

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ И КОМПЬЮТЕРНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ**

УДК 004.925.86

**ФОРМИРОВАНИЕ МУЛЬТИФРАКТАЛОВ МЕТОДОМ РОСТА В ТЕХНОЛОГИЯХ ВИРТУАЛЬНОЙ И ДОПОЛНЕННОЙ РЕАЛЬНОСТЕЙ**

**К. А. Майков**, д.т.н., профессор кафедры «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии» МГТУ имени Н.Э. Баумана, Москва, Россия;

orcid.org/0000-0003-1864-2397, e-mail: maikov@bmstu.ru

**А. Н. Пылькин**, д.т.н., профессор кафедры «Вычислительная и прикладная математика» РГРТУ, Рязань, Россия;

orcid.org/0000-0001-9925-2870, e-mail: pylkin.a.n@rsreu.ru

**С. Н. Кузьменко**, к.ф.м.н., доцент кафедры «Математика, физика и информатика» ФГБОУ ВО «КГМТУ», Керчь, Россия;

orcid.org/0000-0002-1039-1274, e-mail: ksn1160@mail.ru

**А. А. Теплов**, аспирант кафедры «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии» МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва, Россия;

orcid.org/0000-0002-1785-6089, e-mail: teploff.aa@gmail.com

*Предложен способ моделирования мультифракталов методом роста на стационарных и растущих геометрических носителях. Решена задача управления мультифрактальными спектрами и процессами роста мультифрактальных структур. Предложена концепция многопараметрических или векторных мультифракталов, позволяющая описывать нетривиальные мультифрактальные комплексы. Разработаны алгоритмы вычисления мультифрактальной структуры на растущем монофрактале и вычисления точечных мультифракталов. Анализ результатов машинных экспериментов подтвердил практическую применимость предложенных алгоритмов.*

**Ключевые слова:** виртуальная и дополненная реальность, численное моделирование, мультифракталы, мультифрактальный спектр, закон роста мультифракталов, алгоритмы построения мультифракталов.

**DOI:** 10.21667/1995-4565-2025-91-104-117

**Введение**

Мультифрактал является естественным обобщением понятия монофрактала [4, 14] и позволяет описать более широкий класс объектов реального мира. В то время как монофрактал характеризуется масштабной инвариантностью структуры, которая количественно описывается фрактальной размерностью  $D$  [2, 8, 11], мультифрактал характеризуется масштабной неоднородностью структуры, для описания которой используется мультифрактальный спектр  $D(q) = D_q$  [3, 14, 15]. Так как масштабной неоднородностью обладают практически все сложные системы реального мира, возникает практическая востребованность в методах формализации и вычислений, позволяющих решать прикладные задачи формирования таких систем в технологиях виртуальной и дополненной реальностей [1, 7]. Особую практическую актуальность эта проблема приобретает в решении задач вычисления сложных структур при ограниченных ресурсах аппаратных платформ, например в беспилотных летальных аппаратах [7]. Так же слабо изученными остаются процессы вычисления мультифракталов во времени [7, 12] такие, как рост и деградация [16, 22]. В [9, 10] рассмотрены основные положения метода формализации процессов роста монофракталов.

В силу большого многообразия мультифракталов их классификация пока не сформирована. Для целей настоящей работы авторами было предложено два типа: размерные и точечные. Элементы размерных мультифракталов представляются линейными, плоскими или объемными фигурами, элементы точечных мультифракталов – точками. И размерные, и точечные элементы обеих групп имеют числовую характеристику, называемую мультифрактальным параметром, весом и т.д.

Рост мультифрактала может быть осуществлен на стационарных или растущих геометрических носителях. В силу того, что геометрические носители сами могут изменяться во времени, возникает проблема конкатенации процессов роста основы и растущего на ней мультифрактала. В данной работе на простых моделях изучаются процессы роста мультифракталов на растущей геометрической основе – на растущем монофрактале и на стационарной геометрической основе – на плоскости. Проанализированы возможности и предложены методы управления процессом роста и спектром мультифракталов.

### Мультифрактальный анализ в процессах роста

Мультифрактальный анализ [12, 14, 15] начинается с разбиения пространства, охватывающего исследуемый объект на  $N$  ячеек размером  $\varepsilon_i$ . Для ячеек определяется мера  $p_i$ , удовлетворяющая условию

$$\sum_{i=1}^N p_i(\varepsilon) = 1. \quad (1)$$

Исследуемый объект называется базовым множеством меры. Суммированием по всем ячейкам с отличной от нуля мерой строится обобщенная статистическая сумма (обобщенная корреляционная функция)

$$Z(q, \varepsilon) = \sum_{i=1}^N p_i^q(\varepsilon), \quad (2)$$

где целочисленный параметр  $q$  – порядок обобщенной фрактальной размерности Реньи – принимает целочисленные значения из интервала  $-\infty < q < +\infty$ . Спектр обобщенных фрактальных размерностей Реньи определяется соотношением

$$D_q = \frac{\tau(q)}{q-1}, \quad (3)$$

в котором функция  $\tau(q)$  – скейлинговая экспонента – рассчитывается в зависимости от характера разбиения пространства на ячейки. Когда размеры всех ячеек  $\varepsilon_i = \varepsilon$  одинаковы, эта функция приобретает вид

$$\tau(q) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln Z(q, \varepsilon)}{\ln \varepsilon}, \quad (4)$$

а в случае ячеек  $\varepsilon_i$  различных размеров рассматриваемая функция определяется как решение уравнения вида

$$\frac{p_1^q}{(\varepsilon_1)^{\tau(q)}} + \frac{p_2^q}{(\varepsilon_2)^{\tau(q)}} + \dots + \frac{p_n^q}{(\varepsilon_n)^{\tau(q)}} = 1. \quad (5)$$

Необходимо выделить два принципиальных случая. Если обобщенный спектр тривиален, т.е.  $D_q = D$  не зависит от  $q$ , то исследуемое множество является монофракталом с фрактальной размерностью  $D$ . Напротив, если  $D_q$  зависит от  $q$ , то исследуемое множество является мультифракталом. Мультифрактальной мерой упорядоченности или ширины мультифрактального спектра является разность  $\Delta_\infty = D_1 - D_\infty$  или ее оценка

$$\Delta_\infty = D_1 - D_q, \quad (6)$$

при  $q \gg 1$ . Чем больше значение (6), тем в более широком диапазоне пространственных масштабов структурирована мультифрактальная система.

В процессе роста мультифрактала изменяется его мультифрактальный спектр, анализ которого необходимо выполнять при генерации репрезентативного количества точек. В результате проделанных авторами многочисленных машинных экспериментов (порядка десяти тысяч серий) было установлено, что стабильная монотонная эволюция спектра начинается при генерации не менее двадцати процентов точек от их максимального числа.

