

УДК 004.932: 519.64

ОПЫТ ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

А. И. Новиков, д.т.н., доцент, профессор кафедры ЭВМ РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0002-8166-8234, e-mail: novikovanatoly@yandex.ru

Рассматриваются применение математических методов при решении задач обработки цифровых изображений и отдельные вопросы обработки одномерных цифровых сигналов. В одной статье невозможно совершить обзор всего спектра математических методов, применяемых в цифровой обработке сигналов. Более того, автор считает уместным говорить только о тех методах, которые разрабатывались и применялись им и его учениками в работах, выполненных в основном в инициативном порядке. Поэтому рассматриваются лишь четыре группы методов. Цель работы – познакомить начинающих исследователей с теми возможностями, которые предоставляют математические методы при решении как прикладных задач, так и задач фундаментального уровня в цифровой обработке сигналов.

Ключевые слова: математические методы, линейные и нелинейные операторы, аффинные и проективные преобразования, интерпретация косвенных измерений, комплексный контурный анализ.

DOI: 10.21667/1995-4565-2025-91-168-182

Введение

Имеется большое число монографий, посвященных цифровой обработке сигналов [1-10]. В этом далеко неполном списке с различной степенью подробности излагаются математические методы решения задач в цифровой обработке сигналов. В монографиях Гонсалеса Р. и Вудса Р. [1, 2] затрагивается едва ли не весь спектр задач цифровой обработки изображений. При этом в [2] изложение алгоритмов цифровой обработки изображений дополняется программами их решения на MATLAB. В монографии [5], написанной авторским коллективом под руководством академика Сойфера В.А., подробно излагаются теоретические вопросы дискретного преобразования Фурье (ДПФ) и прикладные аспекты применения ДПФ при обработке изображений.

В работах [8-10], наоборот, рассматриваются вопросы относительно узкой направленности. В [8] – методы обработки изображений подстилающей поверхности в плоскости Земли по двум направлениям: предварительная обработка изображений, с одной стороны, и методы совмещения 2D и 3D изображений – с другой. В [9, 10] излагаются классические методы обнаружения и сопровождения объектов. При этом задачи совмещения изображений и задачи обнаружения и сопровождения объектов относятся к числу фундаментальных задач в цифровой обработке изображений.

Далее рассматриваются 4 блока математических методов с примерами решения соответствующих задач цифровой обработки сигналов, а именно:

1. Линейные и нелинейные операторы (фильтры):
 - фильтрация шума;
 - обнаружение импульсов и определение их параметров;
 - детектирование границ;
 - детектирование прямых на контурном изображении.
2. Аффинные и проективные преобразования плоскости.
3. Интерпретация косвенных измерений (восстановление размытых изображений).
4. Комплексный контурный анализ.

Линейные и нелинейные операторы (фильтры)

В системах технического зрения (СТЗ), работающих в режиме реального времени, важное место занимает блок предварительной обработки изображений. Одна из задач, решаемых в этом блоке, заключается в фильтрации шума. В первую очередь речь идет о фильтрации дискретного гауссова шума. Будем рассматривать аддитивную модель изображения I :

$$I_{ij} = U_{ij} + \xi_{ij}, \quad i = \overline{1, M}, j = \overline{1, N}. \quad (1)$$

Здесь: U_{ij} – плавная, низкочастотная составляющая изображения, ξ_{ij} – некоррелированный дискретный гауссов шум. Для подавления этого вида шума часто используется линейная фильтрация операторами $\mathbf{A}$:

$$\hat{I}_{ij} \equiv \mathbf{A}(I) = \sum_{s=-k}^k \sum_{t=-k}^k \alpha_{st} I_{i+s, j+t}. \quad (2)$$

Здесь $\hat{I}_{ij}$ – сглаженное значение яркости изображения в пикселе с координатами (i, j) , α_{st} – значения весовых коэффициентов ядра оператора $\mathbf{A}$ или иначе – элементы матричной маски $\mathbf{A} = (\alpha_{st})_{s,t=-k}^k$: k – параметр, определяющий размер $(2k+1) \times (2k+1)$ маски (матрицы $\mathbf{A}$):

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{-k,-k} & \dots & \alpha_{-k,0} & \dots & \alpha_{-k,k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{0,-k} & \dots & \alpha_{00} & \dots & \alpha_{0k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k,-k} & \dots & \alpha_{k0} & \dots & \alpha_{kk} \end{pmatrix}.$$

Элементы α_{st} матричной маски должны удовлетворять условию нормировки $\sum_{s=-k}^k \sum_{t=-k}^k \alpha_{st} = 1$. Из формулы (2) следует, что фильтрация шума (сглаживание изображения) представляет собой свертку $\mathbf{A} * I$ матричной маски $\mathbf{A}$ с фрагментом I изображения в окне размером $(2k+1) \times (2k+1)$. Сглаженные значения $\hat{I}_{ij}$ яркостей изображения вычисляются в скользящем режиме в результате последовательного сдвига матричной маски по строке изображения с последующим переходом на следующую строку.

Эффективность подавления шума линейными фильтрами определяется подбором коэффициентов α_{st} матричной маски $\mathbf{A}$ и может быть оценена в условиях некоррелированного гауссова шума коэффициентом остаточного уровня шума [11-13]:

$$\gamma(k) = \sqrt{\sum_{s=-k}^k \sum_{t=-k}^k (\alpha_{st})^2}. \quad (3)$$

Для оператора $\mathbf{A}_1$ с равномерной маской $\alpha_{st} = 1/(2k+1)^2$, $\forall s, t = \overline{-k, k}$, коэффициент $\gamma_1(k)$ равен $1/(2k+1)$. Для оператора $\mathbf{A}_2$ с маской $\mathbf{A}$ в виде степеней числа 2, а именно:

$$\alpha_{st} = \frac{2^{2k-|s|-|t|}}{(2^{2k+1} + 2^k - 2)^2}, \quad \forall s, t = \overline{-k, k}, \quad \text{значение этого коэффициента равно:}$$

$$\gamma_2(k) = \frac{5 \cdot 4^k - 2}{3(3 \cdot 2^k - 2)^2}.$$

Например, при $k = 2$: $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 4 & 2 \\ 4 & 8 & 16 & 8 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, а $\gamma_2(2) = \frac{5 \cdot 4^2 - 2}{3(3 \cdot 2^2 - 2)^2} = 0,26$. В то же время

$\gamma_1(2) = \frac{1}{5} = 0,2$. Это означает, что оператор A_1 с равномерной маской размером 5×5 подавляет 80 % шума, а оператор A_2 – 74 %.

В работе [12] доказывается, что фильтрация дискретного белого шума, обеспечиваемая оператором A_1 , является неулучшаемой в классе линейных операторов. Обратная сторона этого свойства оператора A_1 заключается в размытии границ перепада яркостей. И это размытие тем больше, чем больше размер маски. В этом смысле применение для фильтрации дискретного белого шума оператора A_2 с маской небольшого размера 3×3 или 5×5 предпочтительнее. Хотя размытие границ перепада яркостей является общим свойством всех линейных операторов, не исключая и оператор A_2 .

