

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 004.925.86

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ЗАКОНОМЕРНОСТЕЙ РОСТА ТРЕХМЕРНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ И СТОХАСТИЧЕСКИХ ФРАКТАЛОВ

К. А. Майков, д.т.н., профессор кафедры «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии» МГТУ им. Н.Э.Баумана, Москва, Россия;

orcid.org/0000-0003-1864-2397, e-mail: maikov@bmstu.ru

А. Н. Пылькин, д.т.н., профессор кафедры ВПМ РГРТУ, Рязань, Россия;

orcid.org/0000-0001-9925-2870, e-mail: pylkin.a.n@rsreu.ru

С. Н. Кузьменко, к.ф.м.н., доцент кафедры математики, физики и информатики ФГБОУ ВО «КГМТУ», Керчь, Россия;

orcid.org/0000-0002-1039-1274, e-mail: ksn1160@mail.ru

А. А. Теплов, аспирант кафедры «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии» МГТУ им. Н.Э.Баумана, Москва, Россия;

orcid.org/0000-0002-1785-6089, e-mail: teploff.aa@gmail.com

А. А. Бубнов, к.ф.-м.н., доцент кафедры ВПМ РГРТУ, Рязань, Россия;

orcid.org/0000-0002-8022-456X, e-mail: alexeybubnov81@gmail.com

Произведено моделирование роста фрактального комплекса классическим, однофазным, многофазным и стохастическим алгоритмами. Предложена методика анализа ростовых процессов, рассмотрены их основные характеристики. Выявлены закономерности роста метрических характеристик фракталов, их трансформация при смене алгоритма роста. Смоделировано влияние стохастических изменений элементов фрактала на процесс его роста. Сформулирован ряд общих закономерностей роста фрактальных структур. Показано, что использованные алгоритмы и методика анализа процессов роста обладают большим потенциалом для модернизации и адаптации к широкому кругу задач. Предложен обобщенный алгоритм роста трехмерных регулярных и стохастических фрактальных структур, отличительной особенностью которого является вариативность выбора алгоритма от решаемой задачи. Программная реализация предложенного алгоритма подтвердила правомочность рассмотренных решений при изучении и моделировании роста трехмерных фракталов.

Ключевые слова: трехмерные фракталы, рост трехмерных фракталов, геометрические фракталы, стохастические фракталы, алгоритмы построения фракталов, метрические характеристики фракталов.

DOI: 10.21667/1995-4565-2022-80-134-150

Введение

В настоящее время проблемы моделирования и исследования квазипериодических, нерегулярных и трехмерных фрактальных комплексов [8] являются актуальными и трудоемкими задачами. Особенно остро данные проблемы стоят в технологиях виртуальной и дополненной реальностей, где аппаратные ресурсы ограничены и чувствительны к быстрдействию предложенного программного комплекса. В силу того, что объекты реального мира являются фракталоподобными структурами [2, 6], то всестороннее исследование свойств фракталов и процессов их роста имеет существенную практическую значимость. До сих пор проблема роста фракталов ставилась только при моделировании роста растений методом L-систем [9, 10, 11, 14]. Но в этих работах отсутствует анализ процесса роста и акцент делается на выразительности графической структуры. Моделирование и исследование задач роста двумерных

фракталов для известных модельных случаев были отражены в [5], однако актуальной и слабоизученной остается проблема роста трехмерных фрактальных структур.

Это связано с тем, что животное и растительное многообразие является сложными комплексами фракталов, растущими из зачаточных форм малых размеров (клетка, семена и др.). Изучение процессов роста трехмерных фрактальных структур позволит создать и внедрить алгоритмы в программно-аппаратный комплекс, решающие задачу ростовых процессов.

Полезно выделить прямую и обратную задачи фрактального анализа. В прямой задаче по известному алгоритму вычисляется фрактал определенной формы. В обратной задаче по известной структуре или известному ростовому процессу восстанавливается алгоритм вычисления фрактала. Причем обратная задача относится к числу некорректных задач, т.к. ее решение неоднозначно. Решение обратной задачи можно выполнять методом подгонки: решать несколько прямых задач и выбирать решение, обеспечивающее наилучший результат.

Данная работа является логическим продолжением работ [4, 5] и ее целью является разработка нескольких алгоритмов роста и анализ процессов роста трехмерных регулярных и стохастических фракталов, формулировка общих закономерностей процессов роста.

Теоретическое описание регулярных фракталов в процессах роста

Общие закономерности роста пространственных фракталов удобнее исследовать на более простых моделях фракталов. Фрактальная размерность для пространственных фракталов заключена в интервале

$$2 < D < 3, \quad (1)$$

что указывает на положение таких фракталов между поверхностью и объемной фигурой классической геометрии. Именно поэтому в данной работе в качестве модели фрактала выбрана тетраэдрическая поверхность (рисунок 1): на каждом этапе роста ее основной геометрический элемент в форме правильного треугольника делится на четыре правильных треугольника и на месте центрального треугольника вырастает правильный тетраэдр. При этом каждая сторона правильного треугольника делится пополам и в процессе роста достигает размеров a_k , которые определяются законом преобразования и порядком фрактала k . Для исследования соотношения между ростом самих фракталов и объемной фигуры, ограниченной ими, четыре таких фрактала объединены в тетраэдр. Таким образом получаем фрактальный комплекс как простую модель процессов формообразования в природе.

Основные фрактальные соотношения для пространственных фрактальных поверхностей можно записать в представленном ниже виде. Для числа измерений или покрытий [1, 2, 3]

$$N = C_1 \varepsilon^{-D}, \quad (2)$$

и полной площади

$$S = C_2 \varepsilon^{2-D}, \quad (3)$$

Они содержат неопределенные множители C_1, C_2 – масштаб площади для покрытия фрактала и размерность фрактала

$$D = -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\ln N}{\ln \varepsilon} \right), \quad (4)$$

где безразмерный линейный пространственный масштаб ε удобно определить в относительной форме как

$$\varepsilon = \frac{a_k}{l_k} \quad (5)$$

где a_k – длина элементарного отрезка фрактала для порядка k , l_k – размах фрактала, т.е. расстояние между его крайними точками или сторона базового тетраэдра (рисунок 1).

Для тетраэдрической фрактальной поверхности соотношения (2-5) вычисляются точно без неопределенных множителей C_1, C_2 . Размах фрактала

$$l_k = 2^k a_k \quad (6)$$

где $k = 1, 2, 3 \dots$ – порядок фрактала. Площадь элементарного правильного треугольника со стороной a_k

$$S_0 = \frac{1}{2} a_k^2 \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4} a_k^2. \quad (7)$$

Число элементарных треугольников на одной грани

$$N = 6^k. \quad (8)$$

Полная площадь одной грани

$$S_k = 6^k S_0 = 6^k \frac{\sqrt{3}}{4} a_k^2. \quad (9)$$

Линейный пространственный масштаб

$$\varepsilon = 2^{-k}. \quad (10)$$

Как следствие из (4, 8, 10) получаем фрактальную размерность тетраэдрической поверхности

$$D = \frac{\ln 6}{\ln 2} \approx 2,585. \quad (11)$$

Объем базового тетраэдра, ограниченного фрактальными поверхностями, равен

$$V_{bk} = 2^{3k} V_0 = 2^{3k} \frac{a_k^3}{6\sqrt{2}}, \quad (12)$$

где $V_0 = a_k^3 / 6\sqrt{2}$ – объем элементарного тетраэдра со стороной a_k . Полный объем, ограниченный одной фрактальной поверхностью, равен сумме объемов всех тетраэдров, вырастающих к данному порядку k

$$V_k = 2^{3k-1} \left(1 - \left(\frac{3}{4} \right)^k \right) V_0. \quad (13)$$

Полная длина или периметр фрактальной решетки

$$L_k = 3 \cdot 2^k a_k + 3 \cdot 2^{k-1} (3^k - 1) a_k = 3 \cdot 2^{k-1} (3^k + 1) a_k. \quad (14)$$

Пространственный фрактал характеризуется следующими метрическими и угловыми характеристиками:

- 1) размах фрактала;
- 2) полная длина фрактальных линий (фрактальной решетки);
- 3) полная площадь фрактала;
- 4) объем фрактала;
- 5) траектории роста характерных точек фрактала;
- 6) спектр углов ориентации ребер фрактала;
- 7) спектр углов ориентации граней фрактала.

