

УДК 519.332

АНАЛИЗ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ С СЕЗОННОЙ КОМПОНЕНТОЙ

А. И. Новиков, д.т.н., доцент, профессор кафедры ВМ РГРТУ, Рязань, Россия,
orcid.org/0000-0002-8166-8234, e-mail: novikovanatoly@yandex.ru

А. Г. Агафонов, студент РГРТУ, Рязань, Россия,
orcid.org/0009-0005-1939-1106, e-mail: aleksander.agafonov.0@gmail.com

***Цель работы** – разработка методов анализа и прогнозирования временных рядов, являющихся аддитивной смесью низкочастотной (тренда), циклической и случайной составляющих. Особенностью циклической, в частности сезонной, составляющей в рассматриваемых примерах является изменение ее амплитуды при переходе от одного промежутка времени, соответствующего периоду колебаний, к следующему периоду. Рассматривается несколько подходов к исследованию таких рядов. Традиционный, когда последовательно выделяются тренд, циклическая компонента и остаток ряда. Модификация заключается в том, что для учета изменений амплитуды циклической компоненты предложено описание коэффициентов в составе модели гармонической составляющей при функциях синус и косинус в виде линейных функций времени. Во втором случае все параметры модели, описывающей такой ряд, находятся совместно по методу наименьших квадратов (МНК). Это позволяет повысить точность, как аппроксимации ряда, так и его прогноза. Для повышения точности прогноза временных рядов, в динамике которых появляются локальные особенности, не учитываемые математической моделью ряда, предложено включать в прогнозную модель разность между значениями исходного ряда и оценками по используемой модели за промежуток времени, предшествующий прогнозному периоду и совпадающий с ним по длине.*

***Ключевые слова:** временной ряд, тренд, циклическая компонента, сезонность, прогнозирование, дискретное преобразование Фурье, амплитудный спектр*

DOI: 10.21667/1995-4565-2024-87-111-120

Введение

История исследования и прогнозирования временных рядов насчитывает многие десятилетия. Наиболее интенсивные исследования по этой проблематике относятся к 70–80 годам XX века. Повышенный интерес к применению математических методов в исследовании экономических систем и, в частности, в исследовании временных рядов в этот период был обусловлен, в первую очередь, запросами реальной экономики. Существенный импульс развитию методов анализа и прогнозирования временных рядов в те годы дали фундаментальные работы большого числа как отечественных, так и зарубежных авторов [1–7]. В область анализа временных рядов были привнесены многие методы исследования из технических систем. Активно стал применяться спектральный анализ временных рядов [8, 9].

Временной ряд $y(t)$, $t = \overline{1, N}$ в общем случае рассматривается как аддитивная смесь низкочастотной составляющей – тренда $x(t)$, характеризующего общую динамику процесса, циклической компоненты $u(t)$, частным случаем которой является сезонная компонента $s(t)$ и случайной составляющей $\xi(t)$:

$$y(t) = x(t) + u(t) + s(t) + \xi(t), \quad t = \overline{1, N}. \quad (1)$$

При этом предполагается, что период T_u циклической компоненты больше периода T_s сезонной компоненты. Для квартальных данных $T_s = 3$, для месячных $T_s = 12$. Временные ряды с циклической компонентой не так часто встречаются в составе экономических временных рядов. Они больше характерны для процессов в живой природе, например одина-

дцати- и сорокалетний периоды активности Солнца. Поэтому модель (1) в эконометрике часто рассматривают в упрощенном виде:

$$y(t) = x(t) + s(t) + \xi(t), \quad t = \overline{1, N}. \quad (2)$$

Декомпозиция временного ряда на компоненты x, s, ξ может быть выполнена непараметрическими методами с использованием сглаживающих операторов A : $\hat{x}(t) = \sum_{i=-k}^k \alpha_i y(t+i)$,

дающих оценку тренда $A(y) = \hat{x}$ [10, 11]. Как показано в работе [12], для получения корректной оценки $\hat{x}$ тренда длина $2k+1$ окна скольжения должна соответствовать периоду сезонной компоненты. В нашем исследовании мы будем оперировать исключительно параметрическими методами аппроксимации каждой компоненты в составе модели (2).

Методы параметрической аппроксимации каждой компоненты в составе модели (2) хорошо изучены. Интерес представляют временные ряды, сезонная компонента в которых имеет выраженные изменения амплитуды «периодических» колебаний. На рисунке 1 приведен пример такого ряда – ежеквартальная прибыль некоторого предприятия за 4 года. Он заимствован из книги [13]. Как увидим ниже, амплитуда колебаний сезонной компоненты в составе этого ряда является убывающей.