### Вычисление мультифрактала на растущем монофрактале

Один из способов сформировать мультифрактал – сделать неоднородным монофрактал. Для геометрического линейного монофрактала это означает, что каждому отрезку сопоставляется мультифрактальный параметр, смысл которого определяется для конкретной задачи. Возможны два различающихся варианта таких параметров. Для аддитивных параметров, например массы отрезка фрактала, числа частиц, их текущее значение пропорционально длине отрезка

$$m_i = \lambda_i s_i, \quad (7)$$

где  $m_i$  – текущее значение параметра в  $i$ -м цикле роста;  $\lambda_i$  – линейная плотность параметра;  $s_i$  – текущая длина отрезка. Соответствующая этому параметру мера определяется соотношением вида

$$p_i = \frac{m_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\lambda_i s_i}{\sum_{i=1}^N \lambda_i s_i}. \quad (8)$$

Для неаддитивных параметров, например цвета, освещенности, температуры, их значения от длины отрезка не зависят. Тем не менее, и для таких величин, мера определяется соотношениями (7) и (8), так как является исключительно геометрической характеристикой.

В работах [9, 10] изложены алгоритмы и закономерности роста монофрактала, в частности типа «снежинки Коха». В данной работе путём присваивания каждому отрезку массы  $m_i$  согласно соотношению (7) изучены закономерности роста мультифракталов на растущем монофрактале. Наглядная визуализация распределения мультифрактального параметра массы на отрезках монофрактала приведена на рисунке 1.

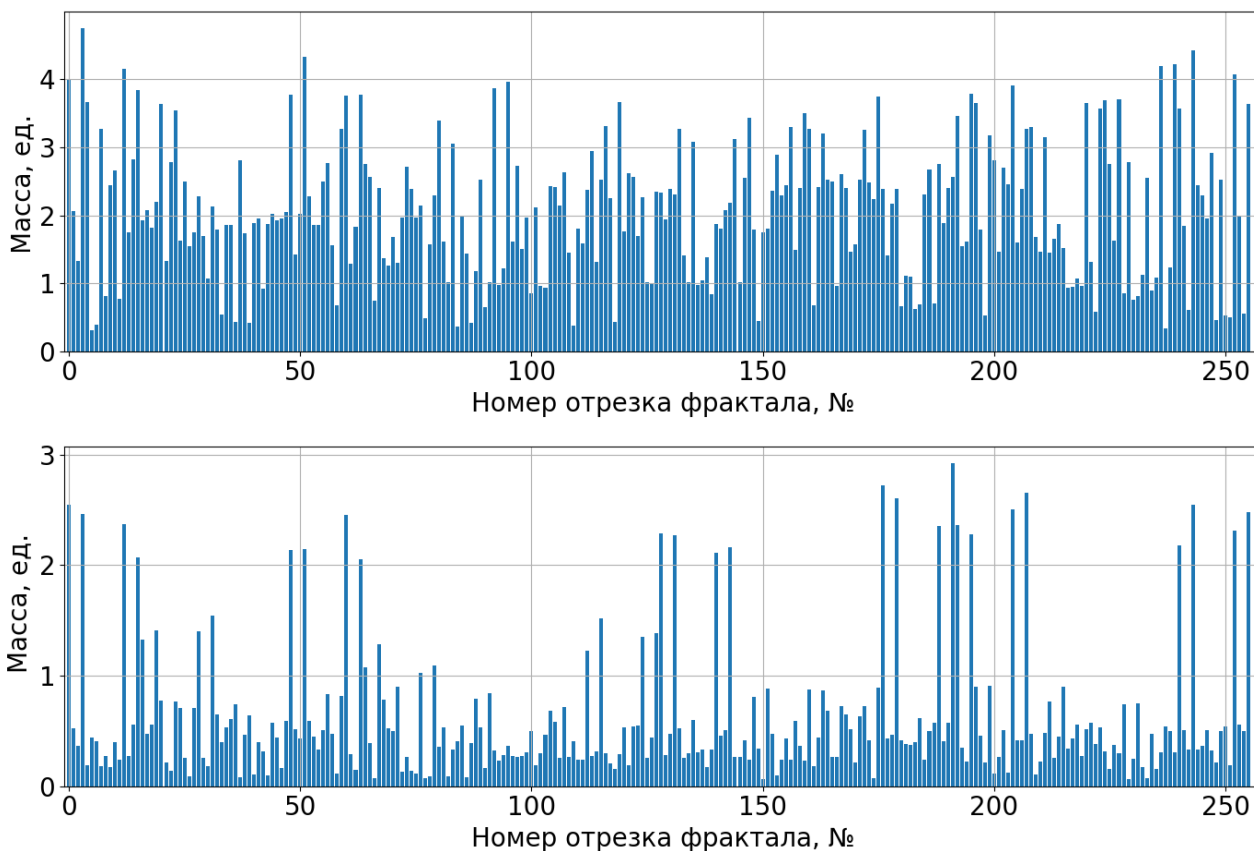
Так как длина отрезков монофрактала изменялась в процессе его роста, расчет спектров мультифракталов осуществлялся согласно соотношениям (1), (2), (3), (5). Управление мультифрактальным спектром для вычисленных выше мультифракталов осуществляется двумя способами.

**1. Вариации диапазона разброса масс.** Чем шире диапазон разброса масс отрезков  $\Delta m_i = m_{\max} - m_{\min}$ , тем больше ширина спектра  $\Delta_\infty$  (6). На рисунке 2 слева представлены мультифрактальные спектры для различных диапазонов изменения масс  $\Delta m_i$ .