В процессах роста фракталов необходимо уметь управлять этими характеристиками и соотношениями между ними. При моделировании процессов роста реальных фрактальных структур это позволит эффективно понимать механизмы роста.

Обобщая результаты работы [5] и данного исследования, можно сказать, что процесс формирования и роста фрактала включает следующие принципиальные элементы.

1. Закон композиции – он определяет структуру фрактала и его основное свойство – самоподобие на различных пространственных масштабах. В данной работе закон композиции определяет тетраэдрическую поверхность.

2. Закон масштабного преобразования основного пространственного размера a_k при переходе от одного порядка фрактала к другому. Он определяет многообразие возможных законов роста и метрических отношений растущих фракталов.

3. Закон роста пространственного размера a_k после его деления или возникновения нового элемента фрактала. Например, линейный, логистический законы роста и т.д.

При традиционном построении фракталов первые два пункта не разделяются, т.к. используется один закон преобразования отрезков a_k . Третий пункт – отсутствует, т.к. отрезки a_k не растут, а берутся сразу необходимых размеров для каждого порядка фрактала в соответствии с законом преобразования.

Алгоритмы роста фракталов

Широта применений фракталов и природных проявлений роста фрактальных структур требуют и многообразия алгоритмов их роста. В данной работе предложены варианты роста фракталов, которые необходимо классифицировать по следующим трем критериям:

1) по закону преобразования основного пространственного размера a_k при переходе от одного порядка фрактала к другому;

2) по фазе роста отдельных элементов фрактала. В однофазных моделях детали одного порядка фрактала растут синхронно (с одной фазой). В многофазных моделях они растут независимо друг от друга – с фазовыми (временными) сдвигами;

3) по закону роста пространственного размера a_k , после его деления или возникновения нового элемента фрактала. Использовался линейный закон роста в зависимости от цикла роста, т.е. цикл роста является аналогом времени (пропорционален времени роста).

В соответствии с этими критериями предложено несколько алгоритмов роста, описанных ниже.

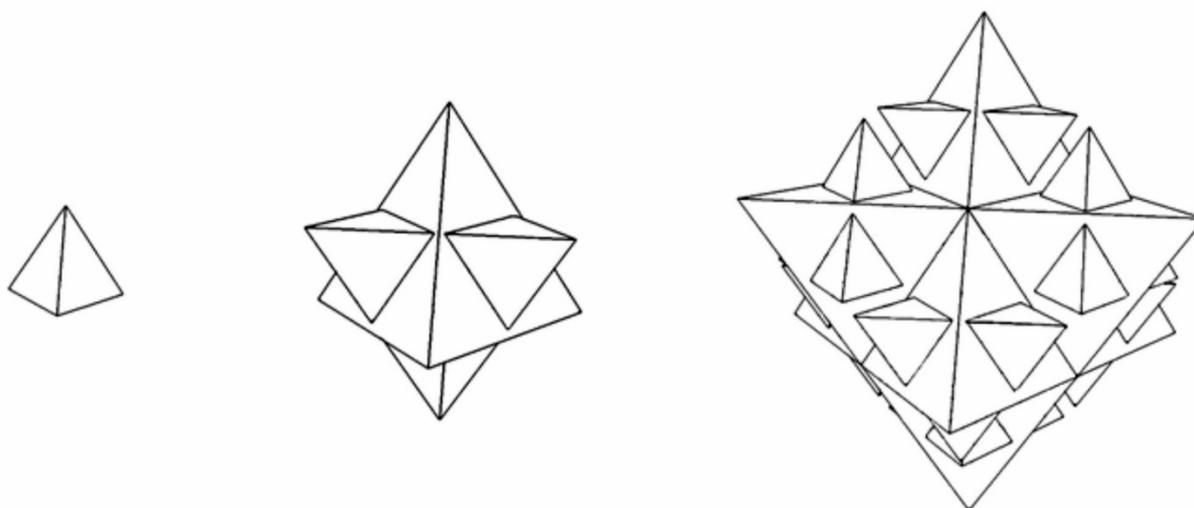


Рисунок 1 – Моделирование процесса роста фрактального комплекса, образованного четырьмя тетраэдрическими поверхностями (этапы роста расположены слева направо)

Figure 1 – Modeling of growth process of a fractal complex formed by four tetrahedral surfaces (growth stages are located from left to right)

Классический однофазный алгоритм роста. Данный алгоритм соответствует классической схеме построения геометрических фракталов. Закон преобразования

$$a_k = 2^{-k} a \quad (15)$$

обеспечивает неизменный размах (б) фрактала $l = a$. Детали фрактала одного порядка образуются и заканчивают рост одновременно, т.е. растут с одной фазой. Их длина увеличивается по линейному закону в зависимости от цикла роста. Критерием для окончания роста является полное завершение роста деталей фрактала необходимого порядка k .

Однофазный алгоритм роста. Закон преобразования

$$a_k = a, \quad (16)$$

т.е. после деления или образования основной размер фрактала всегда дорастает до одного и того же значения a , что обеспечивает показательный рост размаха (б) фрактала

$$l_k = 2^k a. \quad (17)$$

Детали фрактала одного порядка, так же, как и в предыдущем случае, образуются и заканчивают рост одновременно, растут с одной фазой, и их длина увеличивается по линейному закону в зависимости от цикла роста.

Многофазный алгоритм роста. От предыдущего алгоритма он отличается различным временем начала и окончания роста деталей одного порядка фрактала и, как следствие, различной фазой их роста. При этом их геометрические характеристики также вырастают до значений, соответствующих идеальной форме фрактала.

Стохастический алгоритм роста. В этом алгоритме роста стохастичность вносилась не только по фазе роста, но и по размерам растущих тетраэдров. Закон роста пространственных размеров был линейным.

Результаты моделирования процессов роста фракталов и их анализ

Из перечисленных выше характеристик фракталов анализировались прежде всего размах, длина фрактальной решетки, площадь и объем, ограниченный фракталом. При этом тривиальный участок роста от точечного размера до зарождения тетраэдра первого порядка на графиках не отображался.

На рисунке 2 показаны эти характеристики для классического процесса роста. Наиболее яркой его характеристикой является постоянство размаха фрактала. Рост фрактала в таком случае означает развитие, усложнение его структуры при неизменных продольных размерах. Рост поперечного размаха ограничен высотой тетраэдра первого порядка

$$h = \sqrt{\frac{2}{3}} a.$$

График длины фрактальной решетки представляет собой ломанную линию (рисунок 2, а). Линейный закон роста ее отдельных участков обусловлен, отмеченным выше, линейным законом роста пространственных размеров фрактала. Росту фрактала на один порядок соответствует один участок ломаной. Наклон ее отдельных участков быстро возрастает с ростом порядка, т.к. число зарождающихся тетраэдров возрастает по показательному закону $N_m = 6^{k-1}$. Точки разрыва между отдельными участками ломаной обусловлены тем, что зарождающиеся тетраэдры имеют конечные размеры.

При законе преобразования основного размера фрактала (15) согласно соотношениям (9, 13, 14) метрические характеристики данной модели изменяются по законам

$$L_k = 3(3^k + 1)a / 2, \quad (18)$$

$$S_k = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{3}{2}\right)^k a^2, \quad (19)$$

$$V_k = \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^k\right) a^3 / 12\sqrt{2}. \quad (20)$$

Эти законы хорошо описывают узловые очки на всех зависимостях метрических параметров (рисунок 2). Асимптотически длина и площадь фрактальной решетки возрастают неограниченно (расходятся), а объем стремится к пределу $V_\infty = a^3 / 12\sqrt{2}$. Именно в этом заключается основное свойство фракталов данного типа: при ограниченности объема они имеют неограниченную площадь поверхности и длину фрактальной решетки.

Периодические колебания между узловыми точками на зависимостях рисунке 2 связаны с двумя факторами:

1) площадь и объем пропорциональны квадрату и кубу размеров фрактала, которые между узловыми точками изменяются по линейному закону;

2) число дочерних тетраэдров возрастает по показательному закону $N_m = 6^{k-1}$ с ростом порядка фрактала.

