УДК 004.724

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПЛАНИРОВАНИЯ УПОРЯДОЧЕННОГО НАБОРА ОПЕРАЦИЙ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗНОРОДНЫХ РЕСУРСОВ В ПРОМЫШЛЕННЫХ ТЕЛЕКОММУНИКАЦИОННЫХ СЕТЯХ

Д. А. Перепелкин, д.т.н., доцент, декан ФВТ РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0003-4775-5745, e-mail: perepelkin.d.a@rsreu.ru
А. М. Фам, аспирант РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0002-3055-3568, e-mail: phamanhminh231@gmail.com

В настоящее время задача планирования и распределения ресурсов в промышленных системах и сетях является достаточно важной и актуальной. ***Цель работы*** *– разработка математических моделей планирования упорядоченного набора операций для распределения разнородных ресурсов в промышленных телекоммуникационных сетях. Рассмотрено несколько случаев связи между операциями и процессами в промышленной сети. Предложены математические модели для нахождения вероятности определения пары операций, выполненных одной единицей ресурса. Разработана методика определения вероятности двух операций с помощью значения математического ожидания и дисперсии случайных величин по неравенству Чебышева. Для вычисления количества упорядоченных наборов операций в работе предложено использовать метод решения задачи о максимальном потоке. Для подтверждения эффективности предложенных подходов проведены эксперименты в промышленной сети на основе модели GERT-сети с несколькими параллельными процессами. Результаты проведенных экспериментов позволяют оптимизировать объем выделяемых ресурсов с определенной вероятностью завершения процессов.*

Ключевые слова: *промышленные телекоммуникационные сети, разнородные ресурсы, упорядоченный набор операций, закон распределения вероятностей, случайная величина, неравенство Чебышева, максимальный поток, модель GERT-сети.*

DOI: 10.21667/1995-4565-2022-79-56-67

Введение

В промышленных телекоммуникационных системах обычно одновременно выполняется некоторое множество процессов. Информационное единство поддерживается централизованным банком данных. Время пересылки информации между абонентскими системами считаем пренебрежимо малым по сравнению с временем выполнения отдельных операций. Процесс состоит из множества операций и описывается стохастической моделью. Узлы сети соответствуют состояниям процесса, а каждая его операция характеризуется условной вероятностью выполнения, математическим ожиданием времени выполнения и его дисперсией. Закон распределения времени выполнения операции примем известным. Операция может быть выполнена любой из N единиц ресурса определенного вида. Каждому виду ресурса соответствует набор операций, реализующихся в различных процессах.

Для моделирования стохастических систем часто используют модель GERT-сети, которая применяется в различных областях [1-3]. Это позволяет учесть возможные случайные отклонения в ходе выполнения отдельных операций, что особенно важно для прогнозирования нежелательных изменений времени выполнения всего проекта. В телекоммуникационных сетях фактор времени играет важную роль в оценке эффективности и производительности сетевой системы [4-6]. Для повышения эффективности GERT-сети в работах [7-9] добавлен параметр ресурса. Под ресурсом понимаются вычислительные и финансовые средства, серверы, промышленное оборудование и т.п.

Если выполняемые операции принадлежат простому *s-t*-пути, то выполнение одной из них начинается после того, как закончена предыдущая операция. Обе эти операции могут быть выполнены одной единицей ресурса. Такой же вывод справедлив и для всего множества операций, входящих в простой *s-t*-путь, если они могут быть выполнены одной единицей ресурса.

Иначе обстоит дело в случае, когда выполняемые операции относятся к разным *s-t*-путям. Если начало и окончание выполнения любой операции описываются законом распределения, то задача определения того, что пара операций может быть выполнена одной единицей ресурса, имеет вероятностный характер. Если плотности распределения вероятностей случайных исходов окончания одной операции и начала другой операции разнесены на достаточно большое расстояние по оси времени (такое, что вероятность одновременного выполнения двух операций была бы близка к нулю), то эти операции могут быть выполнены одной единицей ресурса.

Следовательно, необходимо определить порядок выполнения операций в наборе для распределения ресурса каждого типа таким образом, чтобы вероятность задержки проекта из-за нехватки ресурса была не выше заданной.

Теоретическая часть

Каждый из процессов $a_i \in A = \{a_i\}, i = \overline{1,m},$ состоящий из множества операций $B_i = \{b_{ij}\}, j = \overline{1,k},$ опишем циклическим графом, для которого определим одну случайную его ациклическую реализацию. Тогда время начала каждой операции характеризуется математическим ожиданием m_{1ij} и дисперсией σ^2_{1ij}, а время окончания операций – математическим ожиданием m_{2ij} и дисперсией σ^2_{2ij}, определенными относительно момента времени начала *i*-го процесса t_{0i}. Обозначим через $C_{i\alpha} = \{ c_{i\alpha\beta}\}, \alpha = \overline{1,l}, \beta = \overline{1,h},$ подмножество операций, составляющих одну случайную реализацию графа *i*-го процесса.

Рассмотрим два случая. В первом из них операции относятся к различным процессам и возможность их выполнения одной единицей ресурса задается функцией, определяемой законами распределения вероятностей времени окончания одной и начала другой операций.

Во втором случае обе операции относятся к одному процессу и возможность их выполнения одной единицей ресурса будет определяться вероятностью последовательного выполнения двух операций.

Нахождение вероятности определения пары операций, принадлежащих двум разным процессам, выполненных одной единицей ресурса

Пусть независимые случайные величины *X* и *Y* выражают время окончания операции b_r и начала операции b_s соответственно (*r* и *s* – номера процессов, $r \neq s$), а $f_r(x)$ и $f_s(y)$ есть плотности распределения вероятностей величин *X* и *Y*.