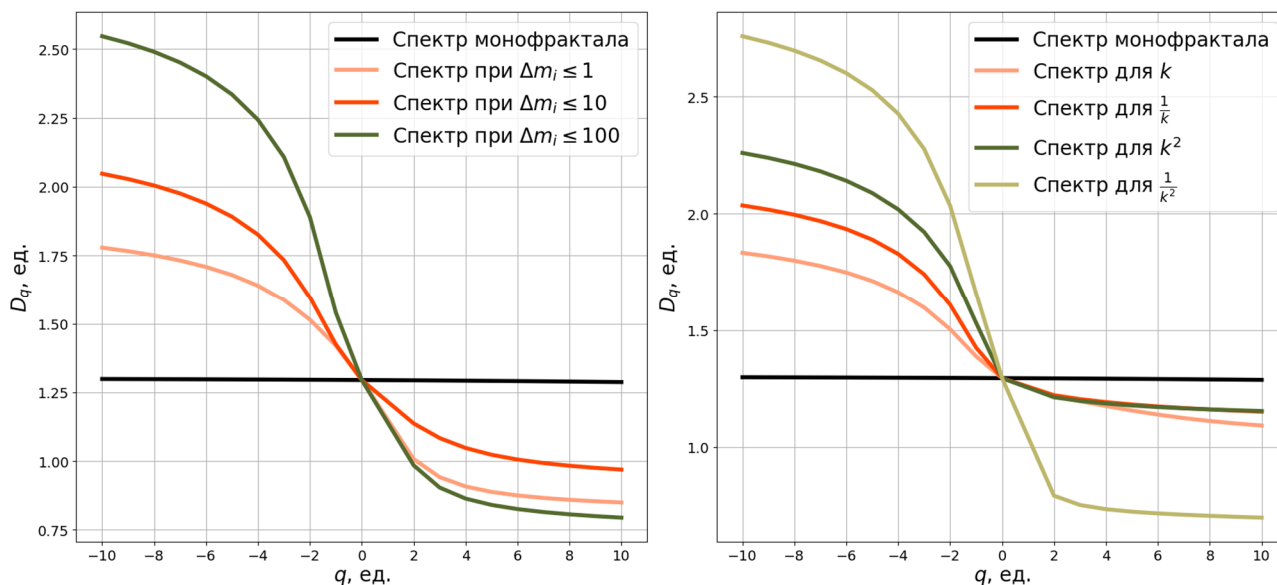
**2. Закономерности распределения масс.** Преобразования масс отрезков задают их функциональную зависимость от порядка отрезков монофрактала. Например, с ростом порядка отрезков монофрактала их масса уменьшается обратно пропорционально порядку. Из представленных на рисунке 1 изображений мультифракталов верхнее распределение соответствует массам отрезков без преобразований, а нижнее – с преобразованиями, обратно пропорциональными порядку фрактала  $k$ . Визуальное различие более строго фиксируется анализом мультифрактальных спектров. На рисунке 2, справа представлены спектры для четырех простых типов степенных функциональных преобразований: пропорциональных и обратно пропорциональных первой и второй степени порядка отрезка монофрактала  $k$ .

Видно, что функциональные преобразования масс отрезков оказывают более сложное воздействие на спектры, чем изменение диапазона разброса масс отрезков фрактала (рисунок 2, слева).

Кривая роста мультифракталов – еще одна характеристика, которой можно управлять, как и мультифрактальным спектром. На рисунке 3, слева представлены кривые роста базового монофрактала и растущего на нем мультифрактала. Можно выделить два свойства этих зависимостей.



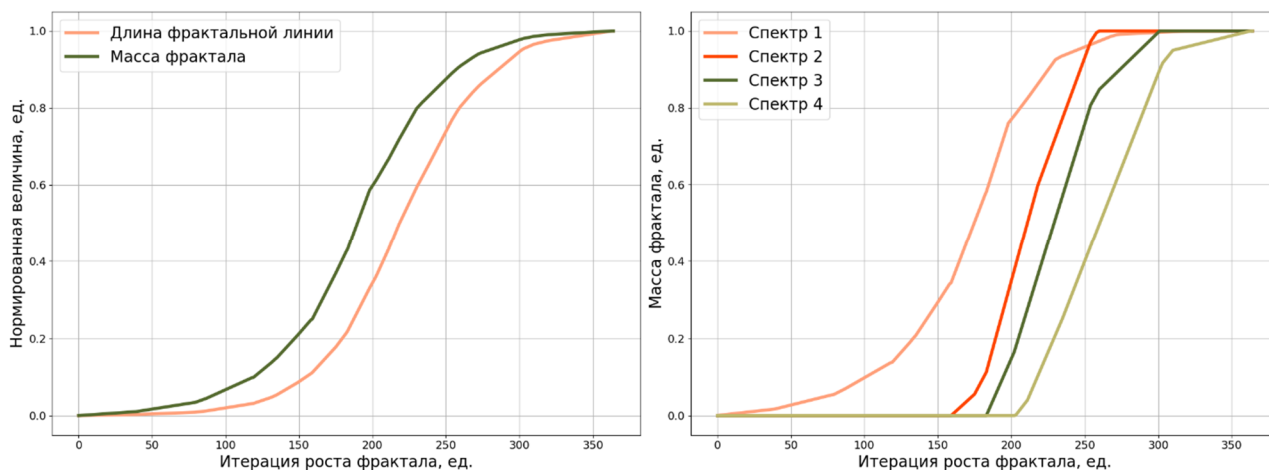
**Рисунок 1 – Распределение мультифрактального параметра на отрезках монофракталов**  
**Figure 1 – Distribution of multifractal parameter on monofractal segments**



**Рисунок 2 – Влияние диапазона разброса (слева) и структурных преобразований (справа) масс отрезков на мультифрактальные спектры**  
**Figure 2 – Effect of dispersion range (left) and structural transformations (right) of segment masses on multifractal spectra**

1. **Кривые роста обоих объектов подобны.** Мультифрактал наследует логистический характер роста от монофрактала, на котором он определен.

2. **Кривые роста смещены (т. е. имеют фазовый сдвиг).** Величиной этого сдвига можно управлять путем перераспределения масс отрезков (рисунок 3, справа), сдвигом фаз роста длины отрезка и его массы.



**Рисунок 3 – Кривые роста мультифрактала на растущем монофрактале**

**Figure 3 – Multifractal growth curves on growing monofractal**

#### **Алгоритм вычисления мультифрактала на растущем монофрактале**

На основе вышеизложенных способов вычисления мультифрактала и описанного к ним математического аппарата был разработан алгоритм вычисления мультифрактала на растущем монофрактале. Мультифрактальные структуры, анализ которых был представлен на рисунках 1, 2 и 3 соответственно, были вычислены с использованием предложенного алгоритма. Общая схема алгоритма вычисления мультифрактала на растущем монофрактале представлена на рисунке 4.

Исходя из схемы, представленной на рисунке, входными параметрами являются: количество итерационных циклов роста **count\_iters** монофрактала; порядок фрактала **fractal\_depth**; максимальная величина отрезка монофрактала **max\_len**; начальная точка **c\_point**, из которой происходят зарождение и дальнейший рост монофрактала; максимальная величина массы отрезка фрактала **max\_m**. Затем происходит итерационный рост фрактала из точки, каждая из итераций которого записывается в массив **growth\_iters**. По мере роста монофрактала происходит рост массы отдельных его отрезков. Далее осуществляется вычисление активных отрезков **active\_segments**, которые итерационно увеличиваются в длине и массе процедурой **increase\_segment**. По мере достижения отрезком фрактала длины **max\_len** и массы **max\_m** формируется новый кортеж отрезков процедурой **calc\_base\_struct**, который заносится в список активных отрезков **active\_segments**. Процедура повторяется до тех пор, пока список активных отрезков не пуст и все отрезки не достигли порядка фрактала **fractal\_depth**.