Альтернативный способ фильтрации дискретного белого шума, существенно снижающий размытие изображений, заключается в применении нелинейных операторов. Нелинейные операторы позволяют учитывать локальные особенности яркостей пикселей в пределах маски оператора. Наиболее известными и часто применяемыми на практике являются билатеральный фильтр и сигма-фильтр. В билатеральном фильтре [14]

$$A_6: \quad \hat{I}_{ij}^{\text{сгл}} = \frac{\sum_{s=-k}^k \sum_{t=-k}^k I_{i+s, j+t} \cdot w_{st}}{\sum_{s=-k}^k \sum_{t=-k}^k w_{st}}, \quad w_{st} = \exp\left(-\frac{s^2 + t^2}{2k^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{(I_{i+s, j+t} - I_{ij})^2}{2d^2}\right) \quad (4)$$

учет локальных особенностей яркостей пикселей осуществляется сразу с помощью двух коэффициентов. Первый – $\exp\left(-\frac{(s^2 + t^2)}{2k^2}\right)$ учитывает степень удаления пикселя в пределах маски от ее центра: чем дальше пиксель, тем меньший вклад его яркости в оценку $\hat{I}_{ij}^{\text{сгл}}$ в (4). Второй – $\exp\left(-\frac{(I_{i+s, j+t} - I_{ij})^2}{2d^2}\right)$ учитывает разность яркостей текущего $I_{i+s, j+t}$ и центрального I_{ij} пикселей: чем больше модуль этой разности, тем меньше вклад текущего пикселя в итоговую оценку (4). Для корректной работы билатерального фильтра необходимо удачно подобрать коэффициент d в составе второго множителя весовой функции w_{st} . Существенным недостатком билатерального фильтра являются высокие вычислительные затраты на его реализацию, исключающие возможность его применения в СТЗ реального времени.

Сигма-фильтр отличается простотой алгоритма и соответственно низкой вычислительной сложностью [15]:

$$\hat{I}_i^{\text{сгл}} = \frac{1}{K} \sum_{s=-k}^k \sum_{t=-k}^k \delta_{st} I_{i+s, j+t}, \quad (5)$$

где

$$K = \sum_{s=-k}^k \sum_{t=-k}^k \delta_{st}, \quad \text{а} \quad \delta_{st} = \begin{cases} 1, & \text{если } |I_{i+s, j+t} - I_{ij}| \leq m\sigma, \\ 0, & \text{если } |I_{i+s, j+t} - I_{ij}| > m\sigma. \end{cases} \quad (6)$$

В отличие от билатерального фильтра в сигма-фильтре учет локальных особенностей изображений в окрестности центрального пикселя осуществляется только по перепадам яр-

кости. Модуль разности яркостей текущего $I_{i+s,j+t}$ и центрального I_{ij} пикселей сравнивается с пороговым значением $\Delta = m\sigma$. Если модуль разности яркостей $|I_{i+s,j+t} - I_{ij}|$ меньше порогового значения Δ , то яркость $I_{i+s,j+t}$ текущего пикселя учитывается при получении сглаженной оценки (5), в противном случае индикатор δ_{st} принимает значение ноль и яркость пикселя не учитывается в (5).

Для корректной работы сигма-фильтра необходимо «угадать» истинное значение среднеквадратического отклонения σ дискретного белого шума в составе обрабатываемого изображения. Это необходимо для задания порогового значения Δ . Произвольное задание этого значения приводит либо к чрезмерному размытию изображения, либо, наоборот, к слабому подавлению шума. В работе [16] предложен метод оценивания дисперсии шума и модификации на этой основе сигма-фильтра. Подробный экспериментальный анализ как сглаживающих, так и размывающих свойств линейных и нелинейных операторов выполнен в работе [17]. Теоретические свойства линейных операторов, как уже отмечалось выше, исследованы в [12].

Линейные операторы с векторными масками могут успешно применяться для решения широкого круга прикладных задач. В работе [13] рассмотрены три группы задач, в которых эффективным оказалось применение векторных масок, получаемых методом наименьших квадратов. Каждая из трех масок длиной $(2k+1)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_0 : q(j) &= \frac{3}{(4k^2 - 1)(2k + 3)} (3k^2 + 3k - 1 - 5j^2), \quad j = \overline{-k, k}, \\ \mathbf{q}_1 : q(j) &= \frac{3}{k(k+1)(2k+1)} (-k, -k+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, k-1, k), \\ \mathbf{q}_2 : q(j) &= \frac{3}{k(k+1)(4k^2 - 1)(2k + 3)} (3j^2 - k(k+1)), \quad j = \overline{-k, k} \end{aligned}$$

обеспечивает получение в скользящем режиме в каждой точке одномерного сигнала $y(t)$, $t = \overline{1, N}$ [или строки (столбца) изображения] МНК-оценки соответственно значения сигнала $\hat{y}(t)$, производной первого $\hat{y}'(t)$ и второго $\hat{y}''(t)$ порядков в виде сверток: $\mathbf{y} * \mathbf{q}_0$, $\mathbf{y} * \mathbf{q}_1$, $\mathbf{y} * \mathbf{q}_2$. Здесь $\mathbf{y} = (y(t-k), y(t-k+1), \dots, y(t), \dots, y(t+k-1), y(t+k))$ – вектор, компонентами которого являются $2k+1$ значений обрабатываемого сигнала $y(t)$, $t = \overline{1, N}$. При этом маска $\mathbf{q}_0$ обеспечивает несмещенное оценивание многочленов до 3-й степени включительно, а маски $\mathbf{q}_1$ и $\mathbf{q}_2$ – получение сглаженных оценок производных соответственно первого и второго порядков.

В [13, 16] показано, как эффективно может быть применена маска $\mathbf{q}_0$ для оценивания дисперсии шума в составе изображения, а маска $\mathbf{q}_1$ – для получения сглаженных оценок частных производных в составе вектора градиента в задаче детектирования границ перепада яркостей [18]. Отдельного внимания заслуживает маска $\mathbf{q}_2$. С ее помощью можно детектировать прямые линии на контурном изображении при решении задач высокого уровня. Он основан на том, что вторая производная линейной функции равна нулю. Значит, свертка $\mathbf{y} * \mathbf{q}_2$ на группе пикселей, принадлежащих некоторой прямой, должна также быть равной нулю. Однако в пиксельном пространстве расположение пикселей, принадлежащих прямой, зависит от угла наклона последней к горизонтальной оси изображения. Поэтому результат свертки может быть и отличным от нуля. Требуется установление определенного порогового значения. Данный подход оказался существенно быстрее в вычислительном отношении по сравнению с широко известным методом Хафа. Он был применен в задаче поиска объектов с

прямолинейными границами на контурном изображении [19] и в задаче распознавания статических жестов ладони с применением комплексного контурного анализа [4, 20].

Широкое применение при решении различных прикладных задач могут найти и находят симметричные линейные фильтры с маской следующего вида:

$$\bar{q} = \left(-\frac{1}{2r}, \dots, -\frac{1}{2r}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2k+1}, \frac{1}{2k+1}, \dots, \frac{1}{2k+1}, 0, \dots, 0, -\frac{1}{2r}, \dots, -\frac{1}{2r} \right), \quad (7)$$

где $r = 2k + 1$. В составе этой маски $2k + 1$ коэффициент в центре маски и по $2k + 1$ коэффициентов по ее краям отличны от нуля. Остальные коэффициенты равны нулю. Общая длина маски $2m + 1$ определяется условиями решаемой задачи. Такую маску удобно применять при решении задачи обнаружения изменений в динамике одномерного сигнала, а также при обнаружении на фоне плавно изменяющейся кривой импульсов различной формы. В основе такого подхода лежит следующая теорема [18].