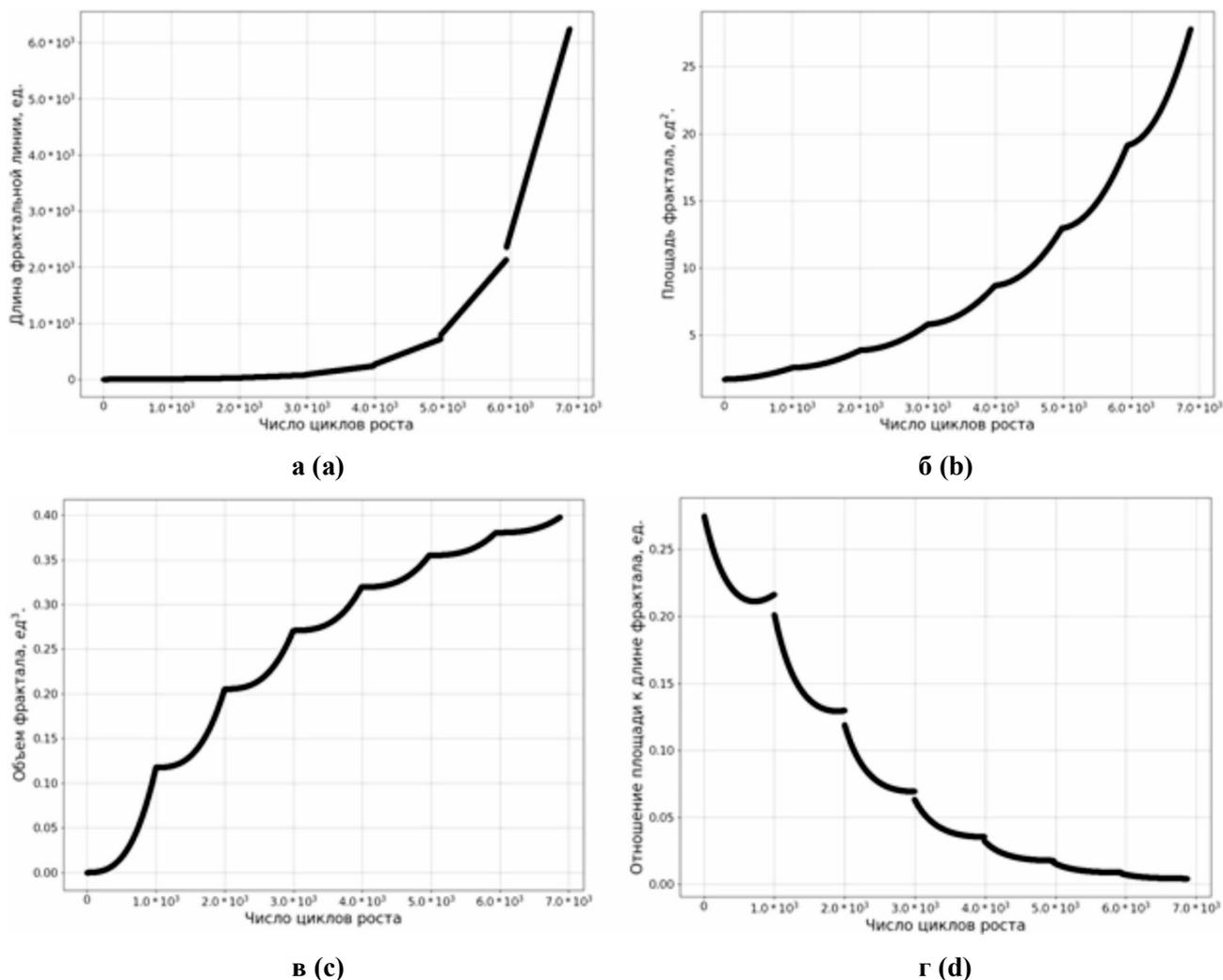


Рисунок 2 – Метрические характеристики для классического алгоритма роста. Зависимость длины (а), площади (б), объема (в) и отношения площади к длине (г) фрактала от числа циклов роста

Figure 2 – Metric characteristics for a classical growth algorithm. Dependence of length (a), area (b), volume (c) and ratio of area to length (d) of the fractal on the number of growth cycles

Дополнительными характеристиками процесса роста являются отношения метрических характеристик: площади и объема к длине или размаху, объема к площади или обратные к ним. Они наглядно представляют относительную динамику роста, что существенно при отсутствии строгих теоретических зависимостей для этих величин. На рисунке 2, г показана зависимость отношения площади фрактальной решетки к ее длине для классического процесса роста. Из нее очевидно, что рост длины значительно доминирует над ростом площади.

На рисунке 3 представлены метрические характеристики для однофазного алгоритма роста. Закон преобразования основного размера (16) дает показательный рост размаха фрактала. Как размах, так и длина фрактальной линии представлены ломанными линиями по причинам, обсуждавшимся выше для классического алгоритма роста.

Остальные метрические характеристики при законе преобразования (16) получаем из соотношений (9, 13, 14)

$$L_k = 3 \cdot 2^{k-1} (3^k + 1)a, \tag{21}$$

$$S_k = 6^k \frac{\sqrt{3}}{4} a^2, \tag{22}$$

$$V_k = 2^{3k} \left(1 - \left(\frac{3}{4} \right)^k \right) \frac{a^3}{12\sqrt{2}}. \quad (23)$$

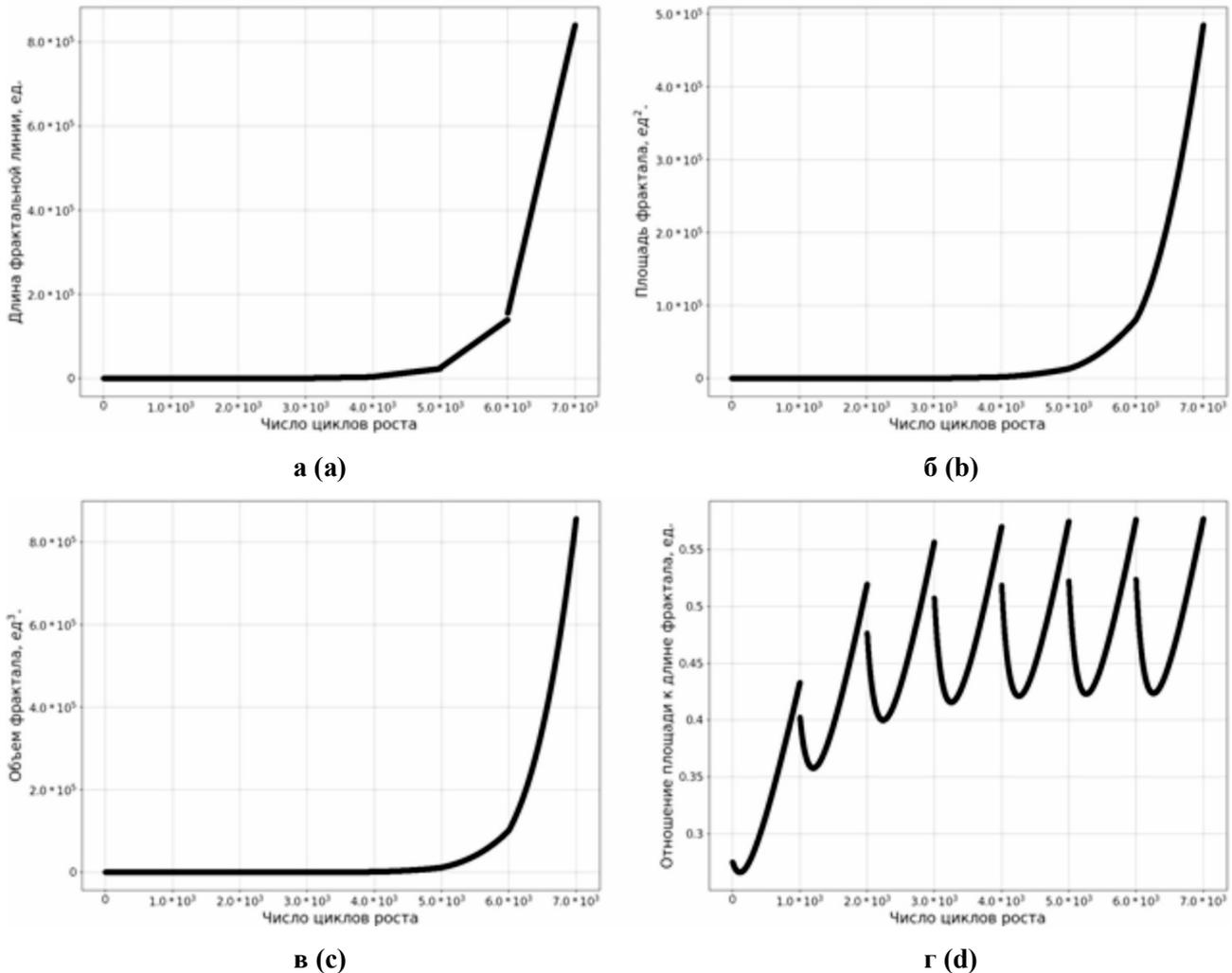


Рисунок 3 – Метрические характеристики для однофазного алгоритма роста. Зависимость длины (а), площади (б), объема (в) и отношения площади к длине (г) фрактала от числа циклов роста