Случайная величина *Z* характеризует промежуток времени между двумя операциями. Плотность распределения $f_{rs}(z)$ разности $Z = Y - X$ равна [10]:

$$f_{rs}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_r(x) f_s(x-z)\,dx\,. \tag{1}$$

Чтобы пара операций (b_r, b_s) выполнялась единицей ресурсов, время начала операции b_s должно быть позже времени окончания операции b_r. Другими словами, разность временного интервала между временем начала операции b_s и временем окончания операции b_r должна быть больше или равна нулю. Вероятность P_{rs_κ} того, что любая пара операций (b_r, b_s), принадлежащих разным процессам, может быть выполнена одной единицей ресурса, имеет вид:

$$P_{rs_\kappa} = \int_0^\infty \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_r(x) f_s(x-z)\, dx \right] dz\,. \tag{2}$$

В том случае, когда X задано непрерывной, а Y – дискретной случайными величинами, вероятность P_{rs_κ} находится следующим образом. Если $p_1, p_2, \ldots, p_v; T_1, T_2, \ldots, T_v$ определяют вероятности и соответствующие им значения y величины Y, то справедливо выражение:

$$P_{rs_\kappa} = 1 - \sum_{\gamma=1}^{v} p_\gamma \int_{T_\gamma}^{\infty} f_r(x)\, dx\,. \tag{3}$$

Значения интегралов вычисляем рекуррентно интегрированием плотности $f_r(x)$ на отрезках $\left[T_v, T_{v-1} \right]$, $\left[T_{v-1}, T_{v-2} \right], \ldots, \left[T_2, T_1 \right]$ последовательным нахождением слагаемых в этом выражении при $\gamma = v, v-1, v-2, \ldots, 2, 1$.

В том случае, когда X является дискретной, а Y – непрерывной случайными величинами, вероятность P_{rs_κ} вычисляется по формуле:

$$P_{rs_\kappa} = 1 - \sum_{\gamma=1}^{w} q_\gamma \int_{-\infty}^{\tau_\gamma} f_s(y)\, dy\,, \tag{4}$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_w; \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_w$ – вероятности и значения x величины X.

Если и X и Y являются дискретными случайными величинами, то

$$P_{rs_\kappa} = 1 - \sum_{\gamma=1}^{v} p_\gamma \sum_{\forall \tau > T_j} q_i\,, \tag{5}$$

где $q_i, \tau_i \, (i = \overline{1, w})$ и $p_j, T_j \, (j = \overline{1, v})$ – вероятности каждого из w значений X и v значений Y соответственно.

Вычисление выражений (2-5) является достаточно трудоемким, поэтому для оперативного распределения ресурсов целесообразно значение P_{rs_κ} найти более простыми приемами.

В случае, если временной интервал между двумя операциями является относительно большим, то по неравенству Чебышева вероятность P_{rs_κ} может быть определена только с помощью значения математического ожидания и дисперсии случайных величин.

Пусть (b_r, b_s) есть двойка, в которой операции b_r и b_s принадлежат случайным реализациям графов a_r и a_s соответственно. Операции b_r и b_s имеют следующие характеристики: математические ожидания выполнения m_r и m_s, дисперсии σ_r^2 и σ_s^2 соответственно. Есть также m_{2r} и σ_{2r}^2 – математическое ожидание и дисперсия времени окончания операции b_r. А m_{1s} и σ_{1s}^2 – математическое ожидание и дисперсия времени начала операции b_s. Если $m_{2r} > m_{1s}$, $1 \le r \le i_m$, $1 \le s \le i_m$, $r \ne s$, то пара (b_r, b_s) не может быть выполнена одной единицей ресурса с заданной вероятностью.

Пусть t_{1r} и t_{2r} есть моменты начала и окончания операции b_r, а t_{1s} и t_{2s} – моменты начала и окончания операции b_s соответственно. Каждая из дисперсий σ_{2r}^2 и σ_{1s}^2 пары (b_r, b_s) будет определяться суммой дисперсий множества $H = \{ h_\delta \}, \delta = \overline{1, \delta_m}$ операций, предшествующих работе b_r, и множества $L = \{ l_\phi \}, \phi = \overline{1, \phi_m}$ операций, предшествующих операции b_s. Множества H и L задаются случайными реализациями стохастических графов процессов.

Математические ожидания и дисперсия имеют следующий вид:

$$m_{2r} = m_r + \sum_{1}^{\delta_m} m_{h_\delta}, \sigma_{2r}^2 = \sigma_r^2 + \sum_{1}^{\delta_m} \sigma_{h_\delta}^2,$$
$$m_{1s} = \sum_{1}^{\phi_m} m_{l_\phi}, \sigma_{1s}^2 = \sum_{1}^{\phi_m} \sigma_{l_\phi}^2. \quad (6)$$

Если выполняются следующие условия, пара (b_r, b_s) может быть выполнена единицей ресурса:

$$m_{1s} >> m_{2r}, \quad (7)$$
$$P_{rs_к} = P_r \cdot P_s \ge P_{rs_{к-зад}}. \quad (8)$$

В выражении (8) $P_{rs_{к-зад}}$ является заданной вероятностью того, что две операции выполняются одной единицей ресурса, когда эти две операции принадлежат двум разным процессам. P_r и P_s – вероятности того, что моменты t_{2r} и t_{1s} попадают в определенные интервалы. В соответствии с неравенством Чебышева они определяются следующими выражениями [11]:

$$P_r\left\{\left|t_{2r} - m_{2r}\right| \le k_{2r}\sigma_{2r}\right\} \le 1 - \frac{1}{k_{2r}^2}, k_{2r} > 0;$$
$$P_s\left\{\left|t_{1s} - m_{2s}\right| \le k_{1s}\sigma_{1s}\right\} \le 1 - \frac{1}{k_{1s}^2}, k_{1s} > 0; \quad (9)$$

где k_{1s}, k_{2r} – произвольно положительные числа.