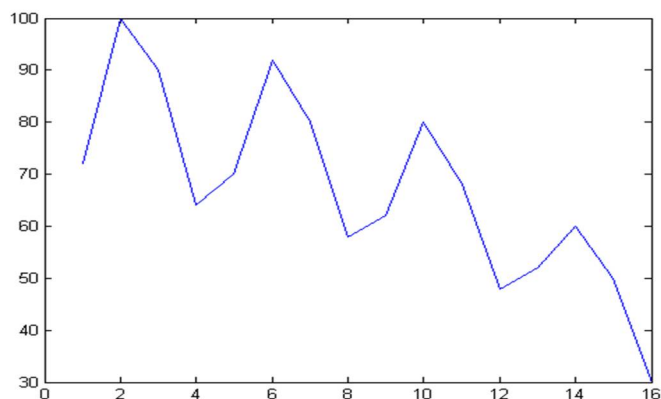


Рисунок 1 – Квартальные данные о прибыли
Figure 1 – Quarterly Profit Data

В названной книге [13] последовательно выделяются тренд $\hat{x}$ и остаточный ряд $y_1(t) = s(t) + \xi_1(t)$, $t = \overline{1, N}$. Автор работы отмечает колебательные изменения остатка с уменьшающейся амплитудой. Для учета колебаний с уменьшающейся амплитудой предлагается следующая модель:

$$s(t) = (a \cdot \cos \varpi t + b \cdot \sin \varpi) / \ln(c + t), \quad t = \overline{1, N}.$$

В этой модели коэффициенты при функциях синус и косинус изменяются с изменением времени по законам $a / \ln(c + t)$ и $b / \ln(c + t)$. При этом коэффициент c подбирается вручную. В следующем разделе рассматривается математическая модель процесса, в которой учет изменений амплитуды колебаний осуществляется автоматически.

Теоретические исследования

Раздельное оценивание компонент ряда. Наиболее часто используемой моделью тренда временного ряда является полиномиальная модель невысокого порядка (не выше третьего). Естественно, применяются функции и из других классов, являющихся линейными по параметрам или приводящихся к таковым с помощью некоторых преобразований (показательная, гиперболическая, логистическая и другие [13, 14]). Для выяснения порядка аппроксимирующего многочлена часто используется последовательное построение раз-

ностных рядов $\Delta^k y(t)$, $t=1,2,\dots,N-k$ с одновременным вычислением статистики $D_\Delta(k) = \frac{1}{C_{2k}^k(N-k)} \sum_{t=0}^{N-k} (\Delta^k y(t))$ [13]. Степень аппроксимирующего многочлена выбирается равной такому номеру k (порядку разности), начиная с которого перестает изменяться статистика $D_\Delta(k)$. Как правило, достаточно первой, второй и редко третьей разности для получения вывода о порядке аппроксимирующего многочлена. Для ряда, приведенного на рисунке 1, подходящей является линейная функция $x(t) = a + b \cdot t$. МНК-оценки параметров искомой линейной функции получились равными: $a = 92,1$; $b = -2,9235$. На рисунке 2 приведены совместные графики исходного ряда $y(t)$, $t=\overline{1,16}$, тренда $x(t)$ и остатка $s(t) + \xi(t)$.

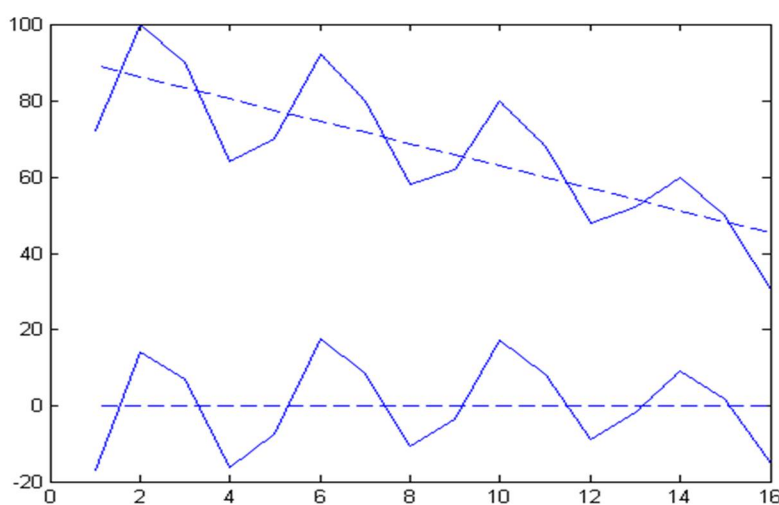


Рисунок 2 – Временной ряд, его тренд и остаток
Figure 2 – Time series, its trend and remainder

Для исследования остатка $v(t) = s(t) + \xi(t)$, $t = \overline{1,16}$ на наличие периодических колебаний был выполнен спектральный анализ остаточной компоненты. На рисунке 3 приведен график амплитудного спектра остатка.

