

УДК 517.977.5

РАЗРАБОТКА РЯЗАНСКИМИ МАТЕМАТИКАМИ НОВОГО НАПРАВЛЕНИЯ – УПРАВЛЕНИЕ «В МАЛОМ»

К. В. Бухенский, к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой ВМ, РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0000-0000-000X, e-mail: bukhensky.k.v.@rsreu.ru

В. В. Миронов, д.ф.-м.н., профессор кафедры ВМ, РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0000-0000-000X, e-mail: mironov.v.v.@rsreu.ru

Системно раскрывается история создания нового направления в математической теории управления – управление «в малом», открытого и развиваемого ныне учеными Рязанского государственного радиотехнического университета имени В.Ф. Уткина. Общая теория управления рассматривается как один из основных разделов теории оптимального регулирования. Представлены основные результаты теории глобального управления, локального управления и управления «в малом» и имена их авторов. Целью исследования является ознакомление российской научной общественности, специалистов в теории управления с новым направлением – управление «в малом». Представлены история становления и развития теории, прикладные проблемы.

Ключевые слова: теория управления, новое направление теории - управление «в малом», история и развитие новой теории, приложение теории.

DOI: 10.21667/1995-4565-2025-91-183-199

Введение

В данной обзорной статье представлены история создания и основы теории управления «в малом» - важного частного случая общей математической теории управления, зародившегося в трудах ученых Рязанского радиотехнического института (РРТИ, ныне в РГРТУ им. В.Ф. Уткина) Ивана Петровича Карасева, Юрия Сергеевича Митрохина, Льва Николаевича Ешукова в 60-е годы прошлого века.

Что касается общей темы управления, то представить сколь-нибудь полно историю развития математической теории управления – цель недостижимая ввиду чрезвычайно большого объема информации по этому вопросу (это будет под силу, по-видимому, только мощному искусственному интеллекту, когда он будет создан, что, вообще говоря, не факт [1, 2]. Но представить эту историю «фрактально» с акцентом на возникновение управления «в малом» вполне возможно.

Цели данной статьи и заключаются в том, чтобы именно фрагментарно, фрактально ознакомить специалистов и историков математики в контексте общей теории управления с новым направлением – теорией управляемости, наблюдаемости и достижимости цели «в малом» и с ее приложениями.

Разновидности управления

По-видимому, впервые процессы автоматического регулирования (и, как следствие, управления) систематически были рассмотрены в работах [3, 4], и основной проблемой в теории автоматического регулирования сразу стала проблема устойчивости.

Первые попытки разрешить эту проблему привели к (алгебраическим) критериям устойчивости [5, 6].

Собственно, что значит – управлять системой? Процитируем Р. Калмана [7] (что естественно в этой теме): «Цель управления состоит в том, чтобы изменить динамику поведения физической системы в соответствии с желаниями человека».

Традиционные методы оптимального управления могут оказаться малоэффективными в конкретных ситуациях, когда, к примеру, нужно так управлять объектом, чтобы он достиг

цели управления и при этом не вышел за пределы некой пространственной области (что и есть управляемость «в малом»).

Перейдем к формальным определениям.

Математическая модель управляемого и наблюдаемого движения (некоторого объекта) в трехмерном (аффинном) пространстве представлена в виде (неавтономных) дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + uv(t), \\ y(t) &= C(t)x(t), \end{aligned} \quad (1)$$

где $x(t)$ – n -мерный вектор фазового состояния системы $n = 3$, зависящий от времени t ; вектор y – это p -мерный вектор наблюдения ($1 \leq p \leq 3$) – постоянный вектор, заданный координатами u_1, u_2, u_3 (физически – это коэффициенты усиления управления по выбранным осям координат); $A(t), C(t)$ заданные матрицы соответствующих размерностей с вещественными и непрерывными при $t \in [0, +\infty)$ элементами; $v(t)$ – кусочно-постоянная функция из заданной области U , называемая допустимым управлением, удовлетворяющая условию (нормировки)

$$(\forall t) |v(t)| \leq 1. \quad (2)$$

Обратим внимание читателей на то, что в следующих подразделах 1, 2, 3 говорится об «управлении», а не о более узком понятии «управляемости». Управляемость – это констатация факта, что система управляема или нет, «управление» подразумевает не только факт управляемости, но и наличие закона или правила управления для достижения объектом заданной цели.

Управление «в малом»

Определение 1. Детерминированную систему, описываемую уравнением (1) [соответственно систему уравнений (1.1)], назовем *управляемой «в малом»* в фиксированный момент времени $T^0 \in [t_0, T]$ для начала координат O , если для любой окрестности начала координат $S(O) = U(O)$ найдется окрестность $V(O) \subset S(O)$ такая, что для любой точки $x_0 \in V(O)$ можно указать допустимое управление $v(t)$, при котором положительная полутраектория системы (1), (2), выходящая из точки x_0 , достигает начала координат – точки O «за конечное время на конечном интервале времени $[T^0, T^1]$ (или, как обычно говорят, упрощая эту фразу, «за конечное время $[T^0, T^1]$)», не выходя из окрестности $S(O)$, при этом не исключено, вообще говоря, что $T^1 \geq T$.

Систему (1) назовем управляемой «в малом» на отрезке времени $[t_0, T]$, если она управляема «в малом» в каждом моменте времени $T^0 \in [t_0, T]$. Это также значит, что начало координат достижимо «в малом» для системы (1). *Конец определения.*

Глобальное управление системой

Определение 2. Детерминированную систему, описываемую уравнением (1), назовем *глобально управляемой*, [или как синоним система (1) *глобально управляема*] в фиксированный момент времени $T^0 \in [t_0, T]$ для начала координат O , если для любой точки x_0 пространства можно указать допустимое управление $v(t)$, при котором положительная полутраектория системы (1), (2), выходящая из точки x_0 , достигает начала координат – точки O за конечное время $[T^0, T^1]$, при этом не исключено, что $(T^1 \geq T)$. Систему (1) назовем глобально управляемой на всем отрезке времени $[t_0, T]$, если она (система) глобально управляема в каждый момент времени $T^0 \in [t_0, T]$.

Локальное управление (классическое)

Определение 3. Детерминированную систему, описываемую уравнением (1) [соответственно систему уравнений (1)], назовем *локально управляемой* в фиксированный момент времени $T^0 \in [t_0, T]$ для начала координат O , если для некоторой окрестности начала координат $S(O) = U(O)$ и для любой точки $x_0 \in S(O)$ можно указать допустимое управление $v(t)$, при котором положительная полутраектория системы (1), (2), выходящая из точки x_0 , достигает начала координат – точки O за конечное время $[T^0, T^1]$, при этом не исключено, что $(T^1 \geq T)$. Систему (1) назовем локально управляемой на отрезке времени $[t_0, T]$, если она локально управляема в каждом моменте времени $T^0 \in [t_0, T]$.