Figure 3 – Metric characteristics for a single-phase growth algorithm. Dependence of length (a), area (b), volume (c) and ratio of area to length (d) of the fractal on the number of growth cycles

Периодические параболические пульсации на графиках площади и объема (рисунок 3, б, в) практически не заметны, т.к. они подавляются более быстрыми показательными законами роста этих величин (22, 23), чем аналогичные зависимости (19, 20) для классического алгоритма роста. Но на относительных метрических характеристиках они проявляются очень ярко. Например, на отношении площади фрактальной решетки к ее длине (рисунок 3, г), что убедительно свидетельствует о пользе относительных характеристик. Глубина параболических пульсаций значительно выросла по сравнению с предыдущим алгоритмом из-за более быстрого закона роста длины фрактальной решетки (21), по сравнению с законом (18). Для других относительных характеристик результаты аналогичны. Параболические пульсации (рисунок 3, г) делают не очень наглядным одинаковое асимптотическое поведение длины и площади. А из соотношений (21, 22) при $k \gg 1$ следует, что

$$L_k = 3 \cdot 6^k / 2, \quad (24)$$

$$S_k = \sqrt{3} L_k a / 6, \quad (25)$$

т.е. длина и площадь фрактальной решетки при больших порядках фрактала изменяются по одинаковому показательному закону с точностью до множителя. Это существенное отличие данного алгоритма от предыдущего. Соответствующее метрическое отношение $S_k / L_k = \sqrt{3}a / 6 \approx 0,577$, при использованном в работе значении $a = 2$, хорошо соответствует зависимости рисунка 3, ε без пульсаций.

Результаты моделирования для многофазного алгоритма роста представлены на рисунке 4. Закон преобразования основного размера и размах фрактала соответствуют соотношениям (16, 17) как и в предыдущем случае. А вот зависимости остальных характеристик претерпели существенную трансформацию: длина, площадь и объем приобрели характерную логистическую зависимость вида

$$L(t) = \frac{b}{1 + c e^{-\lambda t + \mu}}. \quad (26)$$

Зависимости площади и объема имеют вид очень похожий на зависимость для длины фрактальной решетки, поэтому на рисунке 4 не представлены. Параметры зависимости (26) подбираются при аппроксимации соответствующих кривых, а время пропорционально числу циклов построения фрактала. Отдельную математическую задачу представляет проблема связи этих параметров с деталями алгоритма роста.

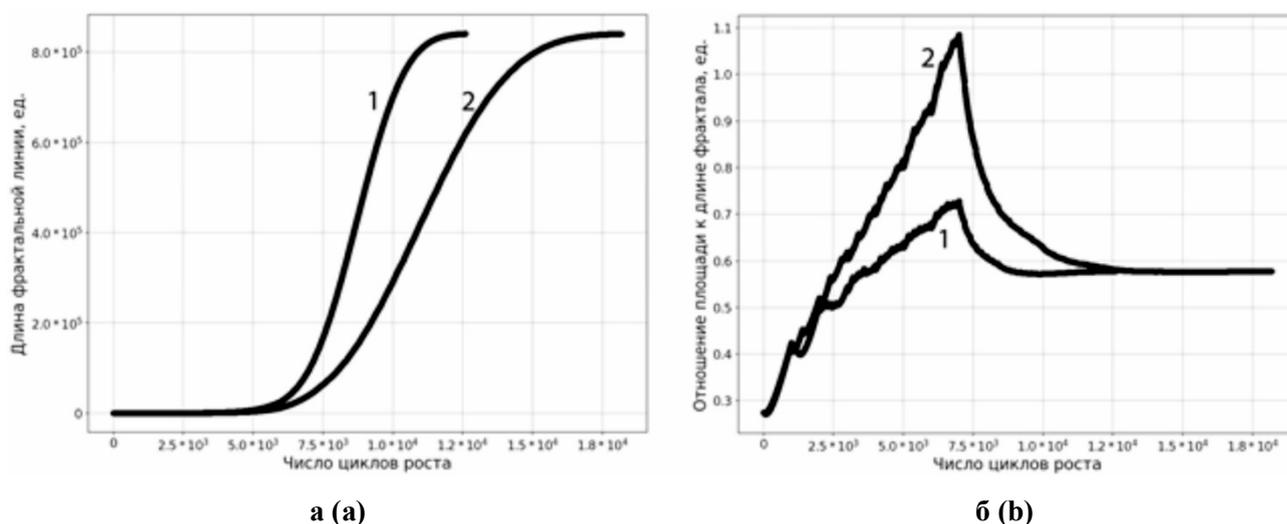


Рисунок 4 – Метрические характеристики для многофазного алгоритма роста.

Зависимость длины (а) и отношения площади к длине (б) фрактала от числа циклов роста.

Кривой 1 соответствует сдвигу фазы роста для тетраэдров различного порядка в двести циклов, кривой 2 – в четыреста циклов

Figure 4 – Metric characteristics for a multiphase growth algorithm. Dependence of length (a) and area to fractal length (b) ratio on the number of growth cycles.

Curve 1 corresponds to a growth phase shift for tetrahedra of various orders of two hundred cycles, curve 2 – four hundred cycles

Замечательность этой метаморфозы закона роста заключается в том, что логистические закономерности являются одними из самых характерных и распространенных для ростовых процессов [7]. Аналогичная ситуация имела место для длины и площади при исследовании роста плоских фракталов в работе [5]. Такая существенная трансформация закона роста обусловлена снятием жесткой синхронизации во времени и фазах роста деталей одного порядка фрактала. Метрическое отношение S_k / L_k имеет существенный выброс в первой половине процесса роста, указывающее на более быстрый рост площади за счет крупных деталей фрактала, у которых площадь растет быстрее, чем длина фрактальной решетки. Асимптотическое значение этого отношения 0,577 такое же как при однофазном алгоритме роста и соответствует идеальной форме фрактала.

Результаты моделирования по стохастическому алгоритму представлены на рисунке 5. Их самой существенной особенностью является уменьшение метрических характеристик фрактала за счет его стохастических искажений. С ростом вероятности искажений значительнее уменьшаются метрические характеристики (рисунок 5, а). При этом обнаружилась явная асимметрия в возможности моделирования уменьшения и увеличения метрических характеристик. А именно: моделирование стохастического роста метрических характеристик оказалось невозможным из-за самопересечений элементов фрактала. Не исключено, что и для реальных процессов роста фракталов возможна такая асимметрия в силу особенностей их строения.

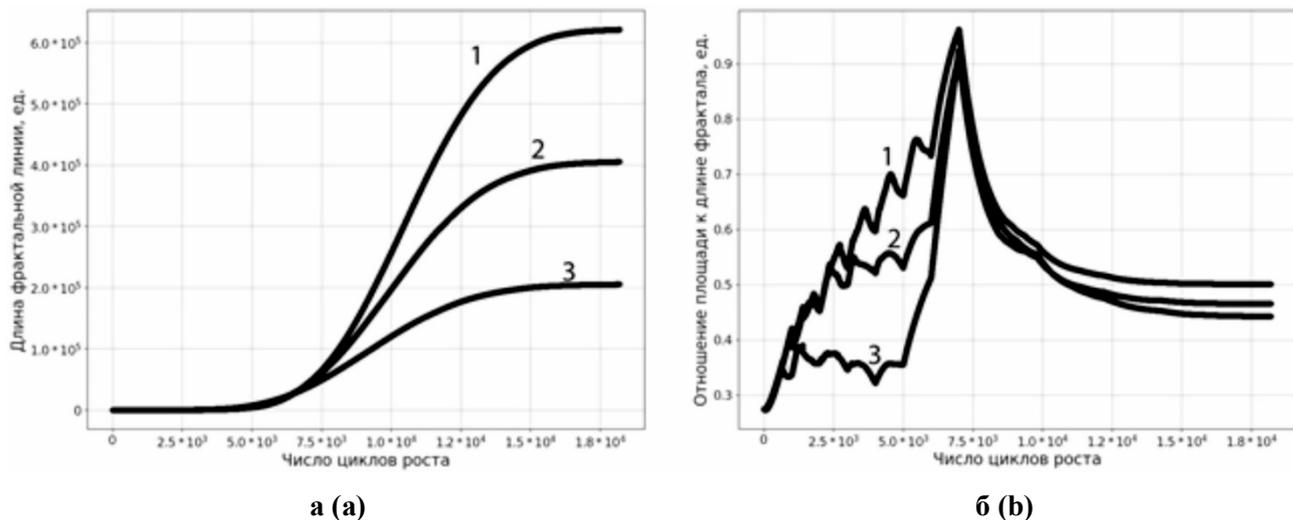


Рисунок 5 – Метрические характеристики для стохастического алгоритма роста. Зависимость длины (а) и отношения площади к длине (б) фрактала от числа циклов роста. Для кривых 1, 2 и 3 значения вероятностей искажения линейного размера тетраэдров равны: 0,1; 0,25 и 0,4 единиц соответственно