Поскольку вероятность любого события всегда больше или равна нулю, имеем:

$$0 \le 1 - \frac{1}{k_{2r}^2} \Rightarrow k_{2r} \ge 1,$$
$$0 \le 1 - \frac{1}{k_{1s}^2} \Rightarrow k_{1s} \ge 1. \quad (10)$$

Из выражений (8) и (9) получаем:

$$\frac{(k_{2r} + k_{1s})^2 - 2k_{2r}k_{1s} - 1}{k_{2r}^2 k_{1s}^2} \le 1 - P_{rs_{к-зад}}. \quad (11)$$

Пусть сумма и произведение двух положительных чисел k_{2r} и k_{1s} равны u и v соответственно:

$$\left.\begin{aligned} u &= k_{2r} + k_{1s} \\ v &= k_{2r}k_{1s} \end{aligned}\right\} \Rightarrow u^2 \ge 4v. \quad (12)$$

Подставляя u и v в выражение (11), получаем:

$$\frac{u^2 - 2v - 1}{v^2} \le 1 - P_{rs_{к-зад}}, v^2 \ne 0. \quad (13)$$

Из (10), (12) и (13) устанавливается следующая система неравенств:

$$\begin{cases} u^2 \le (1 - P_{rs_{к-зад}})v^2 + 2v + 1 \\ u^2 \ge 4v \\ u \ge 2 \\ v \ge 1 \end{cases}. \quad (14)$$

Решение указанной системы неравенств дает минимальное значение тогда и только тогда, когда:

$$v = \frac{1}{1 - \sqrt{P_{rs_{к-зад}}}}, u = \frac{2}{\sqrt{1 - \sqrt{P_{rs_{к-зад}}}}}, P_{rs_{к-зад}} \ne 1. \quad (15)$$

Тогда минимальное значение $k_{\min}$ положительных чисел k_{2r} и k_{1s} имеет следующий вид:

$$k_{\min} = k_{2r_{\min}} = k_{1s_{\min}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sqrt{P_{rs_{\kappa-\text{зад}}}}}}. \tag{16}$$

Согласно условию (7), вероятность P_{rs_κ} достигается, когда расстояние между математическими ожиданиями двух случайных величин удовлетворяет следующему условию:

$$m_{1s} - m_{2r} \geq k_{2r}\sigma_{2r} + k_{1s}\sigma_{1s}. \tag{17}$$

Если успешно выбрать значения k_{2r} и k_{1s} таким образом, чтобы выполнялись условия (7) и (8), то гарантируется выполнение операций одной единицей ресурса с вероятностью не ниже $P_{rs_{\kappa-\text{зад}}}$.

Тогда вероятность P_{rs_κ} достигается, когда:

$$\begin{cases} m_{1s} - m_{2r} \geq k_{\min}\left(\sigma_{2r} + \sigma_{1s}\right), \\ k_{\min} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sqrt{P_{rs_{\kappa-\text{зад}}}}}}, 0 \leq P_{rs_{\kappa-\text{зад}}} < 1. \end{cases} \tag{18}$$

Если плотности распределения двух случайных величин являются одномодальными распределениями, то по неравенству Высочанского – Петунина выражение (18) преобразуется к следующему виду [12]:

$$\begin{cases} m_{1s} - m_{2r} \geq \lambda_{\min}\left(\sigma_{2r} + \sigma_{1s}\right), \\ \lambda_{\min} = \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{\sqrt{1-\sqrt{P_{rs_{\kappa-\text{зад}}}}}}, \dfrac{25}{36} < P_{rs_{\kappa-\text{зад}}} < 1, \end{cases} \tag{19}$$

где $\lambda_{\min}$ – минимальное значение положительных чисел k_{2r} и k_{1s} по неравенству Высочанского – Петунина.

Зависимости чисел $k_{\min}$, $\lambda_{\min}$ от вероятности $P_{rs_{\kappa-\text{зад}}}$ приведены на рисунках 1 и 2.

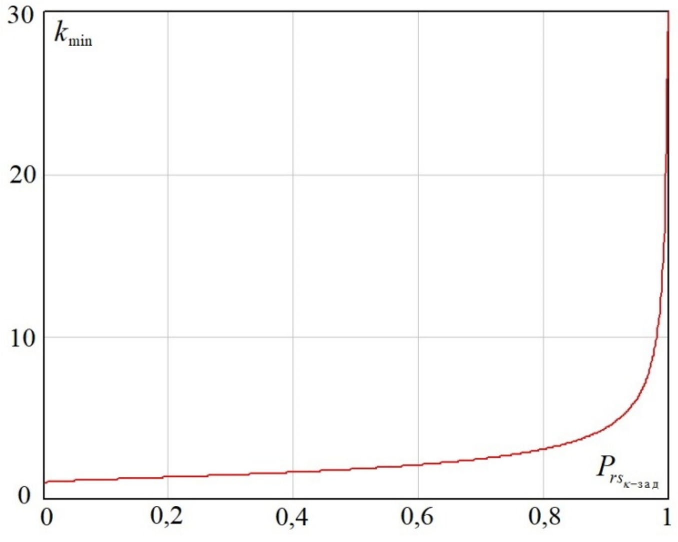

Рисунок 1 – Зависимость параметра $k_{\min}$ от вероятности $P_{rs_{\kappa-\text{зад}}}$