Так как в данном случае монофракталом, на котором вычислялся мультифрактал, была «снежинка Коха», то количество отрезков пропорционально заданному порядку фрактала **fractal\_depth** и имеет значение  $4^k$ , где  $k$  – порядок фрактала. Соответственно из вышеописанной схемы алгоритма вычислительная сложность [5] алгоритма представляется как:  $O(4^k N) \rightarrow O(4^k)$ , где  $k$  – порядок фрактала, а  $N$  – количество итерационных циклов роста для каждого из порядка  $k$ .

Реализация алгоритма выполнена на языке программирования Python 3.12 версии [19] с использованием развитых интегрируемых библиотек, таких как `ursina` [21], `scipy` [20] и `matplotlib` [17].

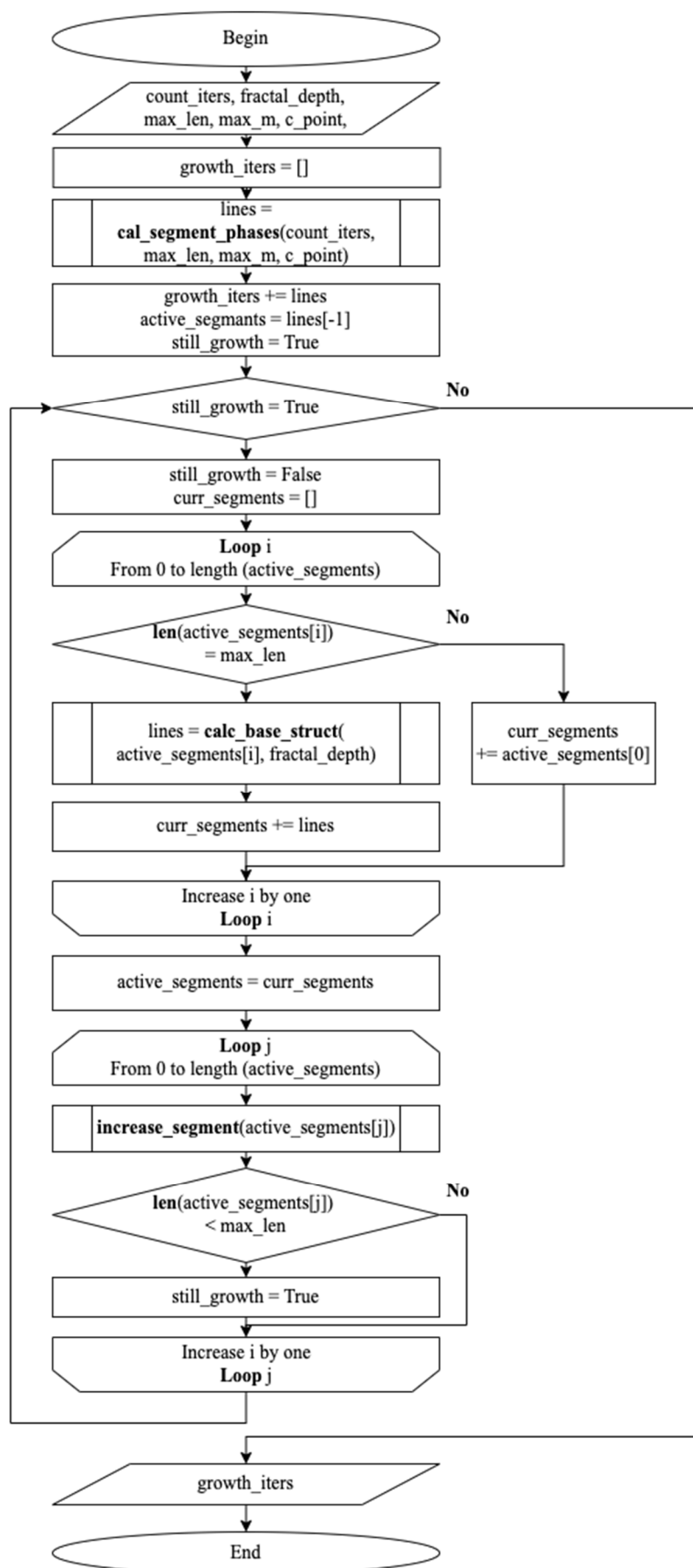


Рисунок 4 – Схема алгоритма вычисления мультифрактала на растущем монофрактале  
 Figure 4 – Scheme of the algorithm to calculate multifractal on growing monofracta

### Точечные мультифракталы

Точечные мультифракталы представляют собой неоднородное, структурированное произвольным способом множество точек. Для задач проектирования виртуальной и дополненной реальности такие мультифракталы являются ключевым инструментом. Способы генерации точечных мультифракталов рассмотрены в работах [13, 14]. Мультифрактал отличается от однородного множества точек наличием внутренней стохастической структуры. Для генерации такой структуры в рамках данной работы авторами предложен метод эпицентров, в котором производится генерация первичного множества точек (эпицентров), вокруг которых с заданным законом распределения (например, показательным, параболическим и др.) вычисляется вторичное множество точек (дочерние точки). В произвольный момент времени каждая точка из вторичного множества точек может стать эпицентром. В предельном случае элементами мультифрактала являются сами эпицентры, а дочерние точки вокруг них исключаются. Эта версия может быть использована, в частности, для создания стохастически однородного фона – с тривиальным или слабо выраженным мультифрактальным спектром. Такая структура алгоритма генерации обеспечивает большое число варьируемых параметров для генерации мультифракталов с требуемыми характеристиками. Поскольку в данном случае геометрической основой для построения мультифрактала является плоскость и она была неизменной, то в мультифрактальном анализе (1) – (4) рассматривались ячейки одинаковых размеров. Вероятность (1) определялась соотношением

$$p_i = \frac{n_i}{\sum_{i=1}^N n_i}, \quad (9)$$

где  $n_i$  – число точек мультифрактала в ячейке с номером  $i$ . Рассмотрены два способа вычисления мультифрактала в зависимости от характера распределения эпицентров.

**Мультифракталы со случайным распределением эпицентров.** В этом случае распределение эпицентров является случайным и не имеет выраженной структуры. На рисунке 5 показаны несколько этапов процесса роста такого мультифрактала с двумя типами эпицентров при показательном законе распределения точек вокруг эпицентров, когда координаты точек определяются соотношениями

$$x_i = x_0 + (-1)^{\text{rnd}(1,2)} \frac{\ln(p_x)}{\lambda_x}, \quad y_i = y_0 + (-1)^{\text{rnd}(1,2)} \frac{\ln(p_y)}{\lambda_y}, \quad (10)$$

где  $x_0, y_0$  – координаты эпицентра;  $p_x, p_y$  – вероятности – случайные числа из отрезка  $[0, 1]$ ;  $\lambda_x, \lambda_y$  – параметры, определяющие рассеяние случайных точек вокруг эпицентра. При равных значениях параметров  $\lambda_x, \lambda_y$  – распределение точек вокруг эпицентра имеет круговую форму, а при их различных значениях – эллиптическую. Для наглядности точки, соответствующие эпицентрам различных типов, показаны разным цветом.