Отсюда легко построить, руководствуясь классической математической логикой, определения глобально неуправляемой, или локально неуправляемой, или неуправляемой «в малом» системы (их явные формулировки здесь опущены из соображений экономии пространства).

Задачи, сопутствующие управлению «в малом»

Наиболее важные и ценные результаты получены в управлении движением, описываемым конечными системами дифференциальных уравнений для числовых функций. Красовский Н.Н. в работе [8] для линейной системы задачу об управлении рассматривает как проблему моментов, в статье же обсуждаются задачи программного управления и управления по принципу обратной связи.

Краевая задача для линейных и квазилинейных систем рассматривалась Зубовым В.И. [9].

Большое внимание уделяется возможности численного решения с помощью методов последовательного приближения. Система с постоянными параметрами достаточно подробно исследовалась в работах [10, 11]. В этих же работах рассматривается «широкий» по содержанию, строго обоснованный и удобный по форме для приложений критерий оптимальности по принципу максимума.

Изучению управляемости бесконечномерными линейными системами посвящена работа [12]. Исследуется также проблема так называемой \mathcal{L} -управляемости (обозначение стандартное), то есть возможность перевода как автономных, так и неавтономных систем из заданной точки в некоторую заданную окрестность другой точки. Предложено решение рассматриваемой задачи с помощью конечномерного и бесконечномерного управлений.

В теории оптимальных процессов наиболее полные исследования и окончательные результаты относятся к необходимым признакам оптимальности.

Другой подход к проблемам управления – метод динамического программирования рассмотрен в книге [13].

Одной из трудных и мало разработанных проблем, в особенности для нелинейных систем, остается краевая задача, связанная с необходимостью привести управляемый объект в заданное конечное состояние. При этом целесообразно изучить данную задачу об управлении сначала даже без учета требования оптимальности по тому или иному показателю.

Среди многих работ в этом направлении отметим «рязанские» работы [14-19], в которых зарождается идея управляемости «в малом» и присутствует либо явно, либо опосредованно.

Более конкретно. В работе [14] решается вопрос об управляемости «в малом» нелинейных неавтономных систем дифференциальных уравнений оптимального регулирования.

В работе [15] исследуются уже критические случаи управляемости систем нелинейных дифференциальных уравнений оптимального регулирования.

Работа [16] развивает результаты статьи [15] на некоторые критические случаи управляемости систем нелинейных дифференциальных уравнений без привязывания их к конкретным техническим системам.

В работе [17] предпринята попытка расширить понятие «управляемость «в малом»» для произвольных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Таким образом, новая

идея «перетекает» из РРТИ (Рязанский радиотехнический институт) в РГПИ (Рязанский государственный педагогический институт), в котором Михаил Тихонович Терехин (в 2024 г. ему исполнилось бы 90 лет) уже основал свою школу дифференциальных уравнений.

В работах [18, 19] рассматривается смежная (и потому интересная для нас) проблема устойчивости управления по параметру.

В статье [20] изучаются системы, не являющиеся в общем случае управляемыми, в ней исследуется проблема определения множества управляемости.

Для поиска управлений, разрешающих краевую задачу, наши коллеги Терехин М.Т., Землякова Л.С. предлагают так называемый метод вариации промежуточной точки [21].

Управлением динамическими системами с помощью кусочно-постоянных функций занимались также Раковщик Л.С. [22, 23], Нгуен Тхань Банг [24] и снова Землякова Л.С. [25, 26].

Особое место в исследовании математических моделей занимают исследования управляемых систем. Большое прикладное значение имеет проблема локальной управляемости нелинейных систем. Решению этой проблемы посвящены, в частности, работы [15-16].

Вопрос локальной управляемости рассматривался Н.Н. Красовским [27], что особенно интересно (по мнению авторов) в связи с его работой [28].

Вопросу локальной управляемости также уделяли внимание В.И. Зубов [9], Э.Г. Альбрехт, О.Н. Соболев [29, 30], Р.Ф. Габасов, Ф.М. Кириллай [31]. В этих работах они исходили из предположения о полной управляемости системы линейного приближения.

А уже работы Зудашкиной (Алешукиной) О.В. в соавторстве с С.С. Мамоновым [32, 33] не связаны данным жестким ограничением, и условия существования требуемого управления определяются свойствами как линейных, так и нелинейных частей системы.

Критические случаи управления изучались и ранее, но приводимые в работах [16, 15, 34] критерии управляемости предполагают наличие у правых частей системы частных производных высокого порядка [32].

Обобщающей пионерской работой в теме управления «в малом» явилась диссертация И.П. Карасева [35].

В этой работе в первой и второй главах изучаются вопросы существования области достижимости для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в векторной форме:

$$\frac{dx}{dt} = F(x) + vu, \quad (3)$$

где $F(x)$ – вектор-функция; $v(t)$ – управляющая скалярная функция, стесненная условием $u: |v(t)| \leq 1$, u – постоянный вектор фазовой плоскости R^2 .

Рассмотрены вопросы существования области достижимости «в малом» начала координат для системы (3). При некоторых ограничениях на правые части устанавливается, что из достижимости «в малом» следует достижимость «в большом» (из любой точки плоскости R^2 и из некоторой области).

И.П. Карасевым доказано также, что асимптотически устойчивые системы имеют область достижимости в случае достижимости начала «в малом».

Показано, какие именно дополнительные условия нужно внести в условия теорем Н.П. Еругина, И.Г. Малкина и Н.Н. Красовского (см. работы [27, 36-38]), чтобы системы типа Айзермана – Калмана [39, 40] с добавлением управления обладали свойством достижимости в большом.

Проведено полное исследование вопроса о существовании области достижимости для системы двух линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + vu, A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}. \quad (4)$$

В работах [41-43] решена задача синтеза для системы (4) в предположении выполнения условия общности положения (стандартное понятие) векторов u и Au .

В диссертации с новой точки зрения (достижимости «в малом») решаются вопросы достижимости и недостижимости для системы (4). Доказано, что может иметь место только один из следующих случаев:

- 1) области достижимости для системы (4) не существует
- 2) область достижимости существует и совпадает со всей плоскостью R^2 ;
- 3) область достижимости существует и совпадает с некоторой частью плоскости R^2 .

Рассматривается существование области достижимости «в малом» начала для систем трех дифференциальных уравнений.

В первой части работы изучается нелинейная система (4). Вызывает сомнение достижимость точки O «в малом» для нелинейных систем при граничных значениях управления в некоторых случаях. Поэтому в условие введена область управлений u_1 , в которой смешанное произведение векторов $\dot{x}_0, \ddot{x}_0, \ddot{\ddot{x}}_0$ (при наличии всех производных) меняет знак при замене управления на противоположное управление.

Далее доказывается аналогичная теорема для случая линейной зависимости векторов $\dot{x}_0, \ddot{x}_0, \ddot{\ddot{x}}_0$ и проводится исследование на управляемость с помощью высших производных.