Figure 1 – Dependence of parameter $k_{\min}$ on probability $P_{rs_{\kappa-\text{зад}}}$

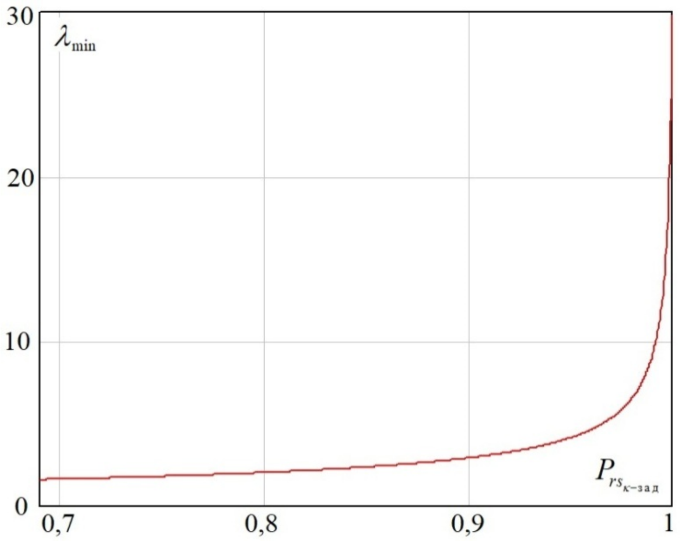

Рисунок 2 – Зависимость параметра $\lambda_{\min}$ от вероятности $P_{rs_{\kappa-\text{зад}}}$

Figure 2 – Dependence of parameter $\lambda_{\min}$ on probability $P_{rs_{\kappa-\text{зад}}}$

Пусть $E=\{l_\varphi\}$ есть множество операций, определенных одной случайной реализацией стохастического графа *i*-го процесса, и $\varphi=\overline{\phi_m+1,\varphi_m}$. Если $P_{rs_\kappa}\ge P_{rs_{\kappa-\text{зад}}}$, то пара операций $(b_r,\forall b_s\in E)$ может быть выполнена одной единицей ресурса с вероятностью $P_{rs_\kappa}\ge P_{rs_{\kappa-\text{зад}}}$.

Вероятность P_n того, что одной единицей ресурса может быть последовательно выполнено *n* операций, равна:

$$P_n=\prod_{\zeta=1}^{n-1}P_{rs_{\kappa\zeta}}\ , \tag{20}$$

а вероятность P_{nN} того, что *N* единицами ресурса данного вида будет последовательно выполнено *n* операций, принадлежащих различным процессам, равна:

$$P_{nN}=\prod_{\eta=1}^{N}\prod_{\zeta=1}^{n-1}P_{rs_{\kappa\zeta\eta}}\ . \tag{21}$$

Нахождение вероятности определения пары операций, принадлежащих одному процессу, выполненных одной единицей ресурса

Для случайной реализации стохастического графа *i*-го процесса можно определить подмножества операций (дуг), которые должны выполняться последовательно друг за другом одной единицей ресурса. Стохастический граф, описывающий технологический процесс обработки информации, часто содержит несколько последовательно выполняемых операций с безусловными вероятностями выполнения, равными единице, за которыми, в свою очередь, могут так же последовательно выполняться одна или несколько операций с условными вероятностями выполнения, близкими к единице.

Пусть случайная реализация стохастического графа *C* содержит последовательность операций $Q=\{q_\theta\}, \theta=\overline{1,\theta_m}$, для выполнения которых необходим ресурс данного вида. Для каждой операции $q_\theta\in Q$ задана вероятность ее выполнения P_θ. Любая двойка операций (q_r,q_s) из заданной последовательности может быть выполнена одной единицей ресурса, если вероятность последовательного выполнения двух операций $P_{rs_\lambda}\ge P_{rs_{\lambda-\text{зад}}}$, где $P_{rs_{\lambda-\text{зад}}}$ – заданное значение вероятности для любой пары операций последовательности, принадлежащих одному процессу. Другими словами, вероятность того, что операция q_s будет выполнена, когда операция q_r уже выполнена $(r,s \in \theta; r < s)$. Вероятность P_{rs_λ} определяется произведением вероятностей выполнения всех операций – от операции q_r до операции q_s при $r < s$:

$$P_{rs_\lambda} = \prod_{\theta=r}^{s} P_\theta . \quad (22)$$

Когда две операции q_r и q_s находятся в нескольких реализациях, тогда вероятность P_{rs_λ} пары операций равна сумме вероятностей всех m реализаций, содержащих две операции:

$$P_{rs_\lambda} = \sum_{i=1}^{m} P_{rs_{\lambda i}} . \quad (23)$$

Рассмотрим множество операций, в котором ζ_m пар операций не являются последовательными, возможность выполнения пары операций одной единицей ресурса определяется различными законами распределения вероятностей окончания первой и начала второй операций, и θ_m последовательных пар операций, окончание одной и начало второй операции характеризуются одной случайной величиной, то вероятность выполнения множества операций одной единицей ресурса будет равна:

$$P_n = \prod_{\zeta=1}^{\zeta_m} P_{rs_{\kappa\zeta}} \prod_{\theta=1}^{\theta_m} P_{rs_{\lambda\theta}} , \quad (24)$$

а вероятность выполнения всех операций в заданное время N единицами ресурса данного вида будет равна:

$$P_{nN} = \prod_{\eta=1}^{N} \left(\prod_{\zeta=1}^{\zeta_m} P_{rs_{\kappa\zeta\eta}} \prod_{\theta=1}^{\theta_m} P_{rs_{\lambda\theta\eta}} \right). \quad (25)$$

Далее, для определения необходимого объема ресурсов решаем задачу максимального потока в сети с ограниченной пропускной способностью [13-15], где узлы определяют операции, которые могут быть объединены для выполнения одной единицей ресурса, а дуги между узлами показывают возможности последовательности операций. Совокупность упорядоченных наборов операций определяет минимальное число N единиц такого ресурса, необходимых для всех процессов в системе.