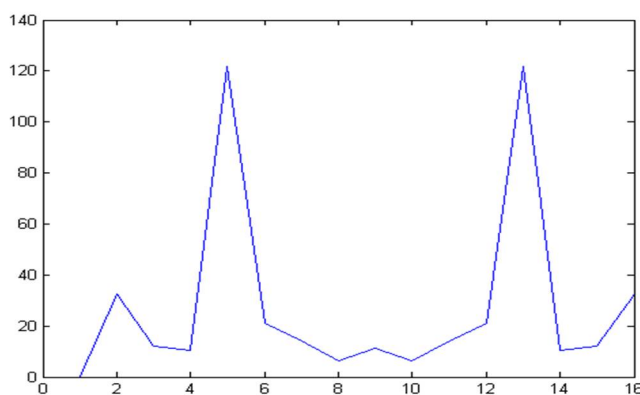


Рисунок 3 – Амплитудный спектр остаточной компоненты $v(t)$
Figure 3 – Amplitude spectrum of a residual component

Локальный максимум амплитудного спектра при $n = 5$ свидетельствует о наличии периодических колебаний в составе остаточной компоненты, период которых может быть равен 4. Анализ остаточных значений

$$\mathbf{v} = \{-17,2 \ 13,7 \ 6,7 \ -16,4 \ -7,5 \ 17,4 \ 8,4 \ -10,7 \ -3,8 \ 17,1 \ 8,1 \ -9,0 \ -2,1 \ 8,8 \ 1,8 \ -15,3\}$$

подтверждает этот вывод: период T колебаний равен 4. Вместе с тем анализ разностей между максимальными и минимальными значениями остатка в каждой группе из 4-х значений, а именно: 30,9; 28,1, 26,1, 24,1, говорит о том, что амплитуды колебаний изменяются во времени (убывают). Значит, остаточная компонента является квазипериодической, и для ее описания нужна математическая модель, учитывающая изменение амплитуды колебаний. Прием, использованный в [7], позволяет учесть изменения амплитуды колебаний. Но он рассчитан на убывающие значения амплитуд колебаний и, кроме этого, требует настройки параметра c для каждого нового ряда.

Достаточно естественным представляется решение заменить постоянные значения коэффициентов a, b в модели гармоник $s(t) = (a \cdot \cos \varpi t + b \cdot \sin \varpi t)$ на изменяющиеся по некоторому закону, например, в данном случае – по линейному закону. Подобное предложение было сделано еще в работе [12]. Тогда общая модель временного ряда будет иметь следующий вид:

$$y(t) = P_n(t) + (b_1 + b_2 t) \cos(\varpi t) + (b_3 + b_4 t) \sin(\varpi t), \quad t = \overline{1, N}. \quad (3)$$

Здесь $P_n(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ – многочлен степени n , являющийся аппроксимацией тренда,

$\varpi = 2\pi / T$ – частота колебаний. В рассматриваемом примере $\varpi = 2\pi / 4 = 0,5\pi$.

Как уже отмечалось во введении, возможны две схемы получения оптимальных оценок $n+5$ параметров в составе модели (3) временного ряда. Раздельное получение оценок неизвестных коэффициентов: сначала найти оценки коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_n$ по измерениям $y(t)$, $t = \overline{1, N}$, затем найти остаток $v(t) = y(t) - \hat{P}_n(t)$ и по этим значениям получить оценки коэффициентов b_1, b_2, b_3, b_4 . Поскольку все коэффициенты в модели (3) входят линейно, то для их нахождения можно использовать метод наименьших квадратов.

В результате этих шагов получена следующая модель временного ряда:

$$\hat{y}(t) = 92,1 - 2,924 + (-17,846 + 0,432 \cdot t) \cos(0,5\pi t) + (-14,343 + 1,025 \cdot t) \sin(0,5\pi t). \quad (4)$$

Среднеквадратическая ошибка аппроксимации

$$S = \left(\left(\sum_{t=1}^N (y(t) - \hat{y}(t))^2 / N \right) \right)^{1/2}$$

для рассматриваемого ряда ($N = 16$) по модели (4) равна $S = 2,967$.