Если перейти от обзора собственно диссертации И.П. Карасева к обзору конкретных научных статей по теме, то пионерской работой, вышедшей на Всероссийский уровень и оказавшей большое влияние на формирование нового направления «в малом», стала работа [44].

По поводу этой работы Фаина Михайловна Кириллова (1931–2024) доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Академии наук БССР, заслуженный деятель науки Белоруссии, широко известный специалист по теории управления, заметила: «В Рязани зарождается новая школа теории управления».

В работах [45-51] вопросы управляемости, в том числе «в малом» изучались в различных трактовках, как правило, более узких, по сравнению с [44].

Так, в работе [45] изучались области достижимости для систем оптимального регулирования второго порядка.

В работах [46, 47] изучалась достижимость «в малом» начала координат для системы трех нелинейных дифференциальных уравнений.

В работах [48-53] изучались различные частные задачи оптимального управления, в том числе «в малом».

Так, в работе [46] доказано, что управляемость «в малом» зависит от кручения траекторий, вычисленного в начале координат. Этот результат оказал большое влияние и на исследование устойчивости (по А.М. Ляпунову) нулевого решения системы дифференциальных уравнений.

В работах [54-57] рязанских математиков Митрохина Ю.С., Степанова А.Н., Карасева И.П. (по отдельности или в соавторстве) исследуются вопросы управления «в малом» нелинейных неавтономных систем дифференциальных уравнений оптимального регулирования вида:

$$\dot{x}_0 = f(x, t) + u(t)a. \quad (5)$$

В диссертационной работе Ю.С. Митрохина [58] (защита которой, также, как у И.П. Карасева, проходила в Минске) решены следующие вопросы:

- вопросы существования области управляемости систем нелинейных дифференциальных уравнений;
- в предположении, что правые части заданных систем имеют достаточное число непрерывных производных в окрестности начала координат, устанавливаются признаки управляемости и неуправляемости «в малом»;
- показывается, что эти признаки зависят от свойств последней кривизны траектории в окрестности начала координат;

- результаты в теории управляемости «в малом» не основаны на использовании линейного приближения или на классических предположениях об общности положения векторов $a, Aa, \dots, A^{n-1}a$, где A – матрица линейного приближения;
- изучаются задачи о встрече движений на плоскости для линейных и нелинейных систем;
- изучаются свойства так называемой ε -управляемости «в малом» систем;
- некоторые критические случаи управляемости систем нелинейных дифференциальных уравнений; критические случаи управляемости систем нелинейных дифференциальных уравнений оптимального регулирования.

Отметим, что Ю.С. Митрохин применил и утвердил основной аппарат исследования управляемости «в малом» - качественные методы теории дифференциальных уравнений [59] и особенно методы многомерной геометрии [60-62].

Нелишним будет сказать, что геометрические методы играют важную, если не главную, роль в решении этих проблем, а сами методы берут свое начало от работ Пуанкаре, Биркгофа, Морса и других авторов.

Так, исследование периодических решений дифференциальных уравнений приобрело актуальность и даже популярность после работы А. Пуанкаре [63], в которой он представил эффект неинтегрируемости динамической системы. По этому вопросу можно также посмотреть работу В.В. Козлова [64].

После работы А. Пуанкаре вопросы качественного анализа в теории дифференциальных уравнений приобрели одно из центральных направлений, а проблема исследования периодических решений стала весьма популярной.

Проблемы динамических и геометрических свойств периодических траекторий интенсивно изучаются. В частности, обзоры результатов и важные частные результаты можно проследить по работам [65-69].

Развитие управления «в малом»

Отметим вначале, что рассмотрение вопросов об устойчивости нелинейных управляемых систем стимулировало развитие новых методов анализа, дифференциальной геометрии, многомерной геометрии и даже, казалось бы, далекой от темы устойчивости алгебры.

Так, для обнаружения скрытых периодических колебаний в многомерных динамических системах В.А. Плиссом [70] был разработан аналитический метод, позволяющий обнаруживать периодические колебания в системах третьего порядка, удовлетворяющих обобщенным условиям Рауса – Гурвица. В дальнейшем этот метод был развит и для многомерных систем [71-74].

Оказалось, что такой обобщенный метод В. А. Плисса может рассматриваться как некоторый специальный вариант метода описывающих функций в критическом случае [75].

Объединенный с вычислительными процедурами, базирующийся на прикладной теории бифуркаций, этот метод позволил получить новые классы систем, для которых неверны вышеупомянутые гипотезы Айзермана и Калмана [76].

В контексте общей проблематики об устойчивости и управляемости нелинейных систем типа Айзермана – Калмана работы профессора кафедры высшей математики РГРТУ В.В. Миронова позволили решить проблемы об устойчивости и управляемости «в малом» для нелинейных систем в наиболее общих многомерных случаях и выйти на фундаментальный вопрос о построении функции А.М. Ляпунова в различных случаях не по интуиции (некоторые математики приравнивают умение строить функции Ляпунова к искусству), а по конструктивному алгоритму (отчасти открытая проблема).

Вопрос в деталях о теории управления «в малом» можно проследить по публикациям: статьям [77-84], монографии [85] и справочнику [86]. Остановимся на обсуждении некоторых из этих результатов.

В работе [77] авторами представлены новая концепция, новый подход к исследованию устойчивости и управляемости динамических систем, основанный на свойствах траектории системы.

В работе [78] ставится вопрос о построении методов исследования устойчивости и управляемости в задачах о движении космических аппаратов (КА) применительно к простым моделям движения КА.

В работе [79] рассмотрен вопрос об устойчивости (в «ляпуновском» ее понимании) систем автоматического управления с переменной структурой, причём снова, как и в работе [77], делается попытка конструктивного построения функции Ляпунова.

В работе [80] рассмотрены вопрос об управляемости систем оптимального регулирования и методы его решения.

Попытка обобщения новых методов предпринята в работе [81], в которой предложен единый конструктивный подход к построению функций «ляпуновского» типа.

Уже в работе [82] осуществлен переход от непрерывных систем к разностным на примере исследования устойчивости решений широко известных разностных уравнений Вольтерра. Эта тема продолжена в работе [83].

Прикладные аспекты теории управления в переходе от управления «в малом» к глобальному управлению закладываются в работе [84], в которой исследуется глобальная устойчивость технических систем с переменной структурой.

Обобщение этих разработок осуществлено в монографии [85]. Этой работе предшествовали доклады В.В. Миронова в ФИЦ ИЦ РАН, ВЦ РАН им. А.А. Дородницына на научных семинарах профессора Н.А. Северцева.

В прикладном аспекте перспективная тема управления «в малом» применительно к малым космическим аппаратам (МКА) была развита в работах учеников проф. Миронова В.В. [87-101]. Представим коротко основные результаты.

Так, в работе [87] изучается устойчивое управление линейными системами переменной структуры.

