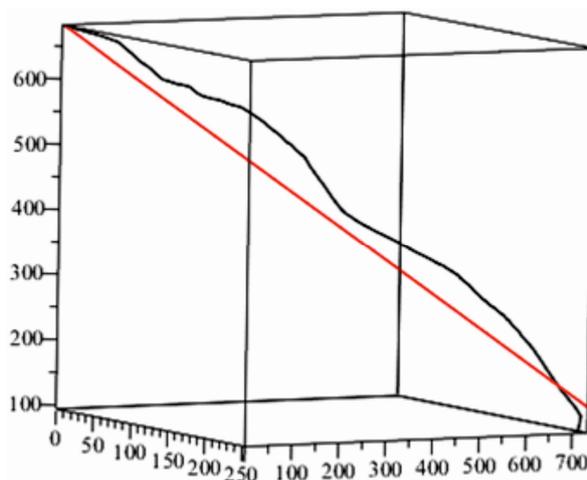


Рисунок 4 – Теоретическая и фактическая траектории движения парашютиста
Figure 4 – Theoretical and real trajectory of a parachutist

Для окончательных выводов по рассмотренной модели рассчитаем индекс корреляции как по фактическим, так и по теоретическим координатам.

Получаем: индекс корреляции для переменной x равен 0,99, для переменной y имеет значение 0,47, для переменной z составил 0,94.

Таким образом, представленная математическая модель, которая описана с помощью системы дифференциальных уравнений (18), является пригодной для демонстрации траектории прыжка парашютиста на этапе снижения на раскрытом парашюте.

Библиографический список

1. **Лобанов Н. А.** Основы расчета и конструирования парашютов. М.: Машиностроение, 1965. 365 с.
2. **Лялин В. В.** Парашютные системы / В. В. Лялин, В. И. Морозов, А. Т. Пономарев. М.: Физматлит, 2009. 506 с.
3. **Клочкова И. Ю.** Математическое моделирование движения парашютиста на этапе снижения на раскрытом парашюте // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование. 2021. № 2. С. 26-30.
4. **Мамонов С. С. Клочкова И. Ю.** Моделирование движения парашютиста при раскрытом парашюте // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2018. № 66. С. 64-70.
5. **Малкин И. Г.** Теория устойчивости движения. М.: URSS, 2017. 432 с.
6. **Миронов В. В.** Методы анализа устойчивости систем и управляемости движением: монография / В. В. Миронов, Н. А. Северцев. ВЦ РАН им. А. А. Дородницына. М.: ИРУДН, 2002. 165 с.
7. **Миронов В. В., Митрохин Ю. С.** Технологический подход к исследованию устойчивости динамических систем: системный анализ динамических процессов // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2017. № 59. С. 114-126.
8. **Миронов В. В., Митрохин Ю. С.** Технологический подход к исследованию устойчивости динамических систем: прикладные вопросы // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2017. № 59. С. 127-135.
9. **Боровков А. А.** Математическая статистика. СПб.: Лань, 2010. 704 с.

UDC 004.942

RESEARCH OF STABILITY OF PARACHUTIST'S MOTION IN SPECIAL CASES

I. Y. Klochkova, teacher of the department, Ryazan Guards Higher Airborne Command School, Ryazan, Russia;

orcid.org/0000-0002-4265-6759, e-mail: i-usacheva@mail.ru

A mathematical model of parachutist movement describing the stage of descent on open parachute is considered.

The aim of the work is to study the system of ordinary differential equations describing the speed of parachutist movements for the presence and stability of equilibrium states. Initially, the system of differential equations determines the relationship between the acceleration of parachute and the velocity for each of three space coordinates. Various variations of this system of differential equations are considered. Theorems on the number and stability of equality states are proved.

Numerical coefficients values for the system of differential equations based on real data of jumps obtained using a special program installed on parachutist mobile device by regression analysis method are obtained. The equilibrium states for each jump, their stability, practical significance and maximum value of the speed at the time of landing are determined. Theoretical parachutist trajectory for the obtained system of differential equation is constructed; its comparison with actual trajectory is carried out.

Key words: *mathematical model of parachutist movement, equilibrium state, regression analysis, correlation coefficient, parachutist trajectory, parachutist landing speed.*

DOI: 10.21667/1995-4565-2021-78-120-129

References

1. **Lobanov N. A.** *Osnovy rascheta i konstruirovaniya parashyutov* (Fundamentals of calculation and design of parachutes). Moscow: Mashinostroenie. 1965. 365 p. (in Russian).
2. **Lyalin V. V., Morozov V. I., Ponomarev A. T.** *Parashyutnye sistemy* (Parachute systems). Moscow: Fizmatlitno 2009. 506 p. (in Russian).
3. **Klochkova I. Yu.** Matematicheskoe modelirovanie dvizheniya parashyutista na etape snizheniya na raskrytom parashyute. *Differencial'nye uravneniya i matematicheskoe modelirovanie*. 2021, no. 2, pp. 26-30. (in Russian).
4. **Mamonov S. S., Klochkova I. Yu.** Modelirovanie dvizheniya parashyutista pri raskrytom parashyute. *Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2018, no. 66, pp. 64-70. (in Russian).
5. **Malkin I. G.** *Teoriya ustojchivosti dvizheniya* (Theory of motion stability). Moscow: Nauka, 1966. 530 p. (in Russian).
6. **Mironov V. V.** *Metody analiza ustojchivosti sistem i upravlyaemosti dvizheniem: monografiya* / V. V. Mironov, N. A. Severcev. VC RAN im. A. A. Dorodnicyna. Moscow: IRUDN. 2002, 165 p. (in Russian).
7. **Mironov V. V., Mitrohin Yu. S.** Tekhnologicheskij podhod k issledovaniyu ustojchivosti dinamičeskikh sistem: sistemnyj analiz dinamičeskikh processov. *Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2017, no. 59, pp. 114-126. (in Russian).
8. **Mironov V. V., Mitrohin Yu. S.** Tekhnologicheskij podhod k issledovaniyu ustojchivosti dinamičeskikh sistem: prikladnye voprosy. *Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2017, no. 59, pp. 127-135. (in Russian).
9. **Borovkov A. A.** *Matematicheskaya statistika* (Mathematical statistics). St. Petersburg: Lan, 2010. 704 p. (in Russian).