Совместное оценивание компонент ряда. Будем рассматривать следующую модель временного ряда:

$$y(t) = \sum_{k=0}^5 c_k \varphi_k(t), \quad (5)$$

где базисные функции $\varphi_k(t)$ имеют следующий вид:

$$\varphi_0(t) \equiv 1, \varphi_1(t) = t, \varphi_2(t) = \cos(\varpi t), \varphi_3(t) = t \cos(\varpi t), \varphi_4(t) = \sin(\varpi t), \varphi_5(t) = t \sin(\varpi t), \quad (6)$$

а $\varpi = 2\pi / T$. Оценивание коэффициентов общей модели (5), (6) будем выполнять по хорошо известной формуле для МНК-оценок линейной по параметрам модели:

$$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{\Phi}^{-1} \mathbf{Y}_{\varphi}. \quad (7)$$

В этой формуле

$$\Phi = \begin{pmatrix} (\varphi_0, \varphi_0) & (\varphi_0, \varphi_1) & \dots & (\varphi_0, \varphi_5) \\ (\varphi_1, \varphi_0) & (\varphi_1, \varphi_1) & \dots & (\varphi_1, \varphi_5) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_5, \varphi_0) & (\varphi_5, \varphi_1) & \dots & (\varphi_5, \varphi_5) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Y}_\varphi = ((\mathbf{y}, \varphi_0), (\mathbf{y}, \varphi_1), \dots, (\mathbf{y}, \varphi_5))^T,$$

а $(\varphi_k, \varphi_m), (\mathbf{y}, \varphi_k), k, m \in \{0, 1, \dots, 5\}$ - скалярные произведения соответствующих векторов. Например,

$$(\phi_3, \phi_3) = \sum_{t=1}^N t^2 \cos^2 \varpi t, \quad (\phi_3, \phi_4) = \sum_{t=1}^N t \cos \varpi t \sin \varpi t, \quad (\mathbf{y}, \phi_0) = \sum_{t=1}^N y(t), \quad (\mathbf{y}, \phi_5) = \sum_{t=1}^N y(t) \cdot t \sin \varpi t.$$

Модель (5), (6) идентична (4). Разница заключается лишь в том, что в (4) МНК-оценки компонент вектора $(a_0, a_1, b_1, b_2, b_3, b_4)$ находятся раздельно: сначала находятся оценки $\hat{a}_0, \hat{a}_1$ по значениям $y(t), t = \overline{1, 16}$, затем находятся оценки $\hat{b}_1, \hat{b}_2, \hat{b}_3, \hat{b}_4$ по остаточной компоненте $y_1(t) = y(t) - (a_0 + a_1 t) \quad t = \overline{1, 16}$. В (5) МНК-оценки $\hat{\mathbf{c}}$ 6-мерного вектора $\mathbf{c}$ находятся совместно по формуле (7). Для ряда, изображенного на рисунке 1, по этому алгоритму получена следующая модель:

$$\hat{y}(t) = 91,09 - 2,772 \cdot t + (-16,025 + 0,255 \cdot t) \cos(0,5\pi t) + (-13,215 + 0,805 \cdot t) \sin(0,5\pi t).$$

Среднеквадратическая ошибка аппроксимации исходного ряда по этой модели равна $S = 2,860$, что на 5,7 % меньше ошибки аппроксимации по аналогичной модели (3), но при раздельном оценивании тренда и сезонной компоненты.

Экспериментальные исследования

Исследуем с применением описанных выше двух подходов временной ряд ежемесячных данных, приведенный в книге [10, с. 18, табл. 1.3]. График этого ряда изображен на рисунке 4.

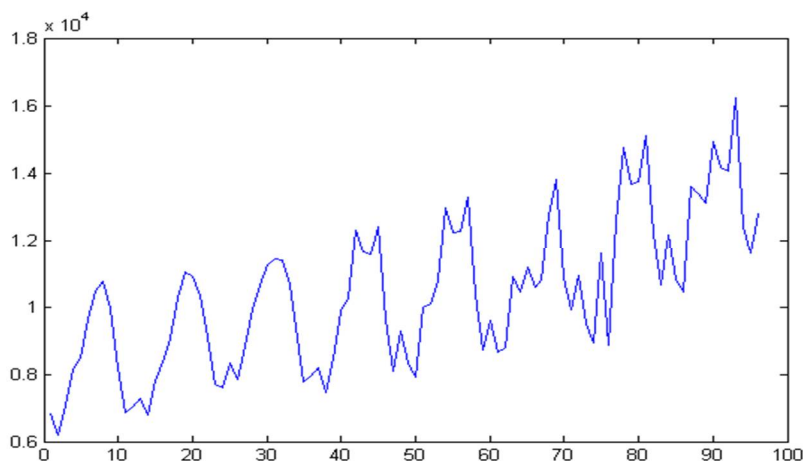


Рисунок 4 – Расстояния, пройденные авиалайнерами за месяц, тыс миль
Figure 4 – The distances passed by airliners in a month, thousand miles

Данный временной ряд представляет особый интерес, поскольку в его составе имеются возрастающий тренд и квазипериодические колебания с изменяющейся от года к году амплитудой. То есть он полностью соответствует характеристикам временных рядов, для которых построена модель (5), (6). Кроме этого, в динамике ряда, начиная с 4-го года, появляются неустойчивые внутригодовые изменения, которые не учитываются предложенной моде-

лью (5), (6). Данное обстоятельство создает существенные проблемы для прогнозирования ряда. Далее будет рассмотрено расширение модели (5), (6) для целей прогнозирования.