Figure 5 – Metric characteristics for a stochastic growth algorithm. Dependence of length (a) and area to fractal length (b) ratio on the number of growth cycles. For curves 1, 2 and 3, value probabilities of linear size distortion of tetrahedra are equal to: 0.1, 0.25 and 0.4 units, respectively

Для метрических отношений по сравнению с предыдущим случаем характерно уменьшение их асимптотических значений (рисунок 5, б). Это указывает на то, что стохастические уменьшения размеров фрактала сильнее сказываются на уменьшении площади.

Представленные выше результаты характеризуют также и рост фрактального комплекса - четырех фрактальных поверхностей и ограниченного ими тетраэдра (рисунок 1). Дополнительной характеристикой его роста является отношение объемов всех фрактальных граней к объему тетраэдра. Для различных алгоритмов роста такие отношения представлены на рисунке 6. Его теоретическое значение следует из соотношений (12, 13)

$$4V_k / V_{bk} = 2 \left(1 - \left(\frac{3}{4} \right)^k \right). \quad (27)$$

Для седьмого порядка получаем значение 1,733, которое хорошо согласуется с результатами моделирования (рисунках 6, а, б, в). Асимптотическое значение этого отношения при $k \rightarrow \infty$ равно 2. Для многофазного и стохастического алгоритмов роста эти зависимости существенно немонотонны. Это связано с тем, что в этих алгоритмах на первых этапах скорость роста базового тетраэдра значительно выше, чем скорость роста элементов фрактала. Для стохастического алгоритма существенно также уменьшение отношения (27) за счет стохастических искажений размеров растущих тетраэдров (рисунок 6, г).

При развитии элементов фрактала наружу от ограничиваемого ими объемного тела это отношение может быть произвольным. А при альтернативном развитии внутрь оно ограни-

чено согласованием объемов тела и элементов фракталов растущего фрактального комплекса. Последний случай наиболее характерен для роста живых организмов.

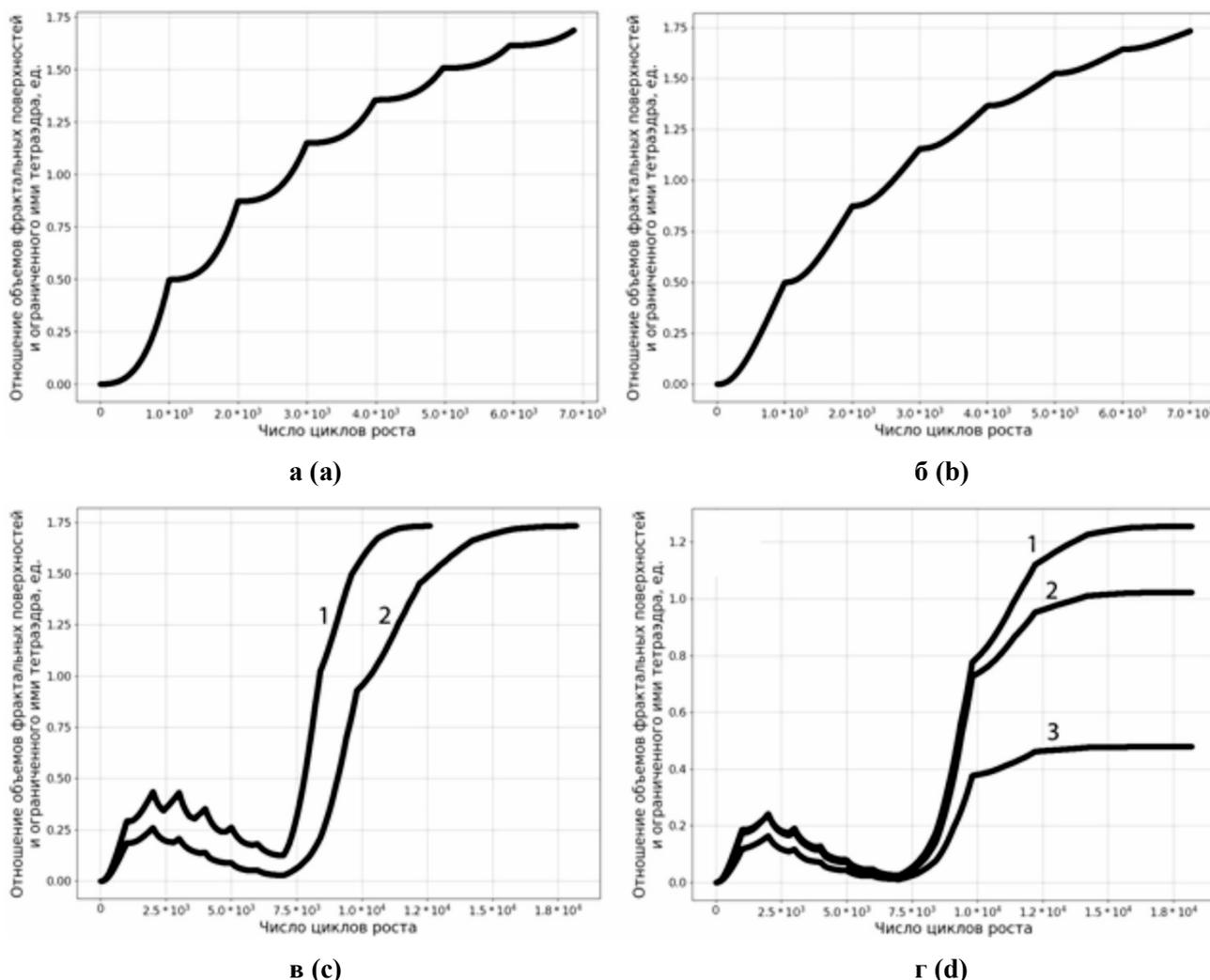


Рисунок 6 – Отношение объемов всех фрактальных граней к объему тетраэдра для различных алгоритмов роста: а – классического, б – однофазного, в – многофазного и г – стохастического
Figure 6 – The ratio of volumes of all fractal faces to the volume of tetrahedron for various growth algorithms: a – classical, b – single-phase, c – multiphase and d – stochastic

Общие закономерности процессов роста фракталов

Выполненное моделирование и теоретический анализ процессов роста фракталов позволяют сформулировать ряд общих закономерностей, которые могут быть справедливыми для широкого круга задач, связанных с проблемами роста сложных систем.

1. *Эффект изменения метрических отношений фракталов при различных законах преобразования основного пространственного размера a_k .* Для обычных тел классической геометрии отношение их метрических характеристик L, S, V пропорциональны первой степени или квадрату характерных линейных размеров

$$\frac{S}{L} \sim a, \quad \frac{V}{L} \sim a^2, \quad \frac{V}{S} \sim a. \quad (28)$$

Для рассматриваемых в данной работе тетраэдрических фракталов эти отношения согласно выражениям (9, 13,14) имеют вид

$$\frac{S_k}{L_k} = \frac{a_k}{2\sqrt{3}}, \quad (29)$$

$$\frac{V_k}{L_k} = \frac{2^{2k} \left(1 - \left(\frac{3}{4} \right)^k \right) a_k^2}{18\sqrt{2} (3^k + 1)}, \quad (30)$$

$$\frac{V_k}{S_k} = \left(\frac{4}{3} \right)^k \frac{\left(1 - \left(\frac{3}{4} \right)^k \right) a_k}{3\sqrt{6}}. \quad (31)$$

Из соотношений (29-30) следует зависимость метрических отношений фракталов от их порядка, а так же возможность управлять метрическими отношениями фракталов путем изменения закона преобразования основного пространственного размера a_k . Например, при законе $a_k = a = const$ из (29) следует одинаковое асимптотическое поведение площади и периметра фрактальной решетки. При $a_k \sim (3/4)^k / 2a$ согласно (30) одинаковое асимптотическое поведение обнаруживают объем и периметр, а при $a_k \sim (3/4)^k a$ из (31) следует то же для объема и площади. Необычным является закон $a_k \sim r^{-k}$ при $r > 2$: в этом случае размах и объем фрактала асимптотически стремятся к нулю, а длина и площадь фрактальной решетки расходятся.