Экспериментальная часть

Представим промышленную телекоммуникационную сеть в виде обобщенной модели GERT-сети, состоящей из четырех параллельных процессов, изображенной на рисунке 3. Детальные модели процессов, показывающие взаимосвязь между операциями в каждом процессе, приведены на рисунке 4. Толстой линией изображены дуги, соответствующие операциям, для выполнения которых необходим ресурс данного вида. Характеристики дуг приведены в таблице 1.

Пусть общая заданная вероятность $P_{rs_{\text{зад}}} \geq 0,98$. Тогда для тех пар операций (b_r, b_s), для которых $m_{2r} \leq m_{1s}$, вычисляем по формуле (3) значение P_{rs}. Результаты вычислений приведены в таблице 2. Знаком * в данной таблице помечены пары (b_r, b_s), для которых $m_{2r} > m_{1s}$. В случаях, когда не требуется высокая точность и снижается вычислительная сложность, можно использовать выражение (18) или (19). Те пары (b_r, b_s), для которых $P_{rs} \geq 0,98$, могут быть выполнены одной единицей ресурса.

Максимальный поток достигается при следующих назначениях: $R_2 \to R_{11}$, $R_6 \to R_{19}$, $R_{11} \to R_6$, $R_{13} \to R_8$, $R_{15} \to R_{24}$, $R_{19} \to R_{15}$, $R_{22} \to R_{13}$. Максимальное соответствие приведено на рисунке 5. Следовательно, одна единица ресурса может последовательно выполнить операции, соответствующие дугам $R_2 \to R_{11} \to R_6 \to R_{19} \to R_{15} \to R_{24}$, а другая – $R_{22} \to R_{13} \to R_8$.

Если каждому процессу проектирования изначально требуется единица ресурса, то количество необходимых единиц ресурсов было понижено с $N = 4$ до $N = 2$ с вероятностью завершения $P_{nN} = 0,9606$.

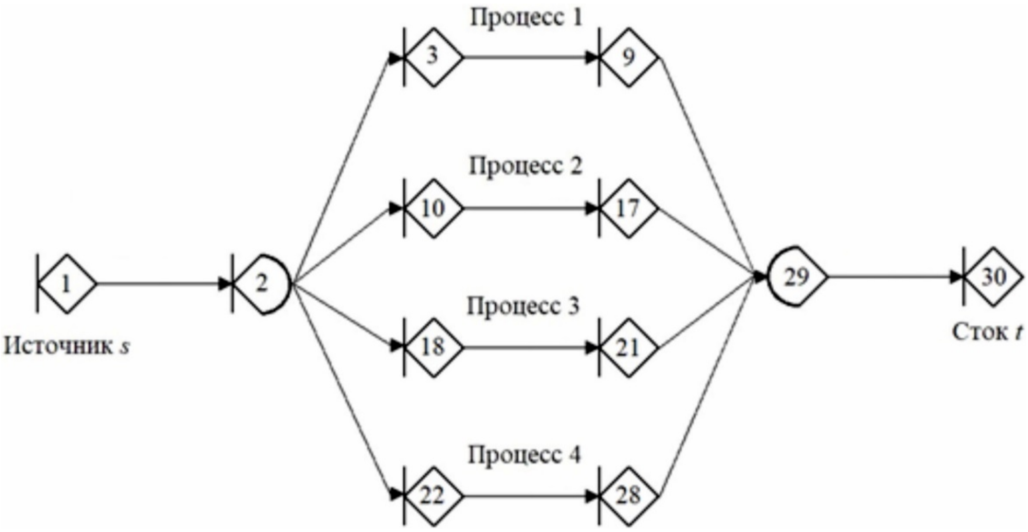

Рисунок 3 – Обобщенная модель GERT-сети системы
Figure 3 – Generalized model of the GERT-network of the system