При раздельном оценивании параметров модели (3) получены следующие результаты по первым 60 точкам (5 лет):

– модель линейного тренда $\hat{y}(t) = 7953,8 + 49,0647t$, $t = 1, 2, \dots, 60$;

– анализ амплитудного спектра остатка $v(t) = y(t) - \hat{y}(t) = s(t) + \xi(t)$, $t = \overline{1, 60}$ позволил установить наличие периодической компоненты в составе ряда и определить ее период $T = 12$ (рисунок 5);

– модель сезонной компоненты

$$\hat{u}(t) = (-1567,4 - 4,05t)\cos((\pi/6)t) + (-1132,3 + 3,289t)\sin((\pi/6)t), \quad t = 1, 2, \dots, 60.$$

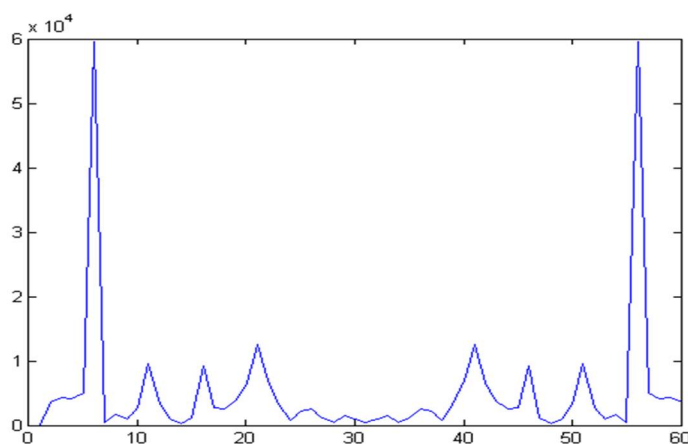


Рисунок 5 – Амплитудный спектр остаточной компоненты $v(t) = y(t) - \hat{y}(t)$

Figure 5 – Residual component amplitude spectrum $v(t) = y(t) - \hat{y}(t)$

Среднеквадратическая ошибка аппроксимации исходного ряда по полученной модели ряда равна 561,06, что соответствует 5,1 % от среднего значения ряда на рассматриваемом промежутке.

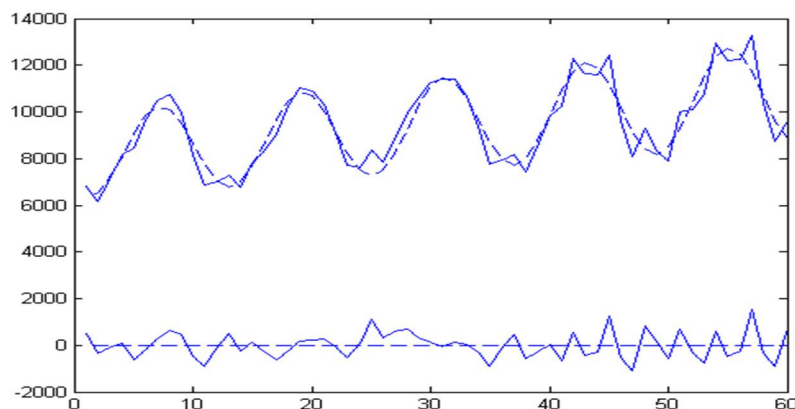


Рисунок 6 – Аппроксимация ряда (пунктирная линия) и остаточная компонента

$v(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ (график в нижней части)

Figure 6 – Series Approximation (Dashed Line) and Residual Component

$v(t) = y(t) - \hat{y}(t)$ (Bottom Plot)

Рассмотрим теперь результаты аппроксимации исходного ряда на рассматриваемом временном промежутке в 5 лет по модели (5), (6) при совместном оценивании всех параметров модели. В этом случае получена следующая модель:

$$\hat{y}(t) = 8064,7 + 45,438 \cdot t + (-1457,8 - 7,496 \cdot t) \cos((\pi/6)t) + (-1028,1 - 0,843 \cdot t) \sin((\pi/6)t), \quad t = \overline{1, 60}.$$

Аппроксимация уровней временного ряда по полученной модели приведена на рисунке 6.