В работе [88] представлены алгоритмы перехода к стандартному управлению (космическими) объектами.

В работе [89] представлена система проектирования кусочно-постоянного управления малыми искусственными спутниками Земли.

В работах [90-92] проведено проектирование вариантов управления наноспутником на основе траекторных измерений и ряд сопутствующих задач.

В работе [93] изучена возможность достижимости цели «в малом» для плоского управляемого движения космического аппарата.

В работе [94] представлен уже программный комплекс «Поиск моментов переключения управления малого космического аппарата».

В работе [95] осуществлен переход от проблемы управляемости к проблеме наблюдаемости «в малом» для неавтономных линейных систем и ее приложение к анализу движения малого космического аппарата.

В работе [97] изучается принцип двойственности «в малом» для линейных систем и его приложение к анализу движения субспутника в окрестности базового космического аппарата.

В работах [98-101] эти прикладные вопросы развиваются в разных направлениях.

Таким образом, новое поколение рязанских математиков продолжило и продолжает эту новую ветвь теории управления – управление «в малом».

Выводы

Предложена методика исследования управляемости неавтономных нелинейных систем дифференциальных уравнений произвольного порядка.

Новая методика анализа управляемости «в малом» и «в большом» вобрала в себя новую технику анализа устойчивости по А.М. Ляпунову, использующую функцию кривизны кривой и ее свойства.

Новая методика открывает перспективы в исследовании систем с не единственным состоянием равновесия, в исследовании систем с векторным управлением, а также в ряде других насущных проблем теории управляемости.

Новое направление «в малом» в теории управления имеет практические приложения в научно-технических отраслях, таких как:

- робототехника,
- автоматическое наведение объектов на цель или малую окрестность цели,
- управление малыми космическими аппаратами (МКА) при условии ограничения пространства для маневров МКА.

Именно таким практическим приложениям и посвящены, как уже упоминалось, работы [87-101].

Что касается общей темы изучения дифференциальных уравнений, исследования свойств решений в разных аспектах (периодические колебания, решение дифференциальных уравнений, управляемость, устойчивость, наблюдаемость систем), то вклад представителей Рязанской математической школы можно проследить по библиографическому справочнику [86].

Заключение

Подводя итог краткому историко-аналитическому обзору развития теории управления, методов системных исследований в этой теме с акцентом на новое направление – управляемость «в малом», возникшее в недрах Рязанской математической школы и в ней же ныне развиваемое, необходимо отметить, что, несмотря на существующее разнообразие представленных теорий и методов, они имеют общие черты, общие принципы, которые позволяют отнести их к общему классу. Эти принципы образуют общую концептуальную основу, общую логику, изучение которой составляет главную цель предлагаемой читателям статьи.

В этой теме остаются еще принципиальные вопросы. Авторы сформулировали некоторые из них.

1. Конструктивное построение функций Ляпунова для произвольных нелинейных дифференциальных уравнений с достаточно гладкими правыми частями.
2. Конструктивное построение функций Ляпунова для произвольных нелинейных дифференциальных уравнений с негладкими правыми частями (вопрос об аппроксимации правых частей до гладких без утери свойств устойчивости).
3. Управляемость системами не только в ограниченных пространствах, но и при ограничениях по времени.
4. Двойственная задача управляемость-наблюдаемость «в малом».
5. Применение принципов управляемости «в малом» в конкретных проектах с МКА при движении МКА в заданной пространственной трубке.
6. Управляемость «в малом» МКА при взаимном движении МКА и цели.
7. Метод Л.С. Понтрягина для линейных или линеаризуемых нелинейных систем при управлении «в малом».
8. Метод Л.С. Понтрягина для нелинеаризуемых систем при управлении «в малом».
9. Управляемость «в малом» при наличии конечного или бесконечного числа особых точек.
10. Проблема динамического программирования «в малом».
11. Теория управления «в малом» для дискретных систем.
12. Теория управления «в малом» для фрактальных систем.

Библиографический список

1. **Smale S.** Mathematical Problems for the Next Century // Math. Intelligencer 20, no. 2, pp. 7-15, 1998.
2. **Ефимов А.Р.** Постбюроинговая методология: разрушение стены на пути к общему искусственному интеллекту // Интеллект. Инновации. Инвестиции / Intellect. Innovations. Investments. № 2, 2020. С. 74-80.
3. **Maxwell J.C.** On Governors / J.C. Maxwell // Proc. of the Royal Soc. of London: 1868, vol. 16.
4. **Максвелл Д.К., Вышнеградский И.А., Стодола А.** Теория автоматического регулирования / под ред. А.А. Андропова и И.И. Вознесенского: монография. М.: Изд. АН СССР, 1949.
5. **Routh E.J.** A treatise on the stability of a given state of motion, particularly steadymotion / E.J. Routh. London: 1877, XII.
6. **Hurwitz A.** Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt / A. Hurwitz // Mathematische Annalen. 46. p. 1895.
7. **Калман Р.** Очерки по математической теории систем / Р. Е. Калман, П. Л. Фалб, М. А. Арбиб. М.: Мир, 1971. С. 35-38.
8. **Красовский Н.Н.** О некоторых задачах управления // Тр. Мат. ин-та РАН, 1999. 224. С. 208-217.
9. **Зубов В.И.** Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л.: Машиностроение, 1974. 335 с.
10. **Болтянский В.Г.** Математические методы оптимального управления. М.: Наука, 1969. 408 с.
11. **Раковщик Л.С.** Построение допустимых управлений I // Автоматика и телемеханика, 1962, Т. 23, № 10.
12. **Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г.** Математические методы и модели в управлении. М.: Дело, 2002. 440 с.
13. **Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.** Математическая теория конструирования систем управления. М.: Высшая школа, 1989. 447 с.
14. **Митрохин Ю.С.** Об управляемости «в малом» нелинейных неавтономных систем дифференциальных уравнений оптимального регулирования // Труды Рязан. радиотехн. ин-та. Рязань, 1976, вып. 69. С. 25-30.
15. **Митрохин Ю.С., Степанов А.Н.** Критические случаи управляемости систем нелинейных дифференциальных уравнений оптимального регулирования // Дифференциальные уравнения (Качественная теория): Межвуз. сб. науч. тр. Рязань: Ряз. пед. ин-т, 1985. С. 61-70.
16. **Митрохин Ю.С., Степанов А.Н.** Некоторые критические случаи управляемости систем нелинейных дифференциальных уравнений // Труды Рязан. радиотехн. ин-та. Рязань, 1974, вып. 53. С. 62-67.
17. **Терехин М.Т.** Управляемость «в малом» системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные и интегральные уравнения. Методы топологической динамики: Межвуз. сб. науч. тр. Горький: Горьк. ун-т, 1987. С. 48-52.
18. **Терехин М.Т.** Устойчивость управления по параметру // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. Рязань: Изд-во РГПУ, 1998, № 1. С. 86-96.
19. **Терехин М.Т.** Об устойчивости управления по параметру // Известия вузов. Математика, 2000, № 9. С. 38-46.
20. **Терехин М.Т., Землякова Л.С.** Об управляемости систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения (Качественная теория): Межвуз. сб. науч. тр. Рязань: Изд-во РГПУ, 1995. С. 141-150.
21. **Терехин М.Т., Землякова Л.С.** Метод вариации промежуточной точки для исследования управляемости системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения (Качественная теория): Межвуз. сб. науч. тр. Рязань: Изд-во РГПУ, 1994. С. 116-124.
22. **Раковщик Л.С.** Построение допустимых управлений I // Автоматика и телемеханика, 1962, т. 23, № 10.
23. **Раковщик Л.С.** Построение допустимых управлений II // Автоматика и телемеханика, 1964, т. 25, № 1.
24. **Нгуен Тхань Банг.** Об управляемости квазилинейных систем // Прикладная математика и механика, 1969, Т. 31, № 1.
25. **Землякова Л.С.** Об управляемости некоторой системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения (Качественная теория): Межвуз. сб. науч. тр. Рязань: Изд-во РГПУ, 1996. С. 63-68.