Аналогичные закономерности имеют место в самых различных сферах проявления фракталов различных типов. Например, сети энергетического, информационного, водоснабжения и т.д., являясь древовидными фракталами, должны иметь одинаковое асимптотическое поведение покрываемой ими площади и длины сетей, чтобы обеспечить одинаковый поток, переносимых ими агентов. В системах кровообращения одинаковое асимптотическое поведение должны иметь объем питаемых тканей и длина капиллярных фракталов, чтобы обеспечить нормальное питание клеток.

1. *Множественность законов (алгоритмов) роста.* Представленные в работе несколько алгоритмов роста являются частью практически неограниченного числа возможных алгоритмов роста фракталов. Их модификации возможны вплоть до алгоритмов метаморфозного типа, когда гипертрофированно развиваются сначала отдельные элементы фрактала, а затем с разными временными и фазовыми сдвигами остальные детали. Особенно ярко это проявляется в биологии, как множественность роста и развития организмов, которые можно считать сложными фрактальными комплексами.

2. *Независимость конечной формы фрактала от ее развития в процессе роста.* Эта закономерность наиболее очевидна на ранних стадиях роста, когда растущий объект по своей структуре нельзя считать фракталом в его строгом понимании. Самым различным во времени может быть также закон роста деталей фрактала во времени: линейный, квадратичный, логистический и т.д. Форму фрактала обеспечивает закон композиции, а размер и скорость роста – закон преобразования основного размера a_k . Об этом можно говорить как об «эффекте геометрической распределенной по всему фракталу памяти».

3. *Обобщенные фракталы.* Само понятие фрактала допускает ряд обобщений [4], существенно расширяющих класс этих объектов и многообразие их свойств. Изменение законов композиции и преобразования основного размера фрактала по его фронту и глубине позволяет генерировать сложные многокомпозиционные фракталы и управлять скоростью их роста.

4. *В сложных фрактальных комплексах необходимо согласование метрических характеристик всех элементов комплекса.* Наиболее очевидна эта закономерность в растениях и живых организмах. Только при четком согласовании метрических характеристик возможны как чисто геометрическое сосуществование различных компонентов комплекса, так и нормальный энергомассообмен.

Обобщенный алгоритм роста трехмерных регулярных и стохастических фрактальных структур

Обобщенный алгоритм является инкапсуляцией вышеописанных алгоритмов роста фракталов, а именно: классического, однофазного, многофазного и стохастического соответственно. Отличительной особенностью данного алгоритма является его адаптивность. В зависимости от конкретной решаемой задачи существует возможность гибкого выбора одного из перечисленных алгоритмов расчета фрактальной структуры или их объединения. Например, объединение стохастического и многофазного алгоритмов роста. Схема обобщенного алгоритма роста трехмерных регулярных и стохастических фрактальных структур представлена на рисунках 7, 8 и состоит из двух независимых этапов, а именно:

- формирование базового примитива (в рамках данного алгоритма был выбран тетраэдр) с заданным количеством итерационных циклов роста N и векторами приращения v_1, v_2, v_3 и v_4 для каждой из его вершин;
- дальнейшее формирование фрактальной структуры порядка K , представляющую собой множество независимых примитивов. Каждому примитиву на текущем порядке вычисления соответствует свое значение количества итерационных циклов N_i и вектора приращения v_1, v_2, v_3, v_4 .

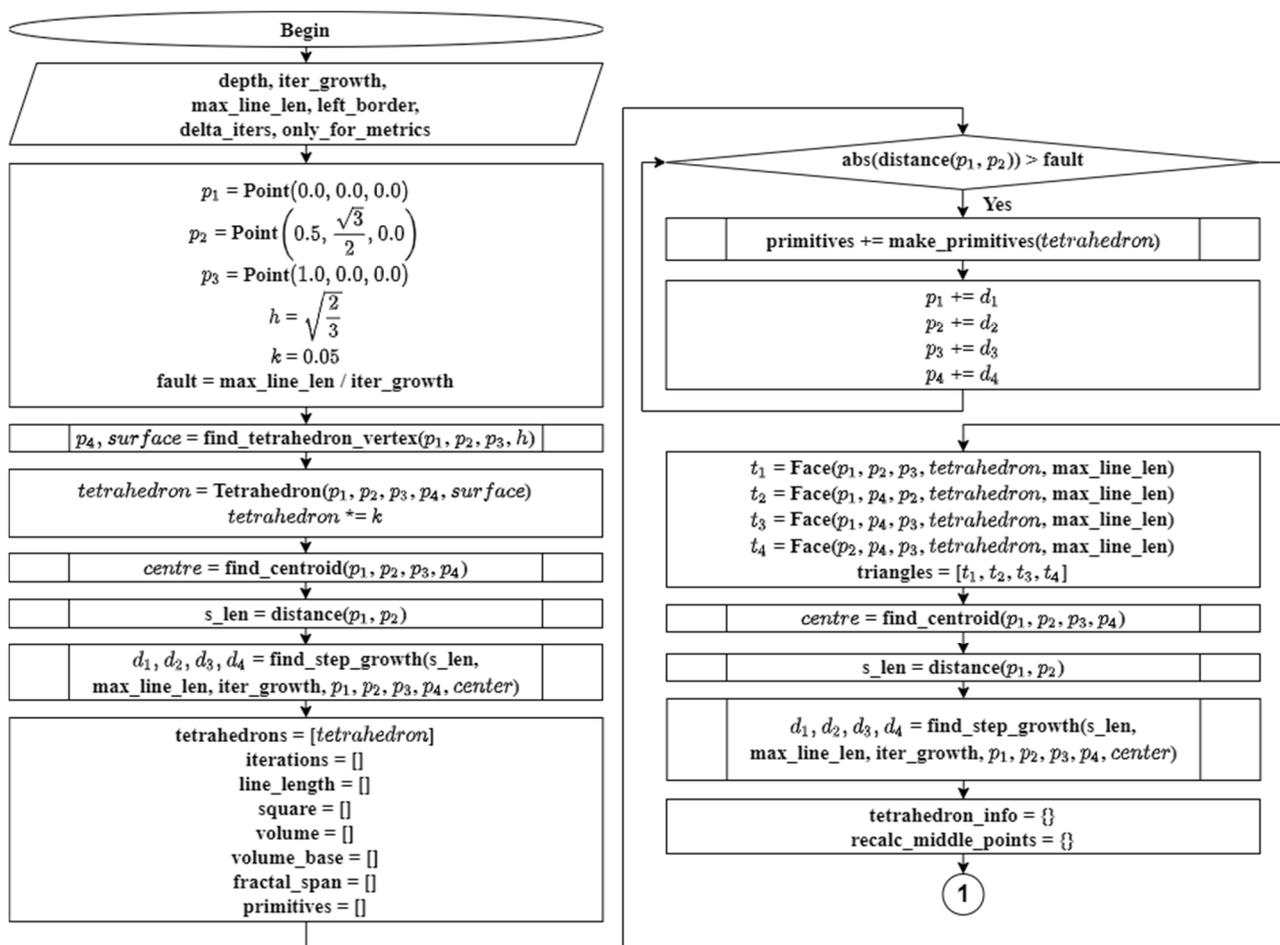


Рисунок 7 – Обобщенный алгоритм роста трехмерных регулярных и стохастических фрактальных структур. Первый этап
 Figure 7 – Generalized growth algorithm of three-dimensional regular and stochastic fractal structures. The first stage

На первом этапе вычисляется базовый примитив с заданным предельным значением длины стороны a , количеством итерационных циклов роста N и рассчитанными векторами перемещения для каждой из его вершин. Трудоемкость данного этапа в лучшем и худшем случа-

ях равна $O(N)$, где: N – количеством итерационных циклов роста, участвующих в формировании базового примитива.