Среднеквадратическая ошибка аппроксимации по данной модели ряда равна 553,66, что только на 1,3 % меньше по сравнению с аппроксимацией по модели (3) – при отдельном оценивании параметров модели.

Прогнозирование уровней ряда. Визуальный анализ графика на рисунке 4 позволяет выделить три промежутка с различной динамикой процесса. Первый промежуток включает в себя первые три года (36 точек). На этом промежутке график ряда изменяется в целом плавно, за исключением 11-го, 12-го и 1-го месяцев каждого года. Второй промежуток содержит 24 точки (4-й и 5-й) годы. Здесь, в дополнение к названным особенностям, появляются нарушения плавности изменения уровней ряда еще и в 5-м, 6-м и 7-м месяцах. Третий период – это последние три года. На данном промежутке динамика изменений уровней ряда противоречива и потому существенно затрудняет прогнозирование ряда. Отметим, что особенности поведения ряда на выделенных трех промежутках подтверждаются и результатами моделирования. Так, среднеквадратическая ошибка аппроксимации по первым 36 – точкам равна $S = 395,06$, а по 60 точкам, как уже отмечалось выше, $S = 553,66$. Это на 40 % больше.

Формальное применение полученной математической модели временного ряда для прогнозирования может привести к некорректным оценкам. На рисунке 7 приведены графики фрагмента исходного ряда (60 точек) и его прогноз по модели.

$$\hat{y}(t) = 8078,4 + 45,290 \cdot t + (-1408,4 - 9,954 \cdot t) \cos((\pi/6)t) + (-1126,3 + 4,504 \cdot t) \sin((\pi/6)t). \quad (8)$$

МНК-оценки коэффициентов в составе (8) получены по первым 48 точкам ряда.

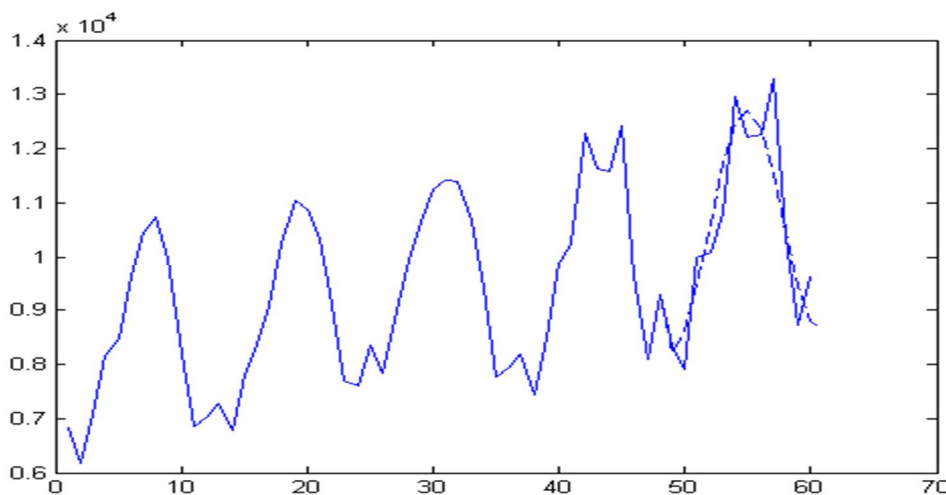


Рисунок 7 – Исходный ряд (сплошная линия) и его прогноз на 12 месяцев (пунктирная линия)

Figure 7 – Initial series (solid line) and its 12-month prognosis (dotted line)

Среднеквадратическая ошибка прогноза по приведенной модели равна $S = 745,09$. Эта ошибка существенно больше среднеквадратической ошибки $S = 503,93$ аппроксимации по 48 точкам. Причина такой большой ошибки, как уже отмечалось, заключается в появлении в рамках 4-го и 5-го годов резких изменений значений ряда в 5–7 месяцах. Для учета этих изменений предлагается прогноз осуществлять по модели (8), дополненной еще одним слагаемым $v(t-12) = y(t-12) - \hat{y}(t-12)$, $t = 49, 50, \dots, 60$. Значит, предлагается прибавлять к прогнозным значениям $\hat{y}(t)$ в каждый момент времени $t = 49, 50, \dots, 60$ разность между значением ряда $y(t-12)$ в соответствующем месяце предыдущего года и его оценкой $\hat{y}(t-12)$, полученной по модели (8).

Результаты прогноза по такой модели приведены на рисунке 8.