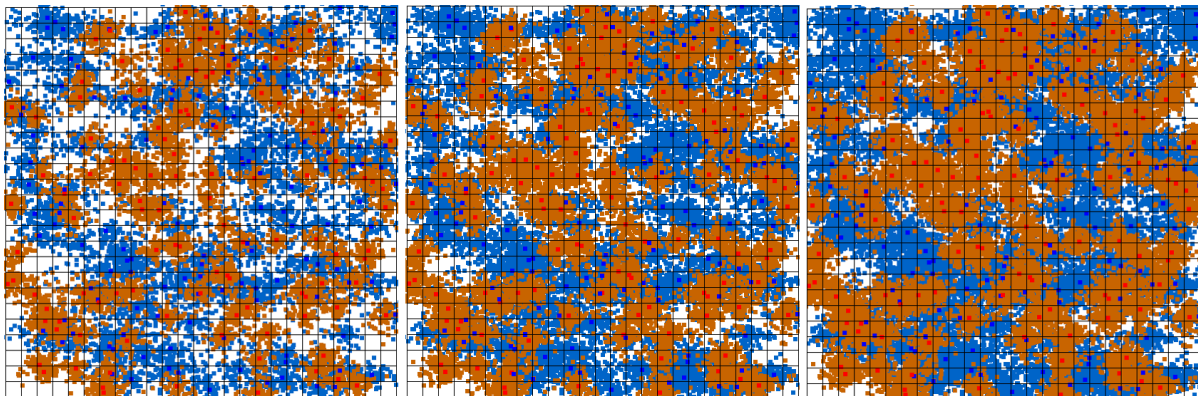
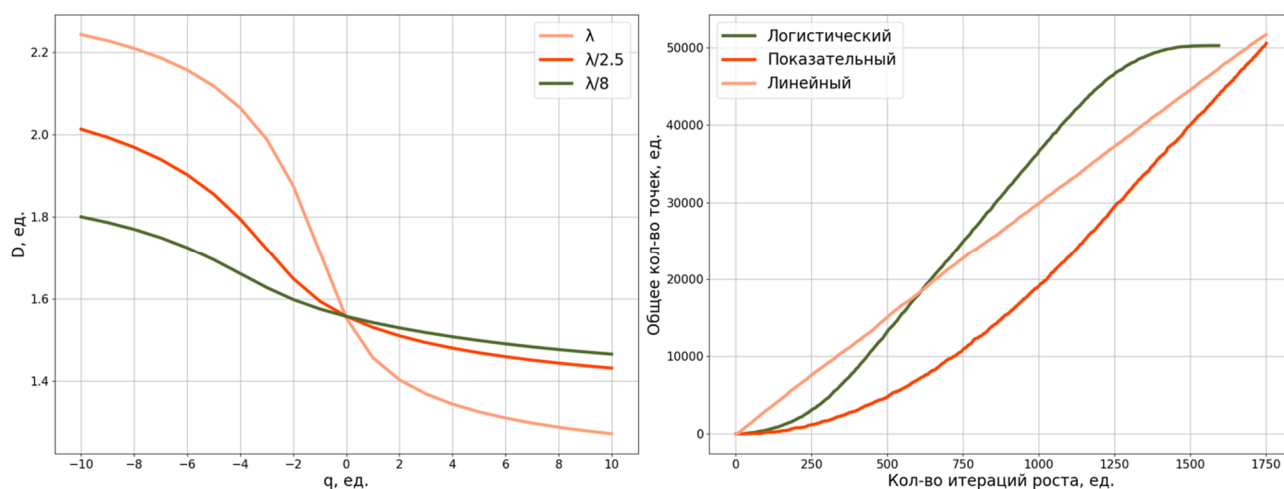


Рисунок 5 – Этапы роста точечного мультифрактала с двумя типами эпицентров  
Figure 5 – Growth stages of point multifractal with two types of epicenters

На рисунке 6, слева представлены мультифрактальные спектры точечных мультифракталов для различных значений параметров  $\lambda$ . С уменьшением этого параметра рассеяние точек вокруг эпицентров увеличивается. Структура мультифрактала становится более однородной, и ширина спектра уменьшается.



**Рисунок 6 – Мультифрактальные спектры для точечных мультифракталов с показательным законом распределения точек вокруг эпицентров и различных значениях параметров  $\lambda$  (слева). Законы роста точечного мультифрактала (справа)**

**Figure 6 – Multifractal spectra for point multifractals with exponential distribution law of points around epicenters and various values of parameters  $\lambda$  (left). Laws of point multifractal growth (right)**

При использовании гиперболического закона координаты точек, окружающих эпицентры, определяются выражениями

$$x_i = x_0 + a_x \operatorname{tg}\left(\left(p_x - \frac{1}{2}\right)\pi\right), \quad y_i = y_0 + a_y \operatorname{tg}\left(\left(p_y - \frac{1}{2}\right)\pi\right), \quad (11)$$

где  $x_0, y_0$  – координаты эпицентра;  $p_x, p_y$  – вероятности – случайные числа из отрезка  $[0, 1]$ ;  $a_x, a_y$  – параметры, определяющие рассеяние случайных точек вокруг эпицентра. Поскольку гиперболические функции медленнее убывают, чем показательные, это приводит к уменьшению ширины мультифрактальных спектров. Одновременное использование широкого набора функций распределения точек вокруг эпицентров позволяет плавно регулировать ширину спектров и расширяет возможности метода по вычислению мультифракталов.

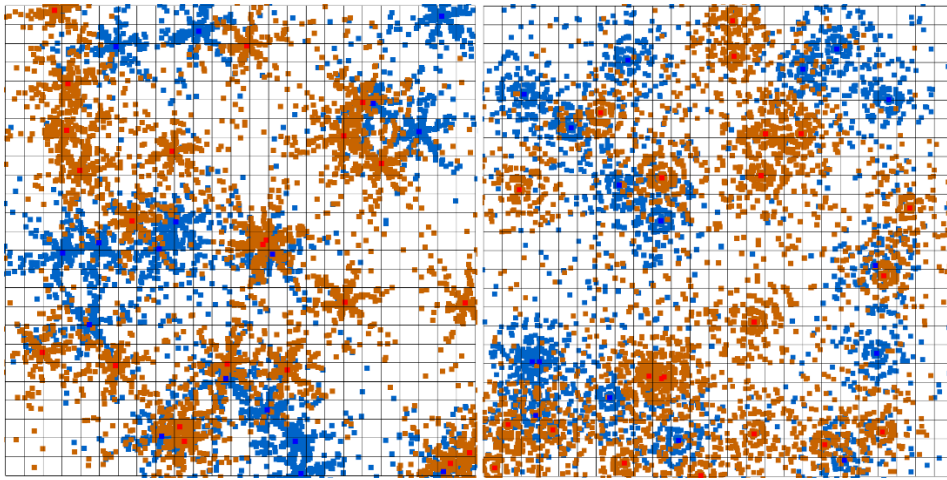
В отличие от случая роста мультифракталов на подвижной геометрической основе, в данном случае управлять закономерностью роста заметно проще. На рисунке 6 справа показаны три варианта закономерностей роста: линейный, показательный и логистический. Для получения линейной закономерности все эпицентры одновременно формировались в начале роста, а далее вокруг них генерировались дочерние точки. Для получения показательной закономерности роста мультифрактала эпицентры, как и дочерние точки, генерировались в течение всего процесса роста. Для логистического характера эпицентры генерировались в течение части времени роста мультифрактала, а дальнейший рост числа дочерних точек формировал окончательное асимптотическое поведение кривой роста.