26. **Землякова Л.С.** Управляемость систем с периодической правой частью // Дифференциальные уравнения (Качественная теория): Межвуз. сб. науч. тр. Рязань: Изд-во РГПУ, 1997. С. 33-35
27. **Красовский Н.Н.** О некоторых задачах управления // Алгебра. Топология. Дифференциальные уравнения и их приложения: Сборник статей. К 90-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понтрягина// Труды МИАН, 224. МАИК. М.: Наука/Интерпериодика, 1999, 208-217.
28. **Красовский Н.Н.** Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
29. **Альбрехт Э.Г.** Об оптимальном управлении движением квазилинейных систем // Дифференциальные уравнения, 1969, Т. 5, № 3. С. 430-442.
30. **Альбрехт Э.Г., Соболев О.Н.** Синтез систем управления с минимальной энергией // Дифференциальные уравнения, 1995, Т. 31, № 10. С. 1611-1616.
31. **Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М.** Качественная теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1971. 501 с.
32. **Алешукина (Зудашкина) О.В., Мамонов С.С.** Применение дифференциальных уравнений к решению проблемы турбулентности движения жидкости // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. Рязань: Изд-во РГПУ, 2003, № 7. С. 59-61.
33. **Зудашкина О.В.** Об условиях локальной управляемости нелинейных систем дифференциальных уравнений в одном критическом случае // Известия ТулГУ. Серия. Дифференциальные уравнения и прикладные задачи. Вып. 1. Тула: ТулГУ, 2004. С. 3-11.
34. **Моисеев Н.Н.** Элементы теории оптимальных систем. М.: Наука, 1975. 528 с.
35. **Карасев И.П.** Существование области достижимости в нелинейных задачах оптимального управления: Дисс. на соиск. уч. степени канд. физ.-мат. наук. Рязань: РРТИ, 1967.
36. **Еругин Н.П.** О некоторых вопросах устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений в целом // Прикладная математика и механика, 1950, т. 14, вып. 5.
37. **Еругин Н.П.** Качественные методы в теории устойчивости// Прикладная математика и механика, 1955, т. 19, вып. 5.
38. **Малкин И.Г.** Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования // Прикладная математика и механика, 1952, т. 3, вып. 16.
39. **Айзерман М.А.** Об одной проблеме, касающейся устойчивости «больших» систем // Успехи мат. наук. 1949. Т. 4. Вып. 4. С. 186-188.
40. **Kalman R. E.** Physical and Mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems // Transactions of ASME, 1957, vol. 79, no. 3, pp. 553-566.
41. **Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Физматгиз, 1961.
42. **Болтянский В.Г.** Математическая теория оптимального управления. М.: Наука, 1966.
43. **Bushaw D.W.** Optimal Discontinuous Forcing Terms // Annals of Mathematics Studies, 1958, vol.4.
44. **Карасёв И.П.** О существовании области достижимости// Дифференциальные уравнения, т. 3, № 12, 1967.
45. **Карасёв И.П.** Изучение области достижимости для систем оптимального регулирования второго порядка// Труды РРТИ, вып. 8, 1968, с. 11-29.
46. **Карасёв И.П.** Достижимость «в малом» начала координат для системы трех нелинейных дифференциальных уравнений// Труды РРТИ, вып. 8, Рязань, 1968, с. 34-42.
47. **Карасёв И.П.** Исследования достижимости «в малом» начала координат для систем трех нелинейных уравнений с помощью высших производных// Труды РРТИ, вып. 28, Рязань, 1971.
48. **Ешуков Л.Н.** Функциональные задачи для обыкновенных уравнений с управлением// Труды РРТИ, вып. 20, Рязань, 1969, с. 10-14.
49. **Ешуков Л.Н.** О несимметричности оптимальных управлений// Труды РРТИ, вып. 28, Рязань, 1971, с. 29-39.
50. **Ешуков Л.Н.** О строении области управляемости линейных систем оптимального управления// Труды РРТИ, вып. 20, Рязань, 1969, с. 20-29.
51. **Ешуков Л.Н.** Об одной задаче оптимального управления// Труды РРТИ, вып. 20, Рязань, 1969, с. 20-29.
52. **Ешуков Л.Н., Карасёв И.П.** О достижимости «в малом» систем оптимального регулирования второго порядка// Труды РРТИ, вып.8, Рязань, 1968, с. 1-10.