Теорема. Если $\mathbf{A}$ произвольный симметричный оператор, весовые коэффициенты которого удовлетворяют условиям:

$$\text{а) } \sum_{j=-m}^m \alpha_j = 1 \text{ (условие нормировки);}$$

$$\text{б) } \alpha_{-j} = \alpha_j \quad j \in \{1, 2, \dots, m\} \text{ (условие симметрии),}$$

то оператор $\mathbf{B} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$, где $\mathbf{I}$ – тождественный оператор, будет обеспечивать аннулирование многочленов первой степени, а на многочленах второй степени будет давать константное смещение Δ , $\mathbf{B}\{P_2(j)\}_{j=j_0-m}^{j_0+m} = \Delta \quad \forall j_0 = m+1, m+2, \dots$, где $\Delta = -b_2 \sum_{j=-m}^m \beta_j \cdot j^2$.

Здесь $P_2(j) = b_0 + b_1 j + b_2 \cdot j^2$ – многочлен второй степени с действительными коэффициентами b_0, b_1, b_2 .

Заметим, что значение смещения Δ на реальных сигналах будет близко к нулю за счет малости коэффициента b_2 (медленно изменяющаяся фоновая составляющая).

На рисунке 1 приведен модельный пример работы оператора $\mathbf{B}$ с маской (8) на последовательности измерений некоторого гипотетического сигнала с медленно изменяющейся фоновой составляющей и наложенными на нее гауссоподобными и параболическим импульсами. Амплитуды импульсов относительно фоновой составляющей равны соответственно 2, 3 и 4. На сигнал наложен аддитивный дискретный гауссов шум с $\sigma = 0,4$.

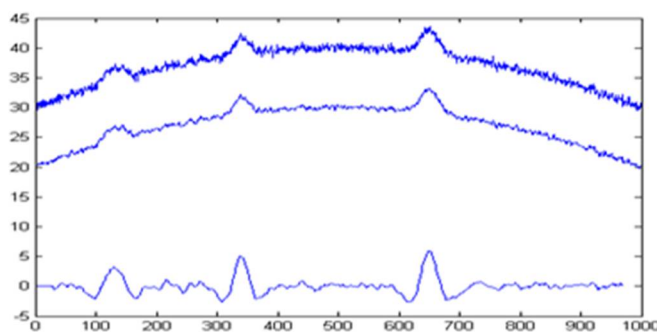


Рисунок 1 – Исходный сигнал (верхняя кривая), сглаженный сигнал (средняя кривая), результат детектирования (нижняя кривая)

Figure 1 – Initial signal (upper curve), smoothed signal (middle curve), detection result (lower curve)

К исходному сигналу применено сначала сглаживание с равномерной маской длиной 3 (с коэффициентами 1/3). Сглаженный сигнал смещен по ординате на -10 вдоль вертикальной оси для того, чтобы его можно было изобразить на одном рисунке с другими сигналами. Затем он был преобразован в выходной сигнал с применением линейного фильтра с маской (7)

при $k = 4$. Длина окна скольжения (длина маски) равна 53. Результирующий сигнал близок к нулю на участках, содержащих только фоновую составляющую, и имеет однотипную структуру в области импульсов.

Каждому импульсу отвечают три локальных экстремума: локальные минимумы расположены в точках начала $t_i^{(H)}$ и соответственно окончания $t_i^{(K)}$ ненулевой части каждого импульса, а локальный максимум отвечает точке $t_i^{(max)}$ локального максимума импульса. Зная координаты $t_i^{(H)}$, $t_i^{(K)}$ начала и окончания i -го импульса, можно выполнить выделение импульсов из состава комбинированного сигнала. Для этого по участкам фоновой составляющей некоторой фиксированной длиной до и после импульса строится многочлен второй степени, коэффициенты которого находятся методом наименьших квадратов. После вычитания из исходного сигнала расчетных значений фоновой составляющей получаем оценку импульса. Такой подход был применен автором при создании математического обеспечения для автоматизированной установки по анализу оже-спектров (для выделения оже-линий) [21] и при решении ряда других задач автоматизации технологических процессов.

Аффинные и проективные преобразования плоскости

В бортовых СТЗ летательных аппаратов (ЛА) одной из важнейших является задача совмещения изображений. При этом могут решаться два типа задач: задача совмещения (комплексирования) разноспектральных изображений (например, телевизионного и тепловизионного) и задача совмещения разнородных изображений. Под разнородными изображениями понимаются реальное изображение (РИ), например телевизионное, с одной стороны, и виртуальное изображение (ВИ), синтезированное по цифровой карте местности, которая хранится в бортовом вычислителе, с другой. ВИ синтезируется в виде контурного изображения. Поэтому для совмещения РИ и ВИ необходимо реальное изображение преобразовать к контурному виду. Совмещение разноспектральных изображений выполняется для получения улучшенного изображения, на котором более контрастно выделены некоторые объекты сцены. Совмещение разнородных изображений на борту ЛА имеет своей целью решение обратной навигационной задачи с целью уточнения показаний датчиков навигационных параметров [8, 22-25]. При совмещении изображений, как правило, используются проективные преобразования плоскости. Это объясняется тем, что они учитывают проективные искажения, которые могут возникать при съемках. Однако и аффинные преобразования могут достаточно успешно применяться для решения задачи совмещения.

В работах [22-25] изложен алгоритм преобразования одного контурного изображения к плоскости другого с помощью аффинных преобразований, реализованных в комплексной плоскости. Впервые этот алгоритм был предложен в работе [22] в применении к одиночным замкнутым контурам на РИ и ВИ, являющимся границами некоторого объекта на подстилающей поверхности Земли. Затем он был развит для применения к группам одноименных объектов, выделенных на РИ и ВИ [23-25]. В кратком изложении алгоритм выглядит следующим образом. Каждой точке $M_k(x_k, y_k)$ на РИ ставится в соответствие комплексное число $z_k = x_k + iy_k$, а соответствующей ей точке $M'_k(x'_k, y'_k)$ на ВИ – комплексное число $z'_k = x'_k + iy'_k$. Преобразование точек одного изображения к плоскости другого производится по формуле:

$$\hat{z}_k = z_{np} \cdot z'_k. \quad (8)$$

В этой формуле z'_k – точка на ВИ, $z_{np} = x_{np} + iy_{np}$ – комплексное число, обеспечивающее преобразование точек ВИ к плоскости РИ. Для нахождения комплексного числа z_{np} необходимо найти на соответствующих контурах на РИ и ВИ по паре ключевых точек. Пусть

$M_r(x_r, y_r)$ и $M_s(x_s, y_s)$ – искомые ключевые точки. Тогда комплексное число $z_{np} = x_{np} + iy_{np}$ можно найти по формуле: $z_{np} = \frac{z_r}{z_s} = \frac{z_r \cdot \bar{z}_s}{z_s \cdot \bar{z}_s}$. Здесь $z_r = x_r + iy_r$, $z_s = x_s + iy_s$ – координаты некоторой фиксированной точки на РИ, записанные в виде комплексного числа, z_s – координаты соответствующей точки на ВИ. Преобразование (8) в комплексной плоскости эквивалентно выполнению двух аффинных преобразований в пространстве R^2 : повороту вектора на некоторый угол и сжатию (растяжению) **вектора**. Сдвиг вдоль вектора в этом случае реализуется с помощью самостоятельной процедуры.