**Структурные мультифракталы.** Реальные мультифракталы часто достаточно сложно структурированы, поэтому имеют текстуру, детали с зачатками формы и др. Для вычисления сложных видов структурности метод эпицентров обобщается следующими способами.

**1. Модификация закона распределения дочерних точек вокруг эпицентров.** В этом случае резко усложняется характер распределения точек вокруг эпицентров. Для примера на рисунке 7 представлены два варианта таких мультифракталов. Для мультифракталов на левом рисунке ограничения на распределение точек вводились по угловому параметру, что



привело к формированию текстуры вида «звезда». Для мультифракталов на правом рисунке ограничения вводились по расстоянию до эпицентра, что привело к формированию текстуры кругового типа.



**Рисунок 7 – Мультифракталы с модифицированным законом распределения дочерних точек**  
**Figure 7 – Multifractals with modified distribution law of child points**

Представленные модификации имеют симметричное распределение точек вокруг эпицентров, ограниченное только стохастичностью генерации их координат. Выбором функций распределения и условий ограничения на положение точек их распределение можно сделать сколь угодно сложным и асимметричным. Это позволяет создавать большое разнообразие структур мультифракталов и управлять их мультифрактальным спектром.

**2. Модификация закономерности распределения эпицентров.** Элементы текстуры и формы для точечных мультифракталов вводятся условиями на характер расположения эпицентров и модификацию условий распределения дочерних точек вокруг эпицентров согласно предыдущему пункту. Условия на положение эпицентров задаются уравнениями, неравенствами с дополнительными условиями статистического разброса и т.д.

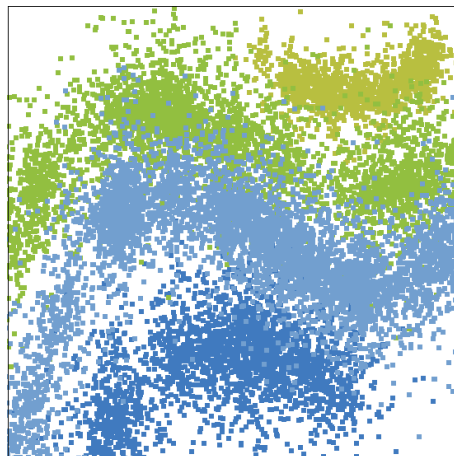
На рисунке 8 представлен мультифрактал с текстурой на основе четырех типов эпицентров, положения которых ограничены четырьмя функциями вида

$$y_1(x) = 0,1(x-2)(x+2)(x-4) - 1; \quad (12)$$

$$y_2(x) = 0,2(x-3)(x+4)(x-4) + 4; \quad (13)$$

$$y_3(x) = -9\sqrt{1-(x-3)^2/5} + 22; \quad (14)$$

$$y_4(x) = 9\sqrt{1-x^2/5} - 15. \quad (15)$$



**Рисунок 8 – Мультифракталы с модифицированным законом распределения эпицентров**  
**Figure 8 – Multifractals with modified law of epicenter distribution**

Количество этих уравнений может варьироваться в зависимости от решения конкретных задач. Исследование влияния преобразований из вышепредставленных пунктов выходит за рамки данной работы и будет проведено в дальнейшем.

### Алгоритм вычисления точечных мультифракталов

Алгоритм представляет собой функциональное единство трех взаимозависимых блоков, решающих следующие задачи:

- вычисление массива эпицентров каждого уровня, исходя из заданного закона распределения;
- вычисление массивов дочерних точек, каждый из которых относится к конкретному эпицентру, вычисленному на предыдущем этапе;
- представление эпицентра или дочерней точки на каждой из итераций роста.

Детальная схема алгоритма вычисления точечных мультифракталов представлена на рисунке 9.

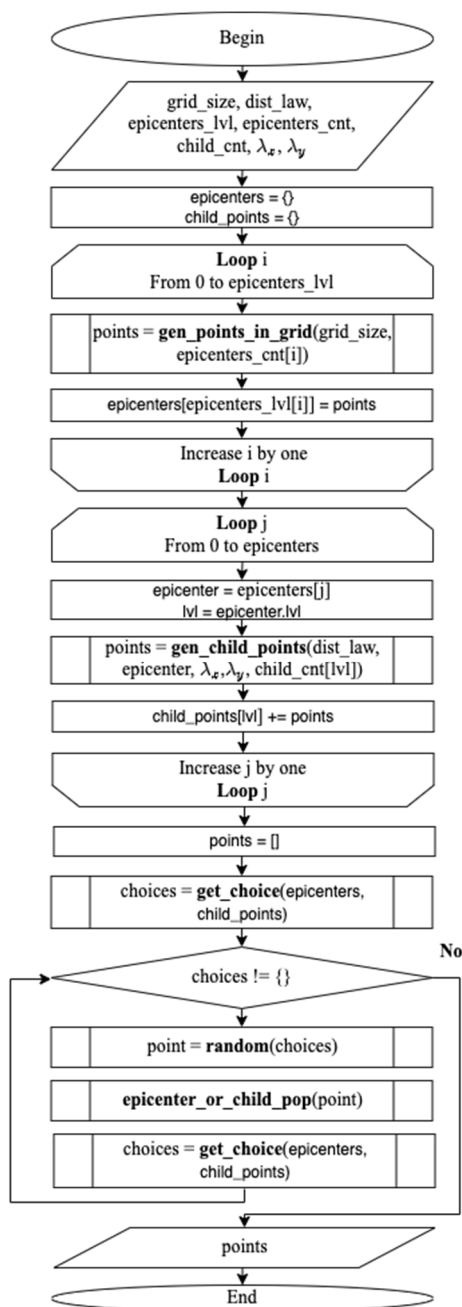


Рисунок 9 – Схема алгоритма вычисления точечных мультифракталов  
 Figure 9 – Scheme of multifractal point calculation algorithm

Вычисление эпицентров **epicenters** количеством **epicenters\_cnt** может происходить на основе случайного закона распределения внутри сетки размером **grid\_size** на **grid\_size** (результаты вычисления представлены на рисунках 5 и 7) или на основе конкретного закона распределения (результаты вычисления представлены на рисунке 8). В свою очередь дочерние точки **child\_points** вычисляются на основе заданного закона распределения **dist\_law**, разница которых видна на рисунках 5 и 7 соответственно, и различных значений параметров  $\lambda$ . После вычисления эпицентров и относящихся к ним дочерних точек реализуется процедура представления всех точек в виде матрицы **points**. Матрица представляет собой массив точек, представленный конкретной итерацией роста мультифрактала.