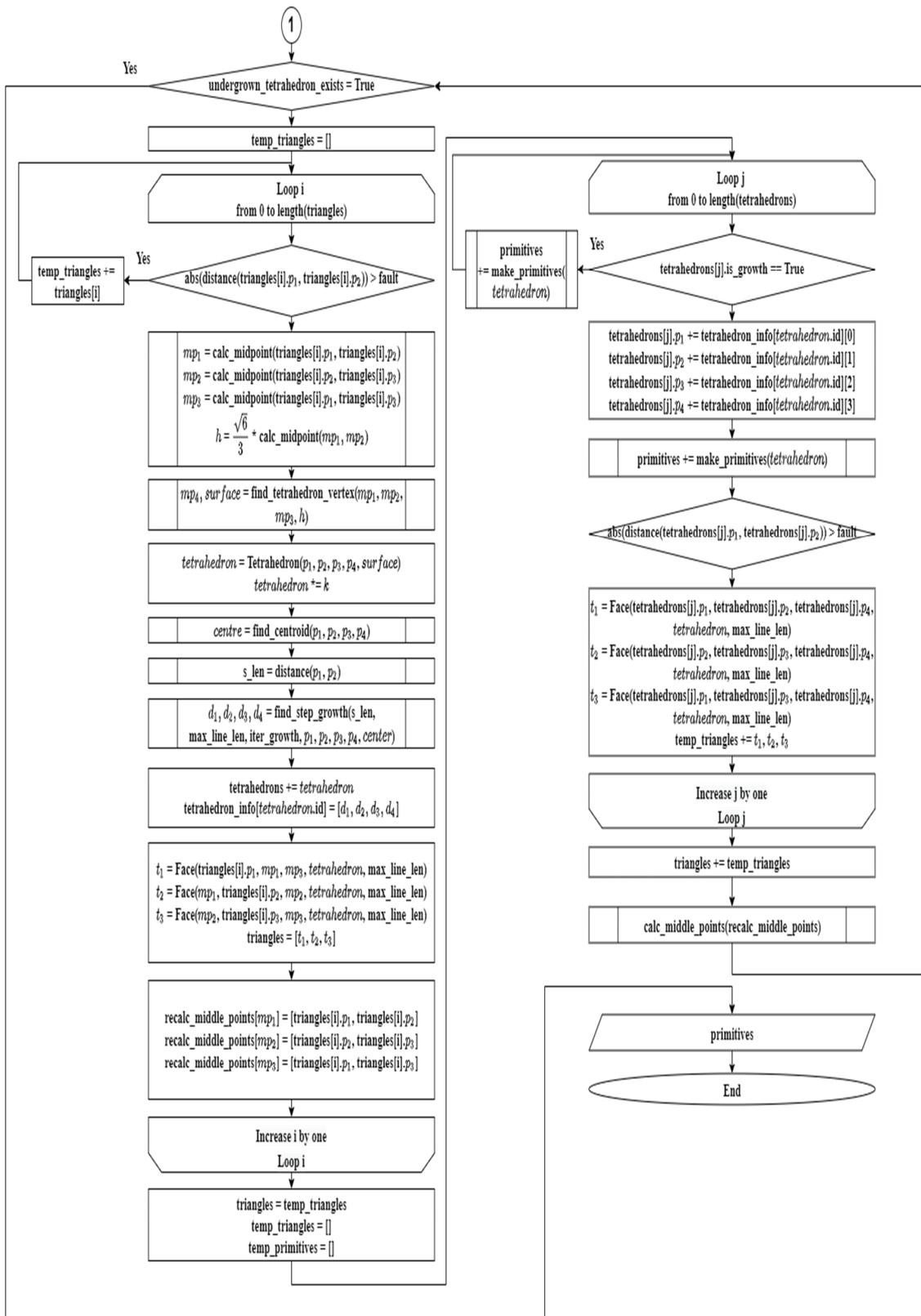


Рисунок 8 – Обобщенный алгоритм роста трехмерных регулярных и стохастических фрактальных структур. Второй этап
 Figure 8 – Generalized algorithm for the growth of three-dimensional regular and stochastic fractal structures. Second phase

На втором этапе в зависимости от заданного значения порядка K итоговой фрактальной структуры вычисляются дочерние примитивы, образованные на грани родительского объекта. Гранью родительского объекта является треугольник, который декомпозируется на четыре равных и независимых треугольника. Условием образования дочернего примитива на треугольнике является соответствие стороны значению a (в однофазном и многофазном алгоритмах роста) или $p \times a$ (в случае стохастического алгоритма роста), где p – коэффициент в пределах $(0; 1)$. Примитив образуется на центральном треугольнике, а три остальных – заносятся в массив активных треугольников. Если рассматриваемый примитив не вырос до необходимого порядка фрактала, то происходит его дальнейшее вычисление с заданным количеством итерационных циклов роста N (в случае однофазного или стохастического алгоритма роста) или $N \times f$ (в случае многофазного алгоритма роста), где f – коэффициент $[1; \infty]$. Однако в случае удовлетворения условию роста – все его грани (кроме основания) заносятся в список активных треугольников, на которых могут быть образованы последующие примитивы. Трудоемкость данного этапа зависит от величины порядка фрактала K и количества итерационных циклов роста N для каждого из примитивов. В лучшем и худшем случаях равна $O(6^K \times N)$, где K – величина порядка фрактальной структуры, N – количество итерационных циклов.

Вычисленная фрактальная структура при помощи рассмотренного алгоритма, использующего композицию многофазного и стохастического алгоритмов роста представлена на рисунке 9.

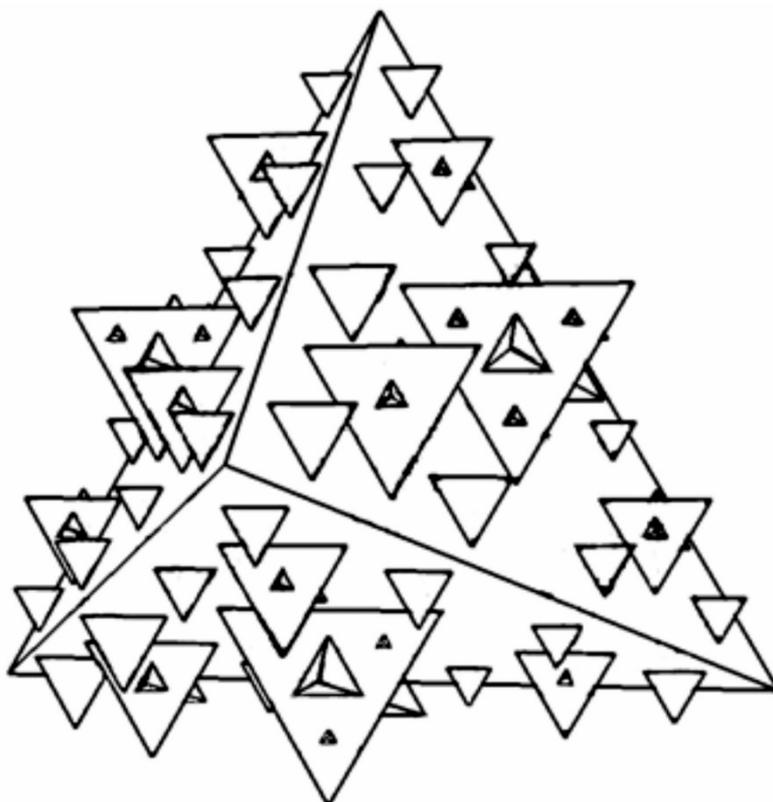


Рисунок 9 – Вычисленная фрактальная структура третьего порядка
Figure 9 – Calculated fractal structure of the third order

Программная реализация обобщенного алгоритма роста фрактальных структур выполнена на языке программирования Python 3.9 версии [12] с использованием развитой интегрируемой библиотек ursina [13]. Ursina предоставляет возможность визуализации вычисленных фрактальных структур в трехмерном пространстве.

Заключение

В работе предложена принципиальная трехэлементная схема роста конструктивных масштабно инвариантных фракталов, т.е. любой процесс или алгоритм роста фракталов всегда содержит эти элементы. При необходимости эта схема расширяется дополнительными условиями, например, фазовыми сдвигами в росте деталей фракталов, стохастичностью и т.д. Это позволяет формировать как большой набор алгоритмов роста фракталов, так и широкий спектр свойств фракталов. Число возможных алгоритмов роста практически неограниченно. Представленные в работе алгоритмы роста формировались для двух типов задач: наиболее простой рост, без усложняющих условий, когда конечный результат существенно важнее процесса роста, его механизма и деталей (классический и однофазный алгоритмы); рост с дополнительными условиями, учитывающими механизм и детали процесса роста, для описания реальных процессов (многофазный и стохастический алгоритмы).