53. **Карасев И.П., Митрохин Ю.С.** Об управляемости систем трех нелинейных дифференциальных уравнений// Труды РРТИ, вып. 42, Рязань, 1972, с. 39-52.
54. **Карасев И.П., Митрохин Ю.С.** О достижимости в малом нелинейных систем// Всесоюзная конференция по качественной теории дифференциальных уравнений и изучению дифференциальных уравнений в педагогических институтах. Рязань. 1971.
55. **Митрохин Ю.С., Степанов А.Н.** Об управляемости в малом одной нелинейной системы // 3-я Всесоюзная конференция по качественной теории дифференциальных уравнений в высших учебных заведениях. Самарканд, 1973.
56. **Митрохин Ю.С.** Задачи о встрече движений на плоскости для нелинейных систем// Труды РРТИ, вып. 42, Рязань, 1972, с. 53-70.
57. **Митрохин Ю.С.** Задачи о встрече движений на плоскости для систем, допускающих линеаризацию// Труды РРТИ, вып. 42, Рязань, 1972, с. 71-78.
58. **Митрохин Ю. С.** Об управляемости нелинейных систем оптимального регулирования: Дисс. на соиск. уч. степени канд. физ.-мат. наук. Рязань: РРТИ, 1974.
59. **Немыцкий В.В., Степанов В.В.** Качественная теория дифференциальных уравнений. М.: Гостехиздат, 1949.
60. **Розенфельд Б.А.** Многомерные пространства. М.: Наука, 1966.
61. **Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р.** Линейная алгебра и многомерная геометрия. М.: Наука, 1970.
62. **Норден А.П.** Дифференциальная геометрия. М.: Учпедгиз, 1948.
63. **Пуанкаре А.** Новые методы небесной механики, т.1-3/ В кн.: Избр. труды, т. 1-2. М.: Мир, 1965.
64. **Козлов В.В.** Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике// Успехи мат. наук, 1983, 38, вып. Г. С. 3-67.
65. **Клингенберг В.** Лекции о замкнутых геодезических. М.: Мир, 1982.
66. **Аносов Д.В.** Замкнутые геодезические//В сб.: Качественные методы исследования нелинейных дифференциальных уравнений и нелинейных колебаний. Киев. 1981, с. 5-24.
67. **Новиков С.П.** Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса// Успехи мат. наук, 1982, вып. 37, с. 3-49.
68. **Козлов В.В.** Вариационное исчисление в целом и классическая механика// Успехи мат. наук, 1985, вып. 40, с. 33-60.
69. **Трещев Д.В.** Геометрические методы исследования периодических траекторий динамических систем: Дисс. на соискание уч. степ. канд. физ.-мат. Наук. М.: МГУ им. М. В. Ломоносова, 1987.
70. **Плисс В.А.** Некоторые проблемы теории устойчивости движения. Л.: Изд-во ЛГУ, 1958. 183 с.
71. **Noldus E.** On the sharpness of Popov's theorem // Internat. J. 1970. Control 12. No. 4.
72. **Леонов Г.А.** О необходимости частотного условия абсолютной устойчивости стационарных систем в критическом случае пары чисто мнимых корней // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193. № 4. С. 756-759.
73. **Leonov G.A., Burkin I. M., Shepelyavyi A.I.** Frequency methods in oscillation theory. Dordrecht: Kluwer, 1993.
74. **Leonov G.A., Ponomarenko D.V., Smirnova V. B.** Frequency methods for nonlinear analysis// Theory and applications. Singapore: World Scientific, 1996.
75. **Леонов Г.А.** Эффективные методы поиска периодических колебаний в динамических системах // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74. Вып. 1. С. 37-73.
76. **Леонов Г.А., Кузнецов Н.В., Брагин В.О.** О проблемах Айзермана и Калмана // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2010. Вып. 3.
77. **Мионов В.В., Митрохин Ю.С.** Новый подход к исследованию устойчивости и управляемости динамических систем // Труды международной конференции «Алгебраические и аналитические методы в теории дифференциальных уравнений». Орел, 1996. С. 127-129.
78. **Мионов В.В., Митрохин Ю.С.** Методы исследования устойчивости и управляемости в задачах о движении космических аппаратов// Тезисы докладов 2-й международной конференции «Космонавтика. Радиоэлектроника. Геоинформатика». Рязань, 1998. С. 108-109.
79. **Мионов В.В., Митрохин Ю.С.** Устойчивость систем автоматического управления с В работе // Вестник Рязанской государственной радиотехнической академии. Рязань, 1999. Вып. 6. С. 37-40.

80. **Миронов В.В., Митрохин Ю.С.** Задача об управляемости систем оптимального регулирования и методы ее решения // Вестник Рязанской государственной радиотехнической академии, 2000. Вып. 7. С. 22-25.
81. **Миронов В.В.** Единый конструктивный подход к построению функций ляпуновского типа // Известия РАЕН. Дифференц. уравн. 2000. № 4. С. 52-64.
82. **Миронов В.В.** Исследование устойчивости решений разностных уравнений Вольтерра // Известия РАЕН. Дифференц. уравн. 2001. № 5. С. 112-113.
83. **Миронов В.В., Митрохин Ю.С.** Конструктивное исследование устойчивости решений разностных систем уравнений // Известия РАЕН. Дифференц. уравн. 2001. № 5. С. 114-115.
84. **Миронов В.В., Митрохин Ю.С.** Глобальная устойчивость технических систем с переменной структурой // Космонавтика и ракетостроение. 2001. Вып. 24. С. 75-82.
85. **Миронов В.В., Северцев Н.А.** Методы анализа устойчивости систем и управляемости движением: Монография. / ВЦ РАН им. А. А. Дородницына. М.: Изд-во РУДН, 2002. 165 с.
86. Математики земли Рязанской: матер. исследования по рязанскому краеведению: Т. 69: библиографич. справочник / под общ. ред. **А.А. Кашаева**. Рязань, 2019. 367 с.
87. **Миронова К.В.** Устойчивое управление линейными системами переменной структуры // Межвуз. сб. науч. тр. «Информационные технологии». Рязань, 2011. С.110-114.
88. **Миронова К.В.** Разработка алгоритмов перехода к стандартному управлению объектами // Матер. 59-й науч.-техн. конф. «Всеросс. фестиваль науки». Рязань, РГРТУ, 2012. С. 116-117.
89. **Миронова К.В.** Система проектирования кусочно-постоянного управления малыми искусственными спутниками Земли // 6-я международная научно-техническая конференция «Космонавтика. Радиоэлектроника. Геоинформатика». Рязань, 2013. С. 105-107.
90. **Миронова К.В.** Блочный метод Гаусса в задачах проектирования линейного управления / 6-я международная научно-техническая конференция «Космонавтика. Радиоэлектроника. Геоинформатика». Рязань, 2013. С. 107-108.
91. **Миронова К.В.** Численное моделирование управления космическим наноспутником на основе двухэтапного ОМНК // Межвуз. сб. науч. тр. «Математические методы в научных исследованиях». Рязань. 2014. РГРТУ. С. 43-53.
92. **Миронова К.В., Корячко В.П.** Проектирование вариантов управления наноспутником на основе траекторных измерений // Информатизация образования и науки. 2015. № 2 (26). С. 75-87.
93. **Миронова К.В., Корячко В.П.** Достижимость цели «в малом» для плоского управляемого движения космического аппарата // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2015, № 51. С. 89-95.
94. **Миронова К.В., Розанов А.К.** Программа «Поиск моментов переключения управления малого космического аппарата». М.: Объединенный фонд электронных ресурсов «Наука и образование» Минобрнауки РФ. Свидетельство № 20974 от 16.06.2015.
95. **Ву К.М.** Проблема наблюдаемости «в малом» для неавтономных линейных систем и ее приложение к анализу движения малого космического аппарата [Текст] / К. М. Ву // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2019. № 1. С. 73-80.
96. **Ву К.М.** Задача оптимального управления «в малом» и ее реализация для малых космических систем [Текст] / К. М. Ву, И. П. Карасев // Информатизация образования и науки. 2019. № 2 (42). С. 56-64.
97. **Ву К.М.** Принцип двойственности «в малом» для линейных систем и его приложение к анализу движения субспутника в окрестности базового космического аппарата [Текст] / К.М. Ву, В.В. Миронов // Информатизация образования и науки. 2019. № 3 (43).
98. **Ву К.М.** Наблюдаемость «в малом» малых космических аппаратов для радиотехнических систем [Текст] / К.М. Ву, В.В. Миронов // Современные технологии в науке и образовании (СТНО – 2019): сб. тр. II междунар. науч.-техн. форума: в 10 т. Т.5. Рязань: Рязан. гос. радиотехн. ун-т, 2019. С. 133-135.
99. **Ву К.М.** Управляемость «в малом» для линейных неавтономных систем второго порядка [Текст] / К. М. Ву // Межвуз. сб. науч. тр. «Информационные технологии». Рязань, 2019. С. 55-57.
100. **Ву, К.М.** Связь предначальных и начальных условий в задачах управления [Текст] / К.М. Ву // Межвуз. сб. науч. тр. «Информационные технологии». Рязань, 2019. С. 57-60.
101. **Ву К.М., Миронов В.В.** Программный комплекс по управлению и наблюдению «в малом» малых космических аппаратов для плоского автономного случая / К.М. Ву, В.В. Миронов. М.: Роспатент. Свидетельство № 20196153212 от 12.04.2019.