Вычислительная сложность алгоритма определяется в форме  $O(NK)$ , где  $N$  – количество эпицентров мультифрактала;  $K$  – количество дочерних точек для каждого из эпицентров мультифрактала.

Реализация алгоритма выполнена на языке программирования Python 3.12 версии [19] с использованием развитых интегрируемых библиотек, таких как pygame [18] и matplotlib [17].

### Векторные или многопараметрические мультифракталы

В задачах виртуальной и дополненной реальностей возникает проблема моделирования множественных объектов, которые характеризуются большим числом параметров. Например, опавшие листья характеризуются формой листа, его размером, цветом или типом окраски, массой, ориентацией, временем падения и др. Такой сложный объект можно описать вектором с числом координат, равным числу характеризующих его параметров. Часть или все эти параметры могут быть мультифрактальными. Поэтому такой сложный комплекс мультифракталов можно назвать многопараметрическим или векторным мультифракталом. Каждый мультифрактальный параметр такого вектора имеет свой мультифрактальный спектр. Качество моделирования таких сложных объектов определяется точностью воспроизведения мультифрактальных спектров по каждому параметру.

В качестве примера на рисунке 10 слева представлен объект с четырьмя параметрами: форма, размер, ориентация, цвет – векторный мультифрактал в форме опавших листьев, сгенерированный методом эпицентров. Кроме формы, три других параметра имеют мультифрактальную структуру, мультифрактальные спектры которых представлены на рисунке 8 справа.

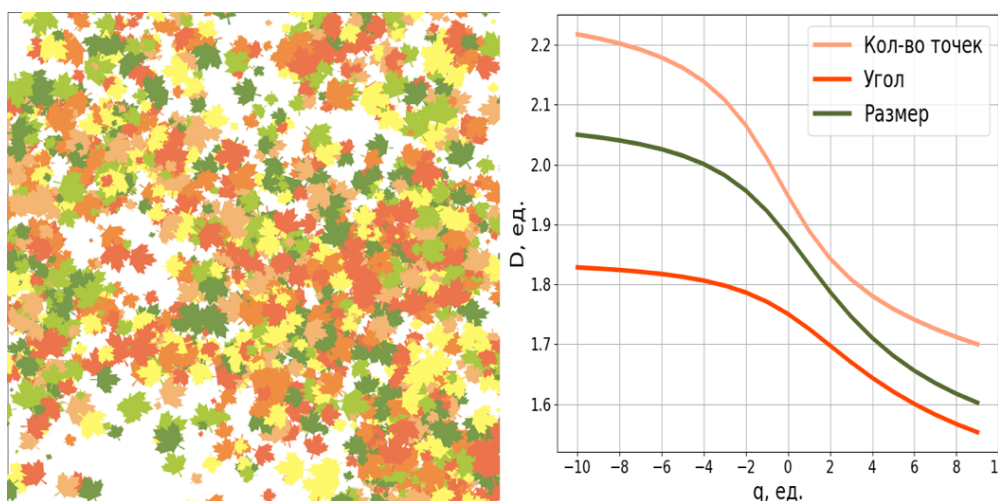


Рисунок 10 – Иллюстрация векторного мультифрактала и мультифрактальные спектры нескольких его параметров

Figure 10 – Illustration of vector multifractal and multifractal spectra of its several parameters

### Заключение

В работе с целью проектирования виртуальной и дополненной реальностей разработаны методы вычисления мультифракталов в процессе их роста. Моделирование роста выполнялось для размерных и точечных мультифракталов на стационарных и растущих геометрических носителях.

Предложены способы управления мультифрактальным спектром для мультифрактала на растущем монофрактале такие, как вариации диапазона разброса масс и вариации законов их распределения.

Произведен анализ управления законом роста мультифракталов во времени. Установлено, что мультифрактал наследует закономерности роста от монофрактала с фазовым сдвигом, которым можно управлять.

Разработаны способы структурирования мультифракталов с текстурой и элементами формы, что характерно для реальных природных мультифракталов. Предложенные решения имеют практическую применимость для анализа и проектирования систем маскировки и микрии [6].

Предложена концепция многопараметрических или векторных мультифракталов, позволяющая единообразно описывать сложные мультифрактальные комплексы объектов, что дает возможность анализировать мультифрактальные свойства самих объектов или отдельных их компонентов.

Проведенные численные экспериментальные исследования алгоритмов вычисления мультифрактала на растущем монофрактале и вычисления точечного мультифрактала подтвердили работоспособность разработанных алгоритмических структур и их практически приемлемую ресурсоемкость.

#### Библиографический список

1. **Акулич М.** Дополненная, виртуальная, смешанная реальность и маркетинг // Издательские решения. 2018. 130 с.
2. **Божокин С.В., Паршин Д.А.** Фракталы и мультифракталы. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2001. 128 с.
3. **Встовский Г.В., Колмаков А.Г., Бунин И.Ж.** Введение в мультифрактальную параметризацию структур материалов. Москва-Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика. 2001. 116 с.
4. **Встовский Г.В.** Элементы информационной физики. М.: МГИУ. 2002. 260 с.
5. **Кнут Д.Э.** Искусство программирования. Том 3. Сортировка и поиск. М.: Вильямс. 2008. 800 с.
6. **Королёв А.Ю., Королёва А.А., Яковлев А.Д.** Маскировка вооружения, техники и объектов. СПб: Университет ИТМО. 2015. 155 с.
7. **Ланье Д.** На заре новой эры. Автобиография отца виртуальной реальности. М.: Эксмо, 2018. 481 с.
8. **Мандельброт Б.** Фрактальная геометрия природы. – Москва: Институт компьютерных исследований. 2002. 656 с.
9. **Майков К.А., Пылькин А.Н., Кузьменко С.Н., Теплов А.А.** Моделирование и анализ закономерностей роста фракталов из материальной точки // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2021. № 75. С. 99-112.
10. **Майков К.А., Пылькин А.Н., Кузьменко С.Н., Теплов А.А.** Моделирование и анализ закономерностей роста трехмерных регулярных и стохастических фракталов // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2022. № 80. С. 134-150.
11. **Потапов А.А.** Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Университетская книга. 2005. 848 с.
12. **Терехов С.В.** Фракталы и физика подобия. Донецк: Цифровая типография. 2011. 255 с.
13. **Учайкин В.В., Гусаров Г.Г.** Анализ структурной функции пространственного распределения галактик в модели случайных блужданий // Изв. вузов. Физика. 1997. № 8. С. 3-7.
14. **Федер Е.** Фракталы: пер. с англ. М.: Мир. 1991. 254 с.
15. **Шелухин О.И.** Мультифракталы. Инфокоммуникационные приложения. М.: Горячая линия – Телеком. 2011. 576 с.
16. **Carlier F, Brion E, Akulin V.** Fractal growth in the presence of a surface force field // The European Physical Journal B. 2012.
17. Matplotlib. [Электронный ресурс] URL: <https://matplotlib.org/>
18. Pygame. [Электронный ресурс] URL: <https://www.pygame.org/>
19. Python. [Электронный ресурс] URL: <https://www.python.org/downloads/release/python-3126/>
20. Scipy. [Электронный ресурс] URL: <https://scipy.org/>
21. Ursina. [Электронный ресурс] URL: <https://www.ursinaengine.org/>