Аффинные преобразования плоскости не учитывают проективные искажения изображений, которые могут возникать в процессе съемок с борта ЛА и которые могут приводить к нарушениям параллельности прямых. Как известно, аффинные преобразования переводят прямые в отвечающие им прямые. Параллельность прямых сохраняется при аффинном преобразовании. Для учета искажений, нарушающих параллельность прямых, что присуще съемкам под определенным ракурсом, целесообразно применять проективные преобразования точек одного изображения к плоскости другого. В частности, такие преобразования возникают при съемках подстилающей поверхности в плоскости Земли с борта воздушного судна. Класс проективных преобразований евклидовой плоскости, отвечающих задаче совмещения ВИ и РИ, задается парой дробно-линейных функций

$$\begin{cases} x = \frac{h_{11}x' + h_{12}y' + h_{13}}{h_{31}x' + h_{32}y' + 1} \\ y = \frac{h_{21}x' + h_{22}y' + h_{23}}{h_{31}x' + h_{32}y' + 1} \end{cases} \quad (9)$$

Здесь (x, y) – координаты точки на реальном изображении, а (x', y') – координаты отвечающей ей точки на виртуальном изображении. Для каждой пары ключевых точек $X_i = (x_i, y_i)^T$ и $X'_i = (x'_i, y'_i)^T$, $i = \overline{1, k}$ из (9) в результате умножения обеих частей этих уравнений на выражение в знаменателе, т.е. на $h_{31}x'_i + h_{32}y'_i + 1$, получаем пару уравнений

$$\begin{cases} x_i x'_i h_{31} + x_i y'_i h_{32} + x_i = x'_i h_{11} + y'_i h_{12} + h_{13}, \\ y_i x'_i h_{31} + y_i y'_i h_{32} + y_i = x'_i h_{21} + y'_i h_{22} + h_{23}. \end{cases} \quad (10)$$

В матричной форме эта система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) будет иметь следующий вид:

$$\begin{pmatrix} x'_i & y'_i & 1 & 0 & 0 & 0 & -x_i x'_i & -x_i y'_i \\ 0 & 0 & 0 & x'_i & y'_i & 1 & -y_i x'_i & -y_i y'_i \end{pmatrix} \cdot G_H = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Здесь $G_H = (h_{11} \ h_{12} \ h_{13} \ h_{21} \ h_{22} \ h_{23} \ h_{31} \ h_{32})^T$ – вектор неизвестных коэффициентов проективного преобразования (9). Таких коэффициентов 8, а каждая пара ключевых точек дает два уравнения. Значит, для нахождения оценки $\hat{G}_H$ восьмимерного вектора G_H необходимо не менее 4-х пар ключевых точек. Значит, в системе уравнений (11) должно быть не менее 8 строк, порожденных соответствующими парами ключевых точек [23].

В реальных задачах число пар ключевых точек исчисляется десятками и даже сотнями. При этом некоторые пары могут содержать ложное соответствие. Выбор из множества $\{M_i, M'_i\}_{i=1}^n$ корректных пар точек является самостоятельной задачей, от успеха решения которой зависит адекватность построенного проективного преобразования. Известны два подхода к решению данной задачи. В первом случае перед составлением СЛАУ вида (11) выполняется поиск на множестве $\{M_i, M'_i\}_{i=1}^n$ четырех пар ключевых точек, которые должны

обеспечить получение корректных оценок $\hat{G}_H$ вектора неизвестных параметров. Для этого используются программные модули, реализующие алгоритм RANSAC поиска искоемых 4-х пар ключевых точек [26].

Второй подход к построению корректного проективного преобразования заключается в вычислении оптимальной в среднем квадратичном оценки G_H при использовании всего набора ключевых точек, с учетом условия:

$$F(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{h_{11}x'_i + h_{12}y'_i + h_{13}}{h_{31}x'_i + h_{32}y'_i + 1} \right)^2 + \left(y_i - \frac{h_{21}x'_i + h_{22}y'_i + h_{23}}{h_{31}x'_i + h_{32}y'_i + 1} \right)^2 \rightarrow \min_{h_j}. \quad (12)$$

Эта задача эквивалентна поиску псевдорешения СЛАУ, получаемой из критерия

$$\|\mathbf{A}\mathbf{G}_H - \mathbf{B}\|_{G_H}^2 \rightarrow \min. \quad (13)$$

Здесь $\mathbf{A}$ – основная матрица СЛАУ вида (11), но с $2n$ строками такой же структуры, что и основная матрица в (11). Применение метода наименьших квадратов к (13) приводит к нормальной СЛАУ:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{G}_H = \mathbf{A}^T \mathbf{B}. \quad (14)$$

Если основная матрица $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ системы уравнений (14) является матрицей полного ранга ($\text{rg}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = 8$), то решать эту систему целесообразно любым методом, предназначенным для решения систем с симметричной и положительно-определенной основной матрицей. В противном случае СЛАУ (14) можно решить методом SVD [27, 28], применив разложение матрицы $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ в произведение $\mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$ левой сингулярной матрицы $\mathbf{U}$, диагональной матрицы $\mathbf{S} = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k, 0, 0, \dots, 0)$ с сингулярными числами σ_i и правой сингулярной матрицы $\mathbf{V}$, т.е. $\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$. Решение СЛАУ (14) в этом случае с учетом ортогональности матриц $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ будет иметь следующий вид: $\mathbf{G}_H = \mathbf{V}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{U}(\mathbf{A}^T \mathbf{B})$.

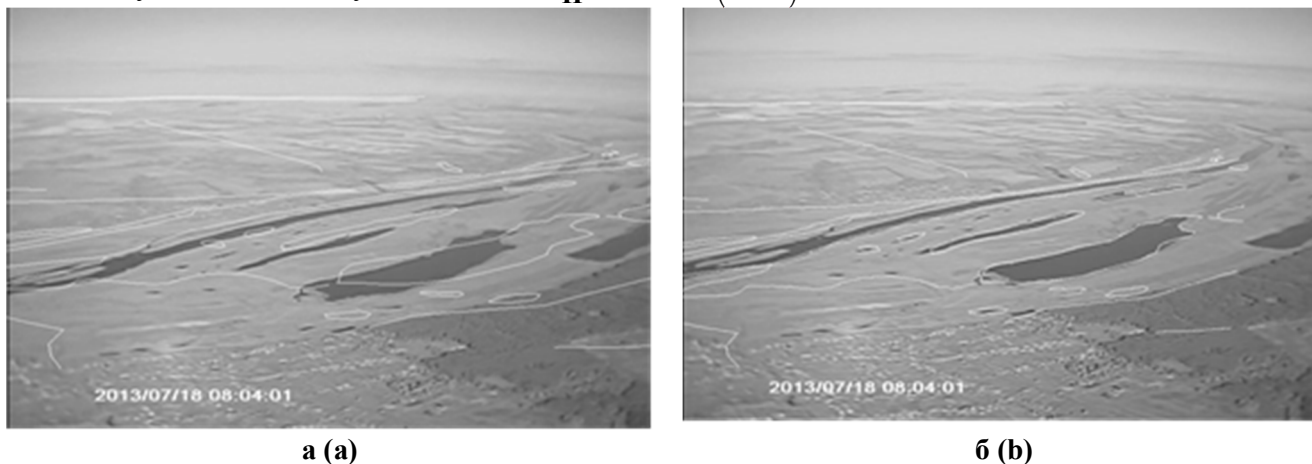


Рисунок 2 – а – реальное изображение и наложенное на него виртуальное изображение в виде контуров; б – результат совмещения РИ и ВИ

Figure 2 – а – a real image and a virtual image superimposed on it in the form of contours; б – the result of combining RI and VI

На рисунке 2 приведена иллюстрация совмещения РИ в градациях серого и отвечающего ему ВИ (контуры выделены белым цветом) с помощью построенного проективного преобразования. Изображение на рисунке 2, а с простым наложением контуров ВИ на РИ подтверждает существенное несовпадение границ водных объектов и кромки леса на РИ с отвечающими им контурами на ВИ. Построенное по описанному выше алгоритму проективное преобразование позволило достаточно точно совместить контуры объектов.