UDC 517.977.5

DEVELOPMENT OF A NEW DIRECTION BY RYAZAN MATHEMATICIANS - CONTROL «IN THE SMALL

K. V. Bukhensky, Ph.D. (Phys. and Math.), Lecturer, Head of the Department of CM, Ryazan State Radio Engineering University, Ryazan, Russia;

orcid.org/0000-0000-0000-000X, e-mail: bukhenky.k.v.@rsreu.ru

V. V. Mironov, Dr. Sc (Phys. and Math.), Full Professor of the Department of HM, Ryazan State Radio Engineering University, Ryazan, Russia;

orcid.org/0000-0000-0000-000X, e-mail: mironov.v.v.@rsreu.ru

The history of creating a new direction in mathematical theory of control - control «in small», discovered and currently developed by scientists of Ryazan State Radio Engineering University named after V.F. Utkin, is systematically revealed. General control theory is considered as one of the main sections of the theory of optimal control. The main results of the theory of global control, local control and control «in small» and the names of their authors are presented. The aim of the study is to familiarize Russian scientific community, specialists in control theory with a new direction - control «in small». The history of formation and development of the theory, as well as applied problems are presented

Keywords: control theory, new direction of the theory - control "in small", history and development of a new theory, theory application.

DOI: 10.21667/1995-4565-2025-91-183-199

References

1. **Smale S.** Mathematical Problems for the Next Century. *Math. Intelligencer* 20, no. 2, 7-15, 1998.
2. **Yefimov A.R.** Postt'yuringovaya metodologiya: razrusheniye steny na puti k obshchemu iskusstvennomu intellektu. *Intellekt. Innovatsii. Investitsii / Intellect. Innovations. Investments.* № 2, 2020. pp. 74-80. (in Russian).
3. **Maxwell J.C.** On Governors. J.C. Makhwell. *Proc. of the Royal Soc. of London:* 1868, vol. 16.
4. **Maksvell D.K., Vyshnegradskij I.A., Stodola A.** Teoriya avtomaticheskogo regulirovaniya pod red. A.A. Andronova i I.I. Voznesenskogo: *monografiya.* M.: Izd. AN SSSR, 1949.
5. **Routh E.J.** *A treatise on the stability of a given state of motion, particularly steadymotion.* E.J. Routh. London: 1877, XII.
6. **Hurwitz A.** Über die Bedingungen, unter welcheneine Gleichungnur Wurzelnmit negativen reelen Teilenbesitzt. A. Hurwitz. *Mathematische Annalen.* 46. 1895.
7. **Kalman R.** *Ocherki po matematicheskoy teorii system.* R.E. Kalman, P.L. Falb, M.A. Arbib. M.: Mir, 1971. pp. 35-38. (in Russian).
8. **Krasovskiy H.H.** O nekotorykh zadachakh upravleniya. Tr. Mat. in-ta RAN, 1999. 224. pp. 208-217. (in Russian).
9. **Zubov V.I.** Matematicheskiye metody issledovaniya sistem avtomaticheskogo regulirovaniya. L.: *Mashinostroyeniye,* 1974. 335 p. (in Russian).
10. **Boltyanskiy V.G.** Matematicheskiye metody optimal'nogo upravleniya. M.: Nauka, 1969. 408 p. (in Russian).
11. **Rakovshchik L.C.** Postroyeniye dopustimyykh upravleniy I. *Avtomatika i telemekhanika,* 1962, vol. 23, no.10. (in Russian).
12. **Shikin Ye.V., Chkhartishvili A.G.** *Matematicheskiye metody i modeli v upravlenii.* M.: Delo, 2002. 440 p. (in Russian).
13. **Afnas'yev V.N., Kolmanovskiy V.B., Nosov V.R.** *Matematicheskaya teoriya konstruirovaniya sistem upravleniya.* M.: Vysshaya shkola, 1989. 447 p. (in Russian).
14. **Mitrokhin YU.S.** Ob upravlyayemosti «v malom» nelineynykh neavtonomnykh sistem differentsial'nykh uravneniy optimal'nogo regulirovaniya. *Trudy Ryazan. radiotekhn. in-ta. Ryazan,* 1976, no. 69, pp. 25-30. (in Russian).
15. **Mitrokhin YU.S., Stepanov A.N.** Kriticheskiye sluchai upravlyayemosti sistem nelineynykh differentsial'nykh uravneniy optimal'nogo regulirovaniya. *Differentsial'nyye uravneniya (Kachestvennaya teoriya): Mezhevuz. sb. nauch. tr. Ryazan': Ryaz. ped. in-t,* 1985, pp. 61-70/ (in Russian).