Наиболее существенное различие этих двух типов алгоритмов проявилось смене показательного закона роста метрических характеристик фракталов на логистический. Последний закон наиболее характерен для природных ростовых процессов. Это указывает на то, что в многофазном и стохастическом алгоритмах отражены механизмы роста близкие к природным.

Объединение нескольких фрактальных поверхностей в тетраэдр позволило моделировать рост природных фрактальных комплексов, которыми можно считать живые и растительные организмы. Результаты моделирования указывают на четкую согласованность между метрическими характеристиками фракталов и ограниченных ими тел.

Одним из существенным результатов работы является исследование метрических отношений фракталов в процессе их роста. На этапе численного моделирования они выражены графиками относительных величин, детально характеризуют процесс роста и относительное поведение размаха, длины, площади и объема фрактальной решетки. При их теоретическом анализе получают законы преобразования основного размера фрактала a_k для обеспечения необходимых метрических отношений. Наиболее интересным установленным результатом является эффект изменения метрических отношений при различных законах преобразования основного размера a_k . Он указывает на то, что можно проектировать фракталы с самыми различными метрическими отношениями.

Реализация обобщенного алгоритма роста трехмерных регулярных и стохастических фрактальных структур подтвердила эффективность предложенных подходов к моделированию трехмерных фракталов со сложным структурным представлением.

Библиографический список

1. **Балханов В. К.** Основы фрактальной геометрии и фрактального исчисления от. Ред. Башкуев Ю.Б. Улан-Удэ: Изд-во Бурятского госуниверситета, 2013. 224 с.
2. **Мандельброт Б.** Фрактальная геометрия природы. Москва: Институт компьютерных исследований, 2002. 656 с.
3. **Морозов А. Д.** Введение в теорию фракталов. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 160 с.
4. **Майков К. А., Пылькин А. Н., Кузьменко С. Н., Теплов А. А.** Алгебраические особенности композиции алгоритмов вычисления фрактальных структур // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2020. № 71. С. 117-127.
5. **Майков К. А., Пылькин А. Н., Кузьменко С. Н., Теплов А. А.** Моделирование и анализ закономерностей роста фракталов из материальной точки // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2021. № 75. С. 99-112.
6. **Федер Е.** Фракталы: Пер. с англ. М.: Мир, 1991. 254 с.
7. **Ризниченко Г. Ю.** Лекции по математическим моделям в биологии (изд. 2-е, испр. и дополн.) Издательство РХД, 2011 г. 560 стр.
8. **Шредер М.** Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2001. 528 с.
9. **Cieslak M., Ferraro P., Hanan J.** Modeling Plant Development with L-Systems. Mathematical Modelling in Plant Biology, 2019, pp. 139-169.

10. **Hanan J. S.** Parametric L-systems and their application to the modelling and visualization of plants. PhD thesis, University of Regina, June 1992.
11. **Prusinkiewicz P., Hanan J., Mech R.,** An L-System-Based Plant Modeling Language. International Workshop on Applications of Graph Transformations with Industrial Relevance, 1999, pp. 395-410.
12. **Python.** [Электронный ресурс] URL: <https://www.python.org/downloads/release/python-373/>
13. **Ursina Engine.** [Электронный ресурс] URL: <https://www.ursinaengine.org/>
14. **Zamir M.** Arterial Branching within the Confines of Fractal L-System Formalism // Journal of General Physiology, 2001. № 118 (3), pp. 267-276.

UDC 004.925.86

MODELING AND ANALYSIS OF GROWTH PATTERNS OF THREE-DIMENSIONAL REGULAR AND STOCHASTIC FRACTALS

K. A. Maikov, Dr. Sc. (Tech.), full professor, Informatics and control systems Department, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia;

orcid.org/0000-0003-1864-2397, e-mail: maikov@bmstu.ru

A. N. Pylkin, Dr. Sc. (Tech.), full professor, RSREU, Ryazan, Russia;

orcid.org/0000-0001-9925-2870, e-mail: pylkin.a.n@rsreu.ru

S. N. Kuzmenko, Ph.D. (Phys.-Math.), associate professor, Department of mathematics, physics and Informatics, Kerch state marine technological University, Kerch, Russia;

orcid.org/0000-0002-1039-1274, e-mail: ksn1160@mail.ru

A. A. Teplov, post-graduate student, Informatics and control systems Department, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia;

orcid.org/0000-0002-1785-6089, e-mail: teploff.aa@gmail.com

A. A. Bubnov, Ph.D. (Phys.-Math.), Department of computational and applied mathematics, RSREU, Ryazan, Russia;

orcid.org/0000-0002-8022-456X, e-mail: alexeybubnov81@gmail.com

The growth of fractal complex is modeled by classical, single-phase, multiphase and stochastic algorithms. The method of analysis of growth processes is proposed, their main characteristics are considered. Fractal regularities of growth metric characteristics, their transformation when changing a growth algorithm are revealed. The effect of stochastic changes of fractal elements on the process of its growth is modeled. A number of fractal growth general patterns of structures are formulated. It is shown that algorithms and methods used to analyze growth processes have great potential for modernization and adaptation to a wide range of tasks. A generalized algorithm for the growth of three-dimensional regular and stochastic fractal structures is proposed, the distinctive feature of which is the variability of algorithm choice from the problem being solved. Software implementation of the proposed algorithm confirmed the validity of the solutions considered in the study and modeling of three-dimensional fractals growth.

Key words: *three-dimensional fractals, three-dimensional fractals growth, geometric fractals, stochastic fractals, fractal construction algorithms, fractals metric characteristics.*

DOI: 10.21667/1995-4565-2022-80-134-150

References

1. **Balhanov V. K.** *Osnovy fraktal'noj geometrii i fraktal'nogo ischisleniya* ot. red. Bashkuev Ju.B. Ulan-Udje: Izd-vo Burjatskogo gosuniversiteta, 2013. 224 p. (in Russian).
2. **Mandel'brot B.** *Fraktal'naja geometrija prirody*. M.: Institut komp'juternyh issledovanij, 2002. 656 p. (in Russian).
3. **Morozov A. D.** *Vvedenie v teoriju fraktalov*. Moskva-Izhevsk: Institut komp'juternyh issledovanij, 2002. 160 p. (in Russian).
4. **Maikov K. A., Pylkin A. N., Kuzmenko S. N., Teplov A. A.** Algebraicheskie osobennosti kompozicii algoritmov vychisleniya fraktal'nyh struktur. *Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2020, no. 71, pp. 117-127. (in Russian).

5. **Maikov K. A., Pylkin A. N., Kuzmenko S. N., Teplov A. A.** Modelirovanie i analiz zakonomernostej rosta fraktalov iz material'noj tochki. *Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2021, no. 75, pp. 99-112. (in Russian).
6. **Feder E.** *Fraktaly*: Per. s ang. Moscow: Mir, 1991. 254 p. (in Russian).
7. **Reznichenko G. U.** *Lekcii po matematicheskim modelyam v biologii* (izd. 2-e, ispr. i dopoln.) Izdatel'stvo RHD, 2011. 560 p. (in Russian)
8. **Shreder M.** *Fraktaly, haos, stepennye zakony. Miniatjura iz beskonechnogo raja*. Izhevsk: NIC «Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika». 2001. 528 p. (in Russian).
9. **Cieslak M., Ferraro P., Hanan J.** Modeling Plant Development with L-Systems. *Mathematical Modelling in Plant Biology*, 2019, 139-169 p.
10. **Hanan J. S.** Parametric L-systems and their application to the modelling and visualization of plants. *PhD thesis*, University of Regina, June 1992.
11. **Prusinkiewicz P., Hanan J., Mech R.** An L-System-Based Plant Modeling Language. *International Workshop on Applications of Graph Transformations with Industrial Relevance*, 1999, 395-410 p.
12. Python. [Электронный ресурс] URL: <https://www.python.org/downloads/release/python-373/>
13. Ursina Engine. [Электронный ресурс] URL: <https://www.ursinaengine.org/>
14. **Zamir M.** Arterial Branching within the Confines of Fractal L-System Formalism. *Journal of General Physiology*. 2001, no. 118 (3), pp. 267-276.