Интерпретация косвенных измерений (восстановление размытых изображений)

Во многих областях науки и техники возникает задача оценивания некоторой величины, которая недоступна непосредственному измерению. Вместе с тем известны результаты косвенных измерений, которые, в свою очередь, получены в виде некоторого интегрального преобразования искомой величины с неточно известным ядром (аппаратной функцией). Так, для исследования поверхностей элементов в микроэлектронике с неразрушающими методами контроля широко используется послойный спектральный анализ поверхностей с помощью оже- или масс-спектрометров [21]. Регистрация спектров при послойном анализе с помощью оже-спектрометра осуществляется в некотором заданном диапазоне $[E_1, E_2]$ энергий. Избирательность регистрирующего прибора не является идеальной, и потому он фиксирует не только электроны с данной энергией (ионы с данными массовыми числами), но и электроны с соседними энергиями. Этот процесс описывается интегральным уравнением (ИУ) Фредгольма первого рода, которое для оже-спектроскопии будет выглядеть следующим образом:

$$\int_{E_1}^{E_2} K(E, U) \cdot N(U) dU = \tilde{N}(E), \quad E_1 \leq E, U \leq E_2. \quad (15)$$

В этом уравнении E_1, E_2 – начальная и конечная энергии электронов в эксперименте; $N(U)$ – истинное количество вторичных электронов, выбитых на энергии E ; $\tilde{N}(E)$ – число электронов на энергии E , зафиксированных регистрирующим устройством; $K(E, U)$ – аппаратная функция прибора – ядро интегрального уравнения. Решение ИУ (15) заключается в получении оптимальной оценки функции $N(U)$. Фотоаппарат со смещенным фокусом формирует так называемое *размытое изображение*. Процесс размытия также описывается уравнением Фредгольма первого рода, но уже двумерным:

$$\int_c^d \int_a^b K(x, y, t, s) \cdot F(t, s) dt ds = \tilde{F}(x, y), x, y \in [a, b] \times [c, d]. \quad (16)$$

Здесь $F(t, s)$ – истинная яркость пикселя (t, s) ; $\tilde{F}(x, y)$ – яркость пикселя (x, y) на полученном (наблюдаемом) размытом изображении; $K(x, y, t, s)$ – аппаратная функция фотоаппарата – ядро интегрального уравнения (16).

Список прикладных обратных задач не исчерпывается приведенным перечнем. В томографии, радиофизике, радиотехнике процесс обработки результатов измерений связан с решением обратных задач [29–31]. Особенностью задач (15) и (16) является то, что они в общем случае относятся к классу некорректных задач. Некорректность проявляется в плохой устойчивости получаемого решения. Малые изменения правой части ИУ (15) и (16) могут приводить к сколь угодно большим изменениям решения. Для решения некорректных обратных задач в середине 20-го века академиком Тихоновым А.Н. и его учениками [32] были разработаны методы, позволяющие находить решения таких задач. Несмотря на глубокую теоретическую проработку методов решения некорректных задач, остаются вопросы практического применения этих методов в условиях неточно заданных ядра и правой части интегральных уравнений. Пусть

$$\int_a^b K(x, s) \cdot y(s) ds = f(x), a \leq s \leq b, c \leq x \leq d \quad (17)$$

– ИУ Фредгольма 1-го рода. В реальных задачах правая часть уравнения – функция $f(x)$, а часто и ядро уравнения $K(x, s)$ известны приближенно. Вместо $f(x)$ – ее приближение, функция $f_\delta(x)$: $\|f_\delta(x) - f(x)\| \leq \delta$, а вместо ядра $K(x, s)$ – приближенная функция $K_h(x, s)$ такая, что $\|K_h(x, s) - K(x, s)\| \leq h$. При этом погрешности измерений δ, h считаются известными (в

реальных задачах и это предположение часто не выполняется). Поэтому прямое применение обратного оператора для нахождения решения задачи невозможно. общепринятый подход к поиску квазиоптимального решения заключается в замене исходной некорректной задачи задачей условной минимизации [32]:

$$\begin{cases} J(y, f_\delta, \alpha) = \|Ky - f_\delta\|^2 + \alpha\Omega(y) \rightarrow \min_y \\ \|Ky^{(\alpha_{opt})} - f_\delta\| = \delta \end{cases},$$

где K – интегральный оператор, α – параметр регуляризации, а $\Omega[y] = \|y\|_{L_2[a,b]}^2 = \int_a^b (y(s))^2 ds$ – стабилизирующий функционал. В [32] доказывается, что квазиоптимальное решение $y(\alpha_{opt})$ является решением интегро-дифференциального уравнения Эйлера, которому на дискретной сетке отвечает СЛАУ вида

$$(K^T K + \alpha E)y = K^T F. \quad (18)$$

Здесь матрица K – ядро ИУ со значениями на дискретной сетке, E – единичная матрица. Если ядро разностное, то каждая строка матрицы K получается в результате циклического сдвига порождающего вектора $(r_k, r_{k-1}, \dots, r_1, r_0, r_1, \dots, r_{k-1}, r_k)$. В этом случае основная матрица $(K^T K + \alpha E)$ СЛАУ (18) будет теплицевой и ее решение целесообразно выполнять с помощью экономного алгоритма, предназначенного для решения таких систем [33-35].

На рисунке 3 приведен пример восстановления размытого изображения (перепечатано из [35]).

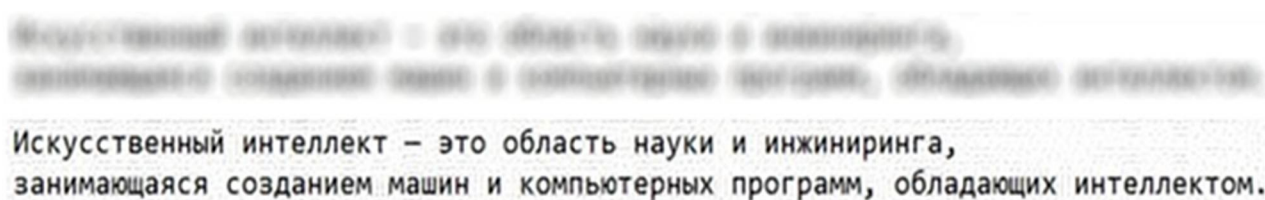


Рисунок 3 – Размытое и восстановленное изображения текста с ядром размером 21x21

Figure 3 – Blurred and restored text images with a core size of 21x21

Одно из потенциальных применений эффектов размытия изображений с использованием ядер специального вида может быть направлено для маскирования информации при передаче по открытым каналам связи. На принимающей стороне должна работать система автоматического восстановления маскированного сообщения. Такой способ маскирования передаваемой информации рассматривается в работе [34].

При восстановлении размытых (дефокусированных, косвенных) измерений регуляризационными методами используется априорная, а если есть возможность, то и апостериорная информация о точности δ задания правой части интегрального уравнения ($\|f_\delta - f\| = \delta$) и параметра регуляризации α . Процедуру получения квазиоптимального решения $y = y(f_\delta, \delta, \alpha)$ можно рассматривать в широком смысле как процедуру фильтрации. Связь методов регуляризации с оптимальной фильтрацией по Винеру отмечается в монографии [32], одним из авторов которой является основатель теории решения некорректных задач академик А.Н. Тихонов. Примеры применения фильтра Винера для восстановления размытых изображений и даже программные реализации можно найти в интернете по соответствующему запросу.