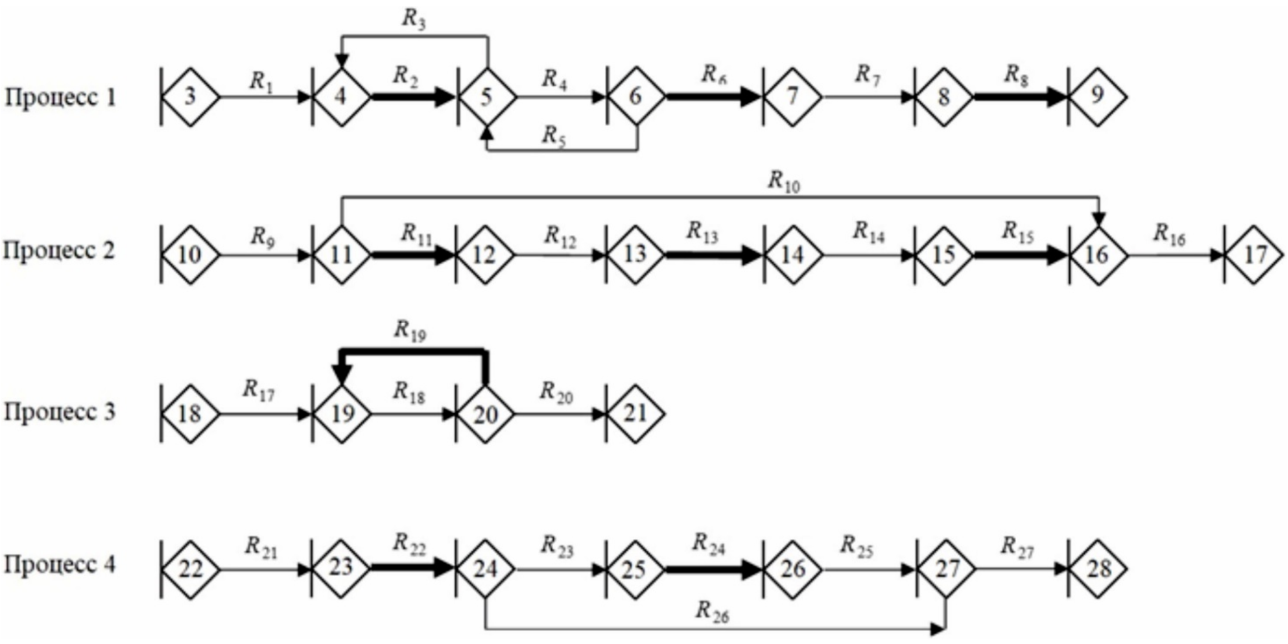

Рисунок 4 – Детальные модели процессов
Figure 4 – Detailed models of the processes

Таблица 1 – Характеристики дуг
Table 1 – Arc characteristics

Дуга	Вероятность	Распределение	Параметры		Требуется ли ресурс данного вида
			m	σ^2	
R_1	1	Нормальное	R_2	R_2	Нет
R_2	1	Нормальное	R_3	R_3	Да
R_3	0,01	Нормальное	R_4	R_4	Нет
R_4	0,99	Нормальное	R_5	R_5	Нет

Дуга	Вероятность	Распределение	Параметры		Требуется ли ресурс данного вида
			m	σ^2	
R_5	0,01	Нормальное	R_6	R_6	Нет
R_6	1	Нормальное	R_7	R_7	Да
R_7	1	Нормальное	8	3	Нет
R_8	1	Нормальное	5	1	Да
R_9	1	Нормальное	4	0,1	Нет
R_{10}	0,01	Нормальное	2	0,01	Нет
R_{11}	0,99	Нормальное	2	0,1	Да
R_{12}	1	Нормальное	3	0	Нет
R_{13}	1	Нормальное	4	0,2	Да
R_{14}	1	Нормальное	6	1	Нет
R_{15}	1	Нормальное	1	0,5	Да
R_{16}	0,01	Нормальное	2	0,01	Нет
R_{17}	1	Нормальное	5	0	Да
R_{18}	1	Нормальное	10	0,02	Нет
R_{19}	0,01	Нормальное	1	0,02	Да
R_{20}	0,99	Нормальное	2	0,01	Нет
R_{21}	1	Нормальное	2	0	Нет
R_{22}	1	Нормальное	4	1	Да
R_{23}	0,99	Нормальное	19	1	Нет
R_{24}	1	Нормальное	2	0	Да
R_{25}	1	Нормальное	3	0,01	Нет
R_{26}	0,01	Нормальное	2	0,01	Нет
R_{27}	1	Нормальное	1	0,01	Нет

Таблица 2 – Значения вероятностей P_{rs}

Table 2 – Probability values P_{rs}

R	R_2	R_6	R_8	R_{11}	R_{13}	R_{15}	R_{19}	R_{22}	R_{24}
R_2	–	1	1	0,9986	1	1	1	0,5	1
R_6	0	–	1	*	*	0,9999	0,9814	*	1
R_8	0	0	–	*	*	*	*	*	0,5
R_{11}	*	0,9964	1	–	1	1	1	*	1
R_{13}	*	*	0,9986	0	–	1	0,999	*	1
R_{15}	*	*	0,5	0	0	–	*	*	0,9943
R_{19}	*	*	0,9616	*	*	0,9938	–	*	1
R_{22}	*	0,9893	1	*	0,9969	1	1	–	1
R_{24}	*	*	*	*	*	*	*	0	–