22. **Zhoi M., Zhang H., Wang Y., Bao X.** Morphological Control and Simulation of Fractal Growth // Journal of Northwestern Polytechnical University. 2019. Pp. 846-850.

UDC 004.925.86

## CALCULATION OF MULTIFRACTALS BY GROWTH METHOD IN VIRTUAL AND AUGMENTED REALITIES

**K. A. Maikov**, Dr. Sc. (Tech.), full professor, Informatics and control systems Department, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia;

orcid.org/0000-0003-1864-2397, e-mail: maikov@bmstu.ru

**A. N. Pylkin**, Dr. Sc. (Tech.), full professor, RSREU, Ryazan, Russia;

orcid.org/0000-0001-9925-2870, e-mail: pylkin.a.n@rsreu.ru

**S. N. Kuzmenko**, Ph.D. (Phys.-Math.), associate professor, Department of mathematics, physics and Informatics, Kerch state marine technological University, Kerch, Russia;

orcid.org/0000-0002-1039-1274, e-mail: ksn1160@mail.ru

**A. A. Teplov**, post-graduate student, Informatics and control systems Department, Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia;

orcid.org/0000-0002-1785-6089, e-mail: teploff.aa@gmail.com

*A method for modeling multifractals by growth method on stationary and growing geometric media is proposed. The problem of controlling multifractal spectra and the processes of growth of multifractals over time is solved. The concept of multiparametric or vector multifractals is proposed, which makes it possible to describe non-trivial multifractal complexes. Algorithms for calculating multifractal structure on growing monofractal and calculating point multifractals have been developed. The analysis of machine experiments results confirmed practical applicability of the proposed algorithms.*

**Keywords:** virtual and augmented reality, numerical modeling, multifractals, multifractal spectrum, growth law of multifractals, algorithms for constructing multifractals.

**DOI:** 10.21667/1995-4565-2025-91-104-117

### References

1. **Akulich M.** Dopolnennaya, virtual'naya, smeshannaya real'nost' i marketing. *Izdatel'skie resheniya*. 2018. 130 p. (in Russian).
2. **Bozhokin S.V., Parshin D.A.** *Fraktaly i mul'tifraktaly*. Izhevsk: NIC «Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika». 2001, 128 p. (in Russian).
3. **Vstovskij G.V., Kolmakov A.G., Bunin I.ZH.** *Vvedenie v mul'tifraktal'nyu parametrizaciyu struktur materialov*. Moskva-Izhevsk: Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika. 2001. 116 p. (in Russian).
4. **Vstovskij G.V.** *Elementy informacionnoj fiziki*. Moscow: MGIU. 2002, 260 p. (in Russian).
5. **Knut D. E.** *Iskusstvo programmirovaniya. Sortirovka i poisk*. Vol. 3. Moscow: Vil'yams. 2008, 800 p. (in Russian).
6. **Korolyov A.Yu., Korolyova A.A., Yakovlev A.D.** *Maskirovka vooruzheniya, tekhniki i ob"ektov*. SPb: Universitet ITMO. 2015, 155 p. (in Russian).
7. **Lan'e D.** *Na zare novoj ery. Avtobiografiya otca virtual'noj real'nosti*. Moscow: Eksmo. 2018, 481 p. (in Russian).
8. **Mandel'brot B.** *Fraktal'naya geometriya prirody*. Moscow: Institut komp'yuternyh issledovaniy. 2002, 656 p. (in Russian).
9. **Majkov K.A., Pyl'kin A.N., Kuz'menko S.N., Teplov A.A.** Modelirovanie i analiz zakonomernostej rosta fraktalov iz material'noj tochki. *Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2021, no. 75, pp. 99-112 pp. (in Russian).
10. **Majkov K.A., Pyl'kin A.N., Kuz'menko S.N., Teplov A.A.** Modelirovanie i analiz zakonomernostej rosta trekhmernyh regulyarnyh i stohasticheskikh fraktalov. *Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radio-tekhnicheskogo universiteta*. 2022, no. 80, pp. 134-150 pp (in Russian).

11. **Potapov A.A.** *Fraktaly v radiofizike i radiolokacii: Topologiya vyborki*. 2-e izd., pererab. i dop. Moscow: Universitetskaya kniga. 2005, 848 p. (in Russian).
12. **Terekhov S.V.** *Fraktaly i fizika podobiya*. Doneck: Cifrovaya tipografiya. 2011, 255 p. (in Russian).
13. **Uchajkin V.V., Gusarov G.G.** Analiz strukturnoj funkcii prostranstvennogo raspredeleniya galaktik v modeli sluchajnyh bluzhdanij. *Izv. vuzov. Fizika*. 1997, no. 8, pp. 3-7 pp. (in Russian).
14. **Feder E.** *Fraktaly: Per. s ang.* Moscow: Mir. 1991, 254 p. (in Russian).
15. **Sheluhin O.I.** *Mul'tifraktaly. Infokommunikacionnye prilozheniya*. Moscow: Goryachaya liniya – Telekom. 2011, 576 p. (in Russian).
16. **Carlier F, Brion E, Akulin V.** Fractal growth in the presence of a surface force field. *The European Physical Journal B*. 2012
17. *Matplotlib*. [Electronic resource] URL: <https://matplotlib.org/>
18. *Pygame*. [Electronic resource] URL: <https://www.pygame.org/>
19. Python. [Electronic resource] URL: <https://www.python.org/downloads/release/python-3126/>
20. *Scipy*. [Electronic resource] URL: <https://scipy.org/>
21. *Ursina*. [Electronic resource] URL: <https://www.ursinaengine.org/>
22. **Zhoi M., Zhang H., Wang Y., Bao X.** Morphological Control and Simulation of Fractal Growth // *Journal of Northwestern Polytechnical University*. 2019, 846-850 p.