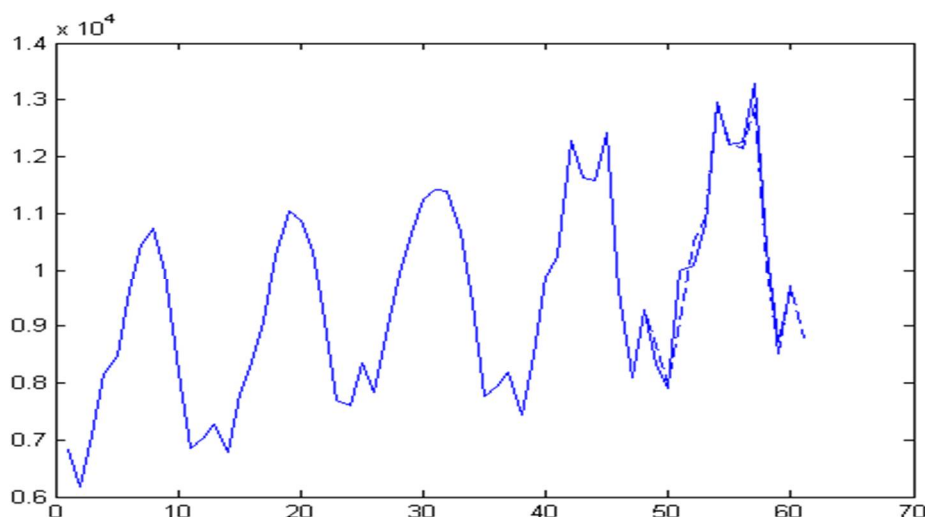


Рисунок 8 – Исходный ряд (сплошная линия) и его прогноз на 12 месяцев (пунктирная линия)

Figure 8 – Initial series (solid line) and its 12-month prognosis (dotted line)

Среднеквадратическая ошибка прогноза по модифицированной таким образом модели равна $S = 346,82$, что более чем в 2 раза меньше ошибки по модели (8). Столь высокий результат объясняется сохранением на прогнозном промежутке изменений в динамике ряда, которые возникли в предыдущем периоде – точки 37, 38, ..., 48.

Как уже отмечалось, в динамике ряда на промежутке 61-й – 96-й месяцы появляются существенные изменения (рисунок 4). Поэтому прогноз ряда по модели (5), (6), коэффициенты которой найдены по первым 60-ти точкам, вперед на 12 месяцев (точки 61, 62, ..., 72) оказывается существенно хуже. Среднеквадратическая ошибка прогноза $S=1288,4$. Тем не менее, и в этом случае добавление к прогнозным оценкам разности $v(t-12) = y(t-12) - \hat{y}(t-12)$, $t = 61, 62, \dots, 72$, позволило уменьшить среднеквадратическую ошибку прогноза до $S = 1115,3$.

Заключение

Предложена математическая модель временного ряда, являющегося аддитивной смесью низкочастотной (тренда), циклической и случайной компонент. Особенностью рассматриваемых рядов является возрастающая (убывающая) амплитуда колебаний циклической компоненты на рассматриваемом промежутке. Для учета изменений амплитуды гармоник, аппроксимирующей квазипериодическую компоненту ряда, коэффициенты при функциях синус и косинус находятся как линейные функции времени.

Для учета на этапе прогнозирования кратковременных изменений в динамике ряда, не объясняемых математической моделью, предложено включать в прогнозную модель разность между значениями исходного ряда и оценками по используемой модели за промежуток времени, предшествующий прогнозному периоду и совпадающий с ним по длине. Такая модификация прогнозной модели позволяет повысить точность прогноза, особенно на промежутках с особенностями в динамике ряда, не учитываемыми классическими параметрическими моделями.

Библиографический список

1. Кендалл М.Дж., Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. – М.: Наука, 1976. – 736 с.
2. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. – М.: Мир, 1976. – 755 с.
3. Бриллинджер Д. Временные ряды. Обработка данных и теория. – М.: Мир, 1980. – 536 с.
4. Отнес Р., Энксон Л. Прикладной анализ временных рядов. – М.: Мир, 1980. – 428 с.

5. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Выпуск 1. – М.: Мир, 1974. – 406 с.
6. Айвазян С.А. Статистическое исследование зависимостей. – М.: Финансы и статистика, 1985. – 487 с.
7. Четыркин Е.М. Статистические методы прогнозирования. – М.: Статистика, 1977. – 184 с.
8. Гренджер К., Хатанака М. Спектральный анализ временных рядов в экономике. – М.: Статистика, 1972. – 312 с.
9. Бендат Дж., Пирсол А. Применение корреляционного и спектрального анализа. – М.: Мир, 1983. – 312 с.
10. Кендалл М. Временные ряды. – М.: Финансы и статистика, 1981. – 199 с.
11. Новиков А.И. Обоснование выбора фильтров временных рядов с использованием симметричных операторов скользящих средних. Экономика и математические методы. Т. XIX, вып. 1. 1983. – С. 138-147.
12. Новиков А.И. Некоторые вопросы декомпозиции экономических временных рядов. Экономика и математические методы. Т. XXI, вып. 3. 1985. – С. 511-520.
13. Чураков Е.П. Прогнозирование эконометрических временных рядов. – М.: Финансы и статистика, 1985. – 208 с.
14. Айвазян С.А. Основы эконометрика. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 432 с. вопросы радиолокации // Под ред. П. А. Бакулева. М.: Изд-во МАИ. 2016. 216 с.