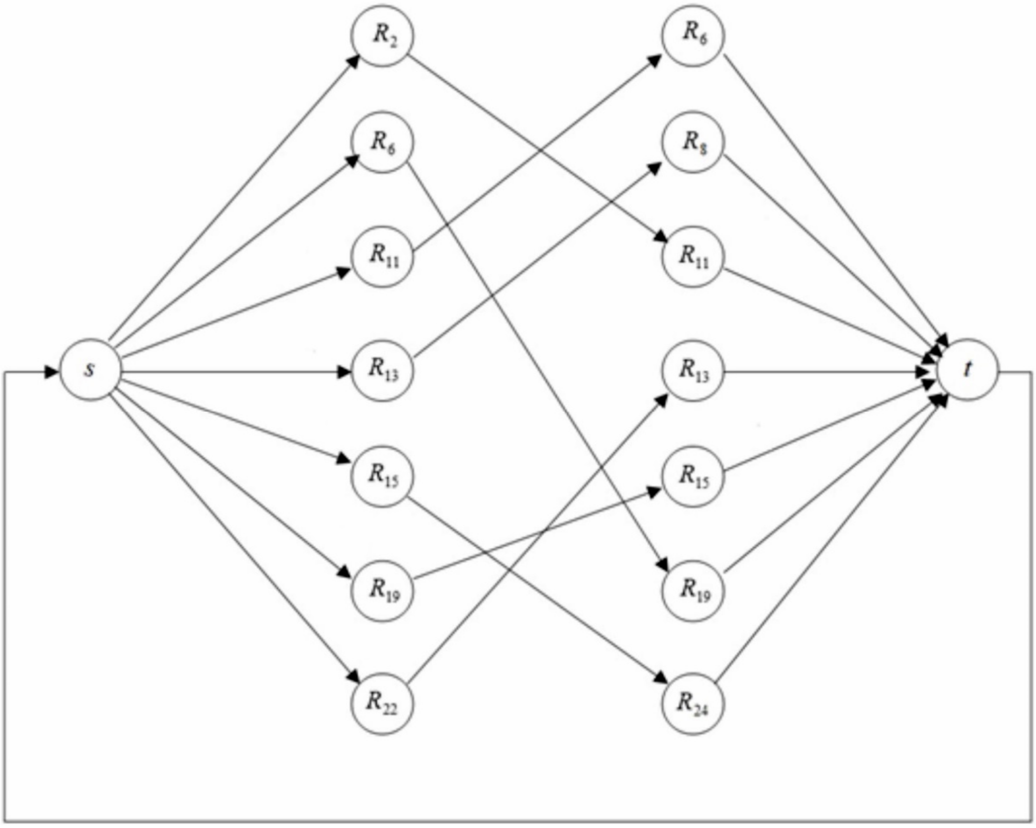

Рисунок 5 – Максимальное соответствие для определения порядка операций
Figure 5 – Maximum matching for determining the order of operations

Заключение

Разработаны математические модели планирования упорядоченного набора операций для распределения разнородных ресурсов в промышленных телекоммуникационных сетях. Одна единица ресурса может попеременно использоваться разными операциями. Если пара операций относится к различным процессам, то возможность их выполнения одной единицей ресурса определяется разностью случайных величин между временем начала одной и окончания другой операций. С помощью неравенства Чебышева можно упростить процесс расчета при отсутствии высоких требований к точности или при относительно больших временных интервалах между операциями. Если пара операций принадлежит одному процессу, то возможность их выполнения одной единицей ресурса определяется произведением вероятностей выполнения последовательных операций. Для определения порядка операций на наборе, выполненных одной единицей ресурса, в работе предложено использовать метод решения задачи о максимальном потоке. На основании проведенных экспериментов можно сделать вывод о возможности оптимизации количества ресурсов, необходимых для выполнения операций с определенной вероятностью завершения, путем изменения порядка предоставления ресурсов для операций.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ МД-3201.2022.1.6.

Библиографический список

1. **Pan X., He C., Wen T.** A SOS reliability evaluate approach based on GERT // Annual Reliability and Maintainability Symposium (RAMS), 2015, pp. 1-7.

2. **Li C., Lu L.** Research on emergency logistics distribution in complex environment based on GERT // International Conference on Machine Learning and Cybernetics (ICMLC), 2017, pp. 1-7.

3. **Qian T., Yongqiang Z., Yongfei L., Bo P.** Reliability Analysis on Aircraft Main Landing Gear System Based on Simulation of GERT // 3rd International Conference on Electronic Information Technology and Computer Engineering (EITCE), 2019, pp. 42-47.

4. **Корячко В. П., Шибанов А. П., Сапрыкин А. Н., Фам Х. Л.** Планирование полосы пропускания сетевых каналов при проведении испытаний летательных аппаратов // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2016. № 56. С. 52-57.

5. **Корячко В. П., Шибанов А. П., Шибанов В. А., Сапрыкин А. Н., Фам Х. Л.** Расчет показателей качества сети передачи данных измерительного пункта // Радиотехника. 2017. № 5. С. 124-130.

6. **Tsepkova M. I., Stupina A. A., Korpacheva L. N., Fedorova A. V., Shmeleva Z. N.** Time characteristics assessment of performance of information processing system using modified GERT-network. International Conference «High-tech and Innovations in Research and Manufacturing (HIRM-2019)» 6 May 2019, Krasnoyarsk, Russian Federation, vol. 1353.

7. **Перепелкин Д. А., Фам А. М., Нгуен А. З.** Задача планирования объема разнородных ресурсов в промышленных GERT-сетях с функционально зависимыми случайными операциями // Системы управления и информационные технологии, 2020. № 4(82). С. 35-39.

8. **Перепелкин Д. А., Фам А. М.** Математическая модель расчета вероятностно-ресурсных характеристик телекоммуникационных сетей с учетом важности выделяемых ресурсов // Системы управления и информационные технологии, 2021. № 2(84). С. 9-14.

9. **Perepelkin D. A., Pham A. M.** Computer Modeling System of Allocating and Planning Processes of Heterogeneous Resources in Industrial Telecommunication Networks. XVII International Symposium «Problems of Redundancy in Information and Control Systems» (REDUNDANCY), 2021, pp. 22-27.

10. **Вентцель Е. С., Овчаров Л. А.** Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М.: Высшая школа, 2000. – 480 с.

11. **Ключко В. К.** Математические модели неопределенности в теории и приложениях: учеб. Пособие – Рязань: ИП Коняхин А.В. (Book Jet), 2021. – 204 с.

12. **Липатников Л. А.** О возможности применения неравенства Высочанского – Петунина для надежной оценки точности геодезических измерений // Сборник материалов Международной научной конференции «Интерэкспо ГЕО-Сибирь 2016» / Сибирский государственный университет геосистем и технологий. – Новосибирск, 2016. Том 1. № 2. С. 92-96.

13. **Замятин А. П.** Графы и сети: Учеб. пособие. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2004. 160 с.

14. **Кормен Томас Х. и др.** Алгоритмы: построение и анализ, 3-е изд.: Пер. с англ. – М.: ООО «И.Д. Вильямс», 2013. – 1328 с.

15. **Еремеева Л. Э.** Потоки в сетях: Учеб. пособие. – Сыктывкар: СЛИ, 2012. – 98 с.