Комплексный контурный анализ

Комплексный контурный анализ (ККА) разработан, во-первых, для поиска на множестве контуров однотипного или наиболее близкого к данному контуру и, во-вторых, – для совмещения контуров [4, 36]. Для сравнения контуров объектов вычисляются значения автокорреляционных функций контуров. Пусть $\Gamma_{sj} = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)\}$ – координатное описание s -го контура на i -м кадре. Вводится векторное описание контура $\Gamma_{sj}^{(0)} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$, где $\mathbf{a}_k = (x_{k+1} - x_k; y_{k+1} - y_k)$, $k = \overline{1, n-1}$, $\mathbf{a}_n = (x_1 - x_n; y_1 - y_n)$. Из этого контура в результате циклического сдвига формируется совокупность n контуров:

$$\Gamma_{sj}^{(0)} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}, \Gamma_{sj}^{(1)} = \{\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_1\}, \dots, \Gamma_{sj}^{(n-1)} = \{\mathbf{a}_n, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_{n-1}\}.$$

Автокорреляционные функции контуров вычисляются по формуле [36]:

$$\tau_{sj}(k) = \frac{\left| \left(\Gamma_{sj}^{(0)}, \Gamma_{sj}^{(k)} \right) \right|}{\left(\Gamma_{sj}^{(0)}, \Gamma_{sj}^{(0)} \right)}, s \in \{1, 2, \dots, S\}, j \in \{1, 2, \dots, J\}, k = \overline{1, n}. \quad (19)$$

В формуле (19) S – число кадров, J – число анализируемых контуров. Скалярное произведение контуров $\left(\Gamma_{sj}^{(0)}, \Gamma_{sj}^{(k)} \right)$ в составе (19) находится по формуле

$$\left(\Gamma_{sj}^{(0)}, \Gamma_{sj}^{(k)} \right) = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_{k+1}) + (\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_{k+2}) + \dots + (\mathbf{a}_{n-k}, \mathbf{a}_n). \quad (20)$$

Отметим, что вычисления по формулам (19), (20) целесообразно выполнять с помощью алгоритмов, использующих быстрое преобразование (БПФ).

Скалярные произведения $(\mathbf{a}_m, \mathbf{a}_{k+m})$ в составе формулы (20) являются эрмитовыми произведениями. Значит, произведения контуров $\left(\Gamma_{sj}^{(0)}, \Gamma_{sj}^{(k)} \right)$ являются комплексными числами для всех $k \neq 0$, а $\left(\Gamma_{sj}^{(0)}, \Gamma_{sj}^{(0)} \right) = \left\| \Gamma_{sj}^{(0)} \right\|^2 = \sum_{m=1}^n (u_m^2 + v_m^2)$ – действительное число.

Автокорреляционные функции $\tau_{sj}(k)$, $k = \overline{1, n}$ вычисляются для каждого j -го контура на каждом s -м кадре. Полученные автокорреляционные функции $\tau_{sj}(k)$ подвергаются процедуре передискретизации с помощью стандартной функции *resample* языка MATLAB для выравнивания числа точек в каждом контуре.

На рисунке 4 приведены графики автокорреляционных функций для двух водных объектов с различной геометрией береговых линий, полученные в результате обработки последовательности из 13 видеок кадров.

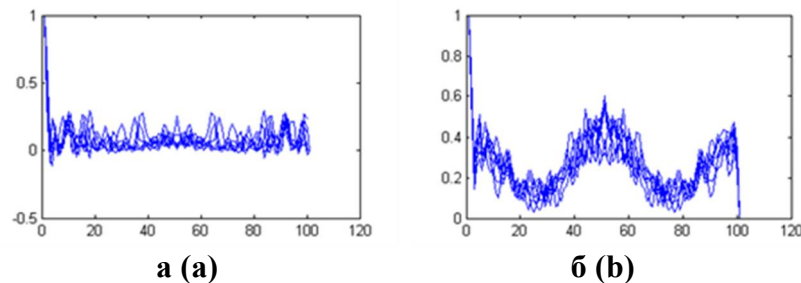


Рисунок 4 – Автокорреляционные функции двух замкнутых контуров водных объектов
Figure 4 – Autocorrelation functions of two closed contours of water bodies

Автокорреляционная функция является своеобразным портретом контура, что подтверждается рисунком 4. На множестве из 13 последовательных кадров АКФ одного и того же объекта ведут себя одинаково. Это позволяет получать достоверные данные о соответствующих точках на изображениях по этим объектам. Аппарат ККА был успешно применен в работах [19, 20] при решении задач сопоставления контуров объектов с контурами эталонов.

Заключение

В статье приведено изложение четырех групп математических методов с кратким анализом их теоретических свойств и областей возможного применения в цифровой обработке как одномерных сигналов, так и изображений. Подчеркнута целесообразность применения в алгоритмах предварительной обработки изображений, в задачах исследования динамики одномерных сигналов линейных операторов с векторными масками для сокращения вычислительных затрат. Описаны эффективные способы реализации аффинных и проективных преобразований в задаче совмещения разноспектральных и разнородных изображений. Приведены краткие описания методов реконструкции размытых изображений и комплексного контурного анализа с указанием возможных областей их применения.

Библиографический список

1. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера. 2005. 1072 с.
2. Гонсалес Р., Вудс Р., Эддинс С. Цифровая обработка изображений в среде MATLAB. М.: Техносфера. 2006. 616 с.
3. Прэтт У. Цифровая обработка изображений. Пер. с англ. М.: Мир, 1982. Кн.2. 480 с.
4. Фурман Я.Я., Кревецкий А.В., Передреев А.К., Роженцов А.А., Хафазов Р.Г., Егошина И.Л., Леухин А. Н. Введение в контурный анализ; приложения к обработке изображений и сигналов. М.: Физматлит, 2003. 592 с.
5. Форсайт Д.А., Понс Ж. Компьютерное зрение. Современный подход. М.: Вильямс, 2004. 928 с.
6. Сойфер В.А., Сергеев В.В., Попов С.Б., Мясников В.В. Теоретические основы цифровой обработки изображений. Издательство: Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева. 2000. 258 с.
7. Визильтер Ю.В., Желтов С.Ю., Бондаренко А.В., Ососков М.В., Моржин А.В. Обработка и анализ изображений в задачах машинного зрения. М.: Физматкнига, 2010. 672 с.
8. Новиков А.И., Пронькин А.В. Методы цифровой обработки изображений подстилающей поверхности. М.: Горячая линия- Телеком, 2023. 224 с.
9. Алпатов Б.А., Бабаян П.В., Балашов О.Е., Степашкин А.И. Методы автоматического обнаружения и сопровождения объектов. М.: Радиотехника. 2008. 176 с.
10. Бабаян П.В., Муравьев В.С., Смирнов С.А., Стротов В.В. Обработка изображений в системах обнаружения и сопровождения объектов. Классические методы. М.: Горячая линия- Телеком, 2023. 168 с.
11. Новиков А.И., Пронькин А.В., Устюков Д.И. Быстрые алгоритмы первичной обработки изображений в бортовых системах технического зрения // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2020. т. 16, № 3. С. 673-685.
12. Novikov A.I. Formation of Operators with Given Properties to solve Original Image Processing Tasks, The 11th International Conference «Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies» (PRIA-11-2013), Samara, Russian Federation, 2013, vol. II, pp. 445-448.
13. Новиков А.И., Пронькин А.В. Линейные операторы с векторными масками в задачах цифровой обработки изображений // Компьютерная оптика, 2023, т. 47, № 4. С. 596-604.
14. Tomasi C., Manduchi R. Bilateral filtering for gray and color images // Proc. IEEE 6th Int. Conf. on Computer Vision. Bombay, India, 1998, pp. 839-846.
15. Lee J.-S. Digital Image Smoothing and the Sigma Filter // Computer Vision, Graphics, Image Processing, 1983, vol. 24, no. 2, pp. 255-269.
16. Новиков А.И., Пронькин А.В. Метод оценки уровня шума цифрового изображения // Компьютерная оптика. 2021. Т. 45, № 5. С. 713-720.
17. Новиков А.И., Пронькин А.В. Сравнительный анализ методов фильтрации дискретного гауссовского шума при обработке изображений // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2018. № 66. С. 70-77.
18. Новиков А.И., Пронькин А.В. Детектор границ градиентного типа для изображений подстилающей поверхности // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2019. № 68. С. 68-76. DOI: 10.21667/1995-4565-2019-68-2-68-76.
19. Новиков А.И., Устюков Д.И. Метод обнаружения объектов с дополнительным семантическим признаком // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2022. № 79. С.89-100.