UDC 519.332

ANALYSIS AND FORECASTING OF NONSTATIONARY TIME SERIES WITH A SEASONAL COMPONENT

A. I. Novikov, Dr. Sc. (Tech.), associate Professor department of higher mathematics RSREU, Ryazan, Russia, orcid.org/0000-0002-8166-8234, e-mail: novikovanatoly@yandex.ru

A. G. Agafonov, student of RSREU, Ryazan, Russia, orcid.org/0009-0005-1939-1106, e-mail: aleksander.agafonov.0@gmail.com

The aim of the work is to develop methods for analyzing and predicting time series that are an additive mixture of low-frequency (trend), cyclic and random components. A feature of cyclic, in particular, seasonal component in the examples under consideration is the change in its amplitude during the transition from one time interval corresponding to the oscillation period to the next period. Several approaches to the study of such series are considered. A traditional approach is when a trend, a cyclical component and the remainder of the series are sequentially highlighted. The modification consists in the fact that in order to account for changes in the amplitude of cyclic component, a description of the coefficients in the model of harmonic component for sine and cosine functions in the form of linear functions of time is proposed. In the second case, all the parameters of the model describing such a series are found together using the least squares method (LSM). This makes it possible to increase the accuracy of both the approximation of the series and its forecast. To improve the accuracy of time series forecast, in the dynamics of which local features appear that are not taken into account by a mathematical model of the series, the authors propose the difference between the values of the original series and the estimates to be included in a forecast model according to the model used for the time period preceding a forecast period and coinciding with it in length.

Keywords: time series, trend, cyclic component, seasonality, forecasting, discrete Fourier transform, amplitude spectrum.

DOI: 10.21667/1995-4565-2024-87-111-120

References

1. Kendall M. G., Stewart A. *Mnogomernyj statisticheskij analiz i vremennye ryady*. – М.: Nauka, 1976. – 736 p.
2. Anderson T. *Statisticheskij analiz vremennyh ryadov*. – М.: Mir, 1976. – 755 p.
3. Brillindzher D. *Vremennye ryady. Obrabotka dannyh i teoriya*. – М.: Mir, 1980. – 536 p.

4. **Otnes R., Enokson L.** *Prikladnoj analiz vremennyh ryadov.* – M.: Mir, 1980. – 428 p.
5. **Boks J., Dzhenkins G.** *Analiz vremennyh ryadov. Prognoz i upravlenie.* Vypusk 1. – M.: Mir, 1974. – 406 p.
6. **Ajvazyan S. A.** *Statisticheskoe issledovanie zavisimostej.* – M.: Finansy i statistika, 1985. – 487 p.
7. **Chetyrkin E. M.** *Statisticheskie metody prognozirovaniya.* – M.: Statistika, 1977. – 184 p.
8. **Grendzher K., Hatanaka M.** *Spektralnyj analiz vremennyh ryadov v ekonomike.* – M.: Statistika, 1972. – 312 p.
9. **Bendat J., Pirsol A.** *Primenenie korrelyacionnogo i spektralnogo analiza.* – M.: Mir, 1983. – 312 p.
10. **Kendall M.** *Vremennye ryady.* – M.: Finansy i statistika, 1981. – 199 p.
11. **Novikov A I.** *Obosnovanie vybora filtrov vremennyh ryadov s ispolzovaniem simmetrichnyh operatorov skolzyashchih srednih.* *Ekonomika i matematicheskie metody.* T.XIX, vyp.1. 1983. – P. 138-147.
12. **Novikov A. I.** *Nekotorye voprosy dekompozicii ekonomicheskikh vremennyh ryadov.* *Ekonomika i matematicheskie metody.* T.XXI, vyp.3. 1985. – P. 511-520.
13. **Churakov E. P.** *Prognozirovanie ekonometricheskikh vremennyh ryadov.* – M.: Finansy i statistika, 1985. – 208 p.
14. **Ajvazyan S. A.** *Osnovy ekonometrika.* – M.: YUNITI-DANA, 2001. – 432 p.