UDC 004.724

MATHEMATICAL MODELS OF PLANNING AN ORDERED SET OF OPERATIONS FOR DISTRIBUTION OF HETEROGENEOUS RESOURCES IN INDUSTRIAL TELECOMMUNICATION NETWORKS

D. A. Perepelkin, Dr. Sc. (Tech.), associate professor, Dean of FCE RSREU, Ryazan, Russia;
orcid.org/0000-0003-4775-5745, e-mail: perepelkin.d.a@rsreu.ru
A. M. Pham, post-graduate student, RSREU, Ryazan, Russia;
orcid.org/0000-0002-3055-3568, e-mail: phamanhminh231@gmail.com

*Currently, an urgent problem is the task of planning and distributing resources in industrial systems and networks. **The aim of the work** is to develop mathematical models of planning an ordered set of operations for distribution heterogeneous resources in industrial telecommunication networks. Several cases of connection between operations and processes in industrial network are considered. Mathematical models to find the probability of determining a pair of operations performed by one resource unit are proposed. A technique for determining the probability of two operations using mathematical expectation value and the variance of random variables according to the Chebyshev inequality has been developed. To calculate the number of ordered sets of operations, the paper proposes to use the method of solving maximum flow problem. To confirm the effectiveness of the proposed approaches, experiments were carried out in an industrial network* *based on the GERT network model with several parallel processes. The results of the experiments performed allow us to optimize the amount of allocated resources with a certain probability of process completion.*

Key words: *industrial telecommunications networks, heterogeneous resources, ordered set of operations, distribution law, random variable, Chebyshev's inequality, maximum flow, GERT-network model.*

DOI: 10.21667/1995-4565-2022-79-56-67

References

1. **Pan X., He C., Wen T.** A SOS reliability evaluate approach based on GERT. *Annual Reliability and Maintainability Symposium* (*RAMS*), 2015, pp. 1-7.

2. **Li C., Lu L.** Research on emergency logistics distribution in complex environment based on GERT. *International Conference on Machine Learning and Cybernetics* (*ICMLC*), 2017, pp. 1-7.

3. **Qian T., Yongqiang Z., Yongfei L., Bo P.** Reliability Analysis on Aircraft Main Landing Gear System Based on Simulation of GERT. *3rd International Conference on Electronic Information Technology and Computer Engineering* (*EITCE*), 2019, pp. 42-47.

4. **Korjachko V. P., Shibanov A. P., Saprykin A. N., Fam X. L.** Planirovanie polosy propuskanija setevyh kanalov pri provedenii ispytanij letatel'nyh apparatov. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radiotehnicheskogo universiteta*, 2016, no. 56, pp. 52-57 (in Russian).

5. **Korjachko V. P., Shibanov V. A., Shibanov V. A., Saprykin A. N., Fam X. L.** Raschet pokazatelej kachestva seti peredachi dannyh izmeritel'nogo punkta. *Radiotehnika*, 2017, no. 5. pp. 124-130 (in Russian).

6. **Tsepkova M. I., Stupina A. A., Korpacheva L. N., Fedorova A. V., Shmeleva Z. N.** Time characteristics assessment of performance of information processing system using modified GERT-network. *International Conference «High-tech and Innovations in Research and Manufacturing* (*HIRM-2019*)» 6 May 2019, Krasnoyarsk, Russian Federation, vol. 1353.

7. **Perepelkin D. A., Fam A. M., Nguen A. Z.** Zadacha planirovanija ob#ema raznorodnyh resursov v promyshlennyh GERT-setjah s funkcional'no zavisimymi sluchajnymi operacijami. *Sistemy upravlenija i informacionnye tehnologii*, 2020, no. 4(82), pp. 35-39 (in Russian).

8. **Perepelkin D. A., Fam A. M.** Matematicheskaja model' rascheta verojatnostno-resursnyh harakteristik telekommunikacionnyh setej s uchetom vazhnosti vydeljaemyh resursov. *Sistemy upravlenija i informacionnye tehnologii*, 2021, no. 2(84), pp. 9-14 (in Russian).

9. **Perepelkin D. A., Pham A. M.** Computer Modeling System of Allocating and Planning Processes of Heterogeneous Resources in Industrial Telecommunication Networks. *XVII International Symposium «Problems of Redundancy in Information and Control Systems»* (REDUNDANCY), 2021, pp. 22-27.

10. **Ventcel' E. S., Ovcharov L. A.** *Teorija verojatnostej i ee inzhenernye prilozhenija*. M: Vysshaja shkola, 2000. 480 p (in Russian).

11. **Kljuchko V. K.** *Matematicheskie modeli neopredelennosti v teorii i prilozhenijah: ucheb. Posobie*. Rjazan': IP Konjahin A. V. (Book Jet), 2021. 204 p (in Russian).

12. **Lipatnikov L. A.** O vozmozhnosti primenenija neravenstva Vysochanskogo - Petunina dlja nadezhnoj ocenki tochnosti geodezicheskih izmerenij. *Sbornik materialov Mezhdunarodnoj nauchnoj konferencii «Interjekspo GEO-Sibir' 2016». Sibirskij gosudarstvennyj universitet geosistem i tehnologij. Novosibirsk,* 2016, vol. 1, no. 2, pp. 92-96 (in Russian).

13. **Zamjatin A. P.** *Grafy i seti: Ucheb. posobie*. Ekaterinburg: Izd-vo Ural. un-ta, 2004. 160 p. (in Russian).

14. **Kormen Tomas H. i dr.** *Algoritmy: postroenie i analiz*, 3-e izd.: Per. s angl. Moscow: OOO «I.D. Vi-l'jams», 2013. 1328 p (in Russian).

15. **Eremeeva L. Je.** *Potoki v setjah: Ucheb. posobie*. Syktyvkar: SLI. 2012. 98 p (in Russian).