16. **Mitrokhin YU.S., Stepanov A.N.** *Nekotoryye kriticheskiye sluchai upravlyayemosti sistem nelineynykh differentsial'nykh uravneniy.* Trudy Ryazan. radiotekhn. in-ta. Ryazan', 1974, no. 53, pp. 62- 67. (in Russian).
17. **Terekhin M.T.** Upravlyayemost' «v malom» sistemy obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy. *Differentsial'nyye i integral'nyye uravneniya. Metody topologicheskoy dinimiki:* Mezhdvuz. sb. nauch. tr. Gor'kiy: Gor'k. un-t, 1987, pp. 48-52. (in Russian).
18. **Terekhin M.T.** Ustoychivost' upravleniya po parametru. *Izvestiya RAYEN.* Differentsial'nyye uravneniya. Ryazan': Izd-vo RGPU, 1998, no. 1, pp. 86-96. (in Russian).
19. **Terekhin M.T.** Ob ustoychivosti upravleniya po parametru. *Izvestiya vuzov. Matematika,* 2000, no. 9, pp. 38- 46. (in Russian).
20. **Terekhin M.T., Zemlyakova L.C.** Ob upravlyayemosti sistem obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy. *Differentsial'nyye uravneniya (Kachestvennaya teoriya):* Mezhdvuz. sb. nauch. tr. Ryazan': Izd-vo RGPU, 1995, pp. 141-150. (in Russian).
21. **Terekhin M.T., Zemlyakova L.C.** Metod variatsii promezhutochnoy tochki dlya issledovaniya upravlyayemosti sistemy differentsial'nykh uravneniy. *Differentsial'nyye uravneniya (Kachestvennaya teoriya):* Mezhdvuz. sb. nauch. tr. Ryazan': Izd-vo RGPU, 1994, pp. 116-124. (in Russian).
22. **Rakovshchik L.C.** Postroyeniye dopustimyykh upravleniy I. *Avtomatika i telemekhanika,* 1962, vol. 23, no. 10. (in Russian).
23. **Rakovshchik L.C.** Postroyeniye dopustimyykh upravleniy II. *Avtomatika i telemekhanika,* 1964, vj. 25, no. 1. (in Russian).
24. **Nguyen Tkhan' Bang.** Ob upravlyayemosti kvazilineynykh system. *Prikladnaya matematika i mekhanika,* 1969, vol.3, no.1. (in Russian).
25. **Zemlyakova L.C.** Ob upravlyayemosti nekotoroy sistemy differentsial'nykh uravneniy. *Differentsial'nyye uravneniya (Kachestvennaya teoriya):* Mezhdvuz. sb. nauch. tr. Ryazan': Izd-vo RGPU, 1996, pp. 63-68. (in Russian).
26. **Zemlyakova L.S.** Upravlyayemost' sistem s periodicheskoy pravoy chast'yu. *Differentsial'nyye uravneniya (Kachestvennaya teoriya):* Mezhdvuz. sb. nauch. tr. Ryazan': Izd-vo RGPU, 1997, pp. 33-35. (in Russian).
27. **Krasovskiy H.H.** O nekotorykh zadachakh upravleniya. *Algebra. Topologiya. Differentsial'nyye uravneniya i ikh prilozheniya:* Sbornik statey. K 90-letiyu so dnya rozhdeniya akademika L'va Semenovicha Pontryagina. Trudy MIAN, 224. MAIK. M.: Nauka/Interperiodika, 1999, pp. 208-217. (in Russian).
28. **Krasovskiy H.H.** Nekotoryye zadachi teorii ustoychivosti dvizheniya. M.: Fizmatgiz, 1959. 211 p. (in Russian).
29. **Al'brekht E.G.** Ob optimal'nom upravlenii dvizheniyem kvazilineynykh sistem. *Differentsial'nyye uravneniya,* 1969, vol. 5, no. 3, pp. 430-442. (in Russian).
30. **Al'brekht E.G., Sobolev O.N.** Sintez sistem upravleniya s minimal'noy energiyey. *Differentsial'nyye uravneniya,* 1995, vol. 31, no. 10, pp. 1611-1616. (in Russian).
31. **Gabasov R.F., Kirillova F.M.** *Kachestvennaya teoriya optimal'nykh protsessov.* M.: Nauka, 1971. 501 p. (in Russian).
32. **Aleshukina (Zudashkina) O.V., Mamonov S.S.** Primeneniye differentsial'nykh uravneniy k resheniyu problemy turbulentnosti dvizheniya zhidkosti. *Izvestiya RAYEN.* Differentsial'nyye uravneniya. Ryazan': Izd-vo RGPU, 2003, no. 7, pp. 59-61. (in Russian).
33. **Zudashkina O.V.** Ob usloviyakh lokal'noy upravlyayemosti nelineynykh sistem differentsial'nykh uravneniy v odnom kriticheskom sluchaye. *Izvestiya TulGU.* Seriya. Differentsial'nyye uravneniya i prikladnyye zadachi. Vyp. 1. Tula: TulGU, 2004, pp. 3-11. (in Russian).
34. **Moiseyev H.H.** Elementy teorii optimal'nykh sistem. M.: Nauka, 1975. 528 p. (in Russian).
35. **Karasev I.P.** Sushchestvovaniye oblasti dostizhimosti v nelineynykh zadachakh optimal'nogo upravleniya: *Diss. na soisk. uch. stepeni kand. fiz.-mat. nauk.* Ryazan': RRTI, 1967. (in Russian).
36. **Yerugin N.P.** O nekotorykh voprosakh ustoychivosti dvizheniya i kachestvennoy teorii differentsial'nykh uravneniy v tselom. *Prikladnaya matematika i mekhanika,* 1950, vol. 14, no. 5. (in Russian).
37. **Yerugin N.P.** Kachestvennyye metody v teorii ustoychivosti. *Prikladnaya matematika i mekhanika,* 1955, vol. 19, no. 5. (in Russian).
38. **Malkin I.G.** Ob odnoy zadache teorii ustoychivosti sistem avtomaticheskogo reguleirovaniya. *Prikladnaya matematika i mekhanika,* 1952, vol. 3, no. 16. (in Russian).
39. **Ayzerman M.A.** Ob odnoy probleme, kasayushcheysya ustoychivosti «bol'shikh» sistem // *Uspekhi mat. nauk.* 1949, vol. 4, pp. 186-188. (in Russian).

40. **Kalman R.E.** Physical and Mathematical mechanisms of instability in nonlinear automatic control systems. *Transactions of ASME*, 1957, vol. 79, no. 3, pp. 553-566.
41. **Pontryagin L.S., Boltyanskiy V.G., Gamkrelidze R.V., Mishchenko Ye.F.** *Matematiches-kaya teoriya optimal'nykh protsessov*. M.: Fizmatgiz, 1961. (in Russian).
42. **Boltyanskiy V.G.** *Matematicheskaya teoriya optimal'nogo upravleniya*. M.: Nauka, 1966. (in Russian).
43. **Bushaw D.W.** Optimal Discontinuous Forcing Terms. *Annals of Mathematics Studies*, 1958, vol.4.
44. **Karasov I.P.** O sushchestvovanii oblasti dostizhimosti. *Differentsial'nyye uravneniya*, vol. 3, no. 12, 1967. (in Russian).
45. **Karasov I.P.** Izucheniye oblasti dostizhimosti dlya sistem optimal'nogo regulirovaniya vtorogo por-yadka. *Trudy RRTI*, vol. 8, 1968, pp. 11-29. (in Russian).
46. **Karasov I.P.** Dostizhimost' «v malom» nachala koordinat dlya sistemy trekh nelineynykh differentsial'nykh uravneniy. *Trudy RRTI*, Ryazan', vol. 8, , 1968, pp. 34-42. (in Russian).
47. **Karasov I.P.** Issledovaniya dostizhimosti «v malom» nachala koordinat dlya sistem trekh nelineynykh uravneniy s pomoshch'yu vysshikh proizvodnykh. *