20. **Новиков А.И., Холопов Е.Ю.** Распознавание статических жестов ладони с применением комплексного контурного анализа // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2021. № 78. С. 142-152.
21. **Ильин М.Е., Новиков А.И., Фатьянов С.О., Чураков Е.П.** Математическое обеспечение задач интерпретации результатов косвенных измерений // Электронное моделирование. 1991, т. 13, № 2. С. 25-27.
22. **Новиков А.И., Саблина В.А., Горячев Е.О.** Применение контурного анализа для совмещения изображений // Известия ТулГУ. Технические науки. Вып. 9, ч. 1, 2013. С. 260-270.
23. **Novikov A.I., Sablina V.A., Efimov A.I.** Image Superimposition and the Problem of Selecting the Set of Corresponding Point Pairs // 4th Conference on Embedded Computing, MECO 2015. Budva, Montenegro. 2015. Pp. 139-142. DOI: 10.1109/MECO.2015.7181886
24. **Sablina V.A., Novikov A.I., Nikiforov M.B., Loginov A.A.** Contour Analysis Application for Object Detection in Aerial Image // Proceedings – 2014 3rd Mediterranean Conference on Embedded Computing, MECO 2014 – Including ECyPS 2014. 3. 2014. Pp. 102-107.
25. **Ефимов А.И., Новиков А.И.** Программно-алгоритмический комплекс совмещения изображений в авиационных системах технического зрения // В сборнике: Информационные технологии и нанотехнологии (ИТНТ-2017). Сборник трудов III международной конференции и молодежной школы. Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева. 2017. С. 400-409.
26. **Martin A. Fischler and Robert C. Bolles.** Random Sample Consensus: A Paradigm for Model Fitting with Applications to Image Analysis and Automated Cartography // Comm. of the ACM: journal. Vol. 24. Pp. 381-395. DOI: 10.1145/358669.358692.
27. **Андрюшевский Н.М.** Анализ устойчивости решений систем линейных алгебраических уравнений. М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2008. 71 с.
28. **Новиков А.И.** Решение переопределенных систем линейных алгебраических уравнений в задачах обработки изображений // Цифровая обработка сигналов, № 3. 2017. С. 22-27.
29. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Тимонов А.А.** Математические задачи компьютерной томографии. М.: Наука, 1987. 160 с.
30. **Майорова В.И., Банников А.М., Зайцев К.И.** Математическое моделирование процесса радиометрической коррекции снимков дистанционного зондирования Земли // Инженерный журнал: наука и инновации. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013. 20 с.
31. **Гончарский А.В.** Обратные задачи оптики // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 1986. №3. С. 59-76.
32. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
33. **Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е.** Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. М.: Наука, 1987. 320 с.
34. **Васильев К.А., Новиков А.И.** Регуляризационный алгоритм восстановления размытого изображения в задаче маскирования информации // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. Т.13, № 3(67), 2024. С. 8-16.
35. **Новиков А.И., Шамин Н. О.** Исследование регуляризационного метода восстановления размытых изображений // Вестник РГРТУ, № 72, 2020. С. 106-115.
36. **Логинов А.А., Новиков А.И., Саблина В.А., Щербакова О.В.** Исследование возможности применения комплексного контурного анализа в задачах классификации и совмещения контуров // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2013. № 43, С. 20-24.

UDC 519.688

EXPERIENCE IN APPLYING MATHEMATICAL METHODS IN DIGITAL SIGNAL PROCESSING

A. I. Novikov, Dr. Sc. (Tech.), full professor, RSREU, Ryazan, Russia;
orcid.org/0000-0002-8166-8234, e-mail: novikovanatoly@yandex.ru

The application of mathematical methods in solving digital image processing problems and certain issues of processing one-dimensional digital signals are considered. It is impossible to review the entire range

of mathematical methods used in digital signal processing in one article. Moreover, the author considers it appropriate to talk only about those methods that were developed and applied by him and his students in works performed mainly on an initiative basis. Therefore, only four groups of methods are considered. **The aim of the work** is to introduce novice researchers to the possibilities provided by mathematical methods to solve both applied problems and fundamental problems in digital signal processing.

Keywords: mathematical methods, linear and nonlinear operators, affine and projective transformations, interpretation of indirect measurements, complex contour analysis.

DOI: 10.21667/1995-4565-2025-91-168-182

References

1. **Gonsales R., Vuds R.** *Cifrovaya obrabotka izobrazhenij*. M.: Tekhnosfera. 2005. 1072 p. (in Russian).
2. **Gonsales R., Vuds R. Eddins S.** *Cifrovaya obrabotka izobrazhenij v srede MATLAB*. Moscow: Tekhnosfera. 2006. 616 p. (in Russian).
3. **Prett U.** *Cifrovaya obrabotka izobrazhenij*. Per. s angl. Moscow: Mir, 1982. Kn.2. 480 p. (in Russian).
4. **Furman Ya.Ya, Kreveckij A.V, Peredreev A.K., Rozhencov A.A., Hafazov R.G., Egoshina I.L., Leuhin A.N.** *Vvedenie v konturnyj analiz; prilozheniya k obrabotke izobrazhenij i signalov*. Moscow: Fizmatlit, 2003. 592 p. (in Russian).
5. **Forsajt D.A., Pons Zh.** *Komp'yuternoe zrenie. Sovremennyy podhod*. Moscow: Vil'yams, 2004. 928 p. (in Russian).
6. **Sojfer V.A., Sergeev V.V., Popov S.B., Myasnikov V.V.** *Teoreticheskie osnovy cifrovoj obrabotki izobrazhenij*. Izdatel'stvo: Samarskij nacional'nyj issledovatel'skij universitet imeni akademika S.P. Koroleva. 2000. 258 p. (in Russian).
7. **Sojfer V.A., Sergeev V.V., Popov S.B., Myasnikov V.V.** *Teoreticheskie osnovy cifrovoj obrabotki izobrazhenij*. Izdatel'stvo: Samarskij nacional'nyj issledovatel'skij universitet imeni akademika S.P. Koroleva. 2000. 258 p. (in Russian).
8. **Vizil'ter Yu.V., Zheltov S.Yu., Bondarenko A.V., Ososkov M.V., Morzhin A.V.** *Obrabotka i analiz izobrazhenij v zadachah mashinnogo zreniya*. Moscow: Fizmatkniga, 2010. 672 p. (in Russian).
9. **Alpatov B.A., Babayan P.V., Balashov O.E., Stepashkin A.I.** *Metody avtomaticheskogo obnaruzheniya i soprovozhdeniya ob"ektov*. Moscow: Radiotekhnika. 2008. 176 p. (in Russian).
10. **Babayan P.V., Murav'ev V.S., Smirnov S.A., Strotov V.V.** *Obrabotka izobrazhenij v sistemah obnaruzheniya i soprovozhdeniya ob"ektov*. Klassicheskie metody. Moscow: Goryachaya liniya – Telekom, 2023. 168 p. (in Russian).
11. **Novikov A.I., Pron'kin A.V., Ustyukov D.I.** Bystrye algoritmy pervichnoj obrabotki izobrazhenij v bortovyh sistemah tekhnicheskogo zreniya. *Sovremennye informacionnye tekhnologi i IT-obrazovanie*. 2020. vol. 16, no 3, pp. 673-685. (in Russian).
12. **Novikov A.I.** Formation of Operators with Given Properties to solve Original Image Processing Tasks, *The 11th International Conference «Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies» (PRIA-11-2013)*, Samara, Russian Federation, 2013, vol. II, pp. 445-448.
13. **Novikov A.I., Pron'kin A.V.** *Linejnye operatory s vektornymi maskami v zadachah cifrovoj obrabotki izobrazhenij*. *Komp'yuternaya optika*, 2023, vol. 47, no. 4. pp. 596-604. (in Russian).
14. **Tomasi C., Manduchi R.** Bilateral filtering for gray and color images. *Proc. IEEE 6th Int. Conf. on Computer Vision*. Bombay, India, 1998, pp. 839-846.
15. **Lee J.-S.** *Digital Image Smoothing and the Sigma Filter*. *Computer Vision, Graphics, Image Processing*, 1983, vol. 24, no. 2, pp. 255-269. (in Russian).
17. **Novikov A.I., Pron'kin A.V.** Sravnitel'nyj analiz metodov fil'tracii diskretnogo gaussovskogo shuma pri obrabotke izobrazhenij. *Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2018, no. 66, pp. 70-77. (in Russian).
18. **Novikov A.I., Pron'kin A.V.** Detektor granic gradientnogo tipa dlya izobrazhenij podstilayushchej poverhnosti. *Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2019, no. 68, pp. 68-76. DOI: 10.21667/1995-4565-2019-68-2-68-76. (in Russian).
19. **Novikov A.I., Ustyukov D.I.** Metod obnaruzheniya ob"ektov s dopolnitel'nym semanticheskim priznakom. *Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2022, no 79, pp. 89-100. (in Russian).

20. **Novikov A.I., Holopov E.Yu.** Raspoznavanie staticheskikh zhestov ladoni s primeneniem kompleksnogo konturnogo analiza. *Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2021, no 78. pp. 142-152. (in Russian).

21. **Il'in M.E., Novikov A.I., Fat'yanov S.O., Churakov E.P.** Matematicheskoe obespechenie zadach interpretatsii rezul'tatov kosvennykh izmerenij. *Elektronnoe modelirovanie*. 1991, vol. 13, no 2, pp. 25-27. (in Russian).

22. **Novikov A.I., Sablina V.A., Goryachev E.O.** *Primenenie konturnogo analiza dlya sovmeshcheniya izobrazhenij*. Izvestiya TulGU. Tekhnicheskie nauki. no. 9, ch. 1, 2013. pp. 260-270. (in Russian).

23. **Novikov A.I., Sablina V.A., Efimov A.I.** Image Superimposition and the Problem of Selecting the Set of Corresponding Point Pairs. *4th Conference on Embedded Computing, MECO 2015*. Budva, Montenegro. 2015. Pp. 139-142. DOI: 10.1109/MECO.2015.7181886

24. **Sablina V.A., Novikov A.I., Nikiforov M.B., Loginov A.A.** Contour Analysis Application for Object Detection in Aerial Image. *Proceedings – 2014 3rd Mediterranean Conference on Embedded Computing, MECO 2014 – Including ECyPS 2014*. 3. 2014. Pp. 102-107.

25. **Efimov A.I., Novikov A.I.** Programmno-algoritmicheskij kompleks sovmeshcheniya izobrazhenij v aviacionnykh sistemakh tekhnicheskogo zreniya. V sbornike: *Informacionnye tekhnologii i nanotekhnologii (ITNT-2017). Sbornik trudov III mezhdunarodnoj konferencii i molodezhnoj shkoly. Samarskij nacional'nyj issledovatel'skij universitet imeni akademika S.P. Koroleva*. 2017. pp. 400-409. (in Russian).

26. **Martin A. Fischler and Robert C. Bolles.** Random Sample Consensus: A Paradigm for Model Fitting with Applications to Image Analysis and Automated Cartography. *Comm. of the ACM: journal*. Vol. 24. Pp. 381-395. DOI: 10.1145/358669.358692.

27. **Andrushevskij N.M.** *Analiz ustojchivosti reshenij sistem linejnykh algebraicheskikh uravnenij*. M.: Izdatel'skij otdel fakul'teta VMiK MGU im. M.V. Lomonosova; MAKSPress, 2008. p. 71. (in Russian).

28. **Novikov A.I.** Reshenie pereopredelennykh sistem linejnykh algebraicheskikh uravnenij v zadachah obrabotki izobrazhenij. *Cifrovaya obrabotka signalov*, no. 3. 2017, pp. 22-27. (in Russian).

29. **Tihonov A.N., Arsenin V.Ya., Timonov A.A.** *Matematicheskie zadachi komp'yuternoj tomografii*. M.: Nauka, 1987. 160 p. (in Russian).

30. **Majorova V.I., Bannikov A.M., Zajcev K.I.** Matematicheskoe modelirovanie processa radiometricheskoi korrektsii snimkov distancionnogo zondirovaniya Zemli. *Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovacii*. M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Bauman, 2013. 20 s.tomografii. M.: Nauka, 1987. 160 p. (in Russian).

31. **Gonchar'skij A.V.** Obratnye zadachi optiki. *Vestnik Moskovskogo universiteta*. Seriya 15. Vychislitel'naya matematika i kibernetika. 1986. no. 3. pp. 59-76. (in Russian).

32. **Tihonov A.N., Arsenin V.Ya.** *Metody resheniya nekorrektnykh zadach*. M.: Nauka, 1986. 288 p.

33. **Voevodin V.V., Tyrtshnikov E.E.** *Vychislitel'nye processy s teplicevymi matricami*. Moscow: Nauka, 1987. 320 p. (in Russian).

34. **Vasil'ev K.A., Novikov A.I.** *Regulyarizacionnyj algoritm vosstanovleniya razmytogo izobrazheniya v zadache maskirovaniya informacii*. XXI vek: itogi proshlogo i problemy nastoyashchego plyus. Vol. 13, no. 67, 2024, pp. 8-16. (in Russian).

35. **Novikov A.I., Shamin N.O.** Issledovanie regulyarizacionnogo metoda vosstanovleniya razmytykh izobrazhenij. *Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2020, no. 72, pp. 106-115. (in Russian).

36. **Loginov A.A., Novikov A.I., Sablina V.A., Shcherbakova O.V.** Issledovanie vozmozhnosti primeneniya kompleksnogo konturnogo analiza v zadachah klassifikacii i sovmeshcheniya konturov. *Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2013, no. 43, pp. 20-24. (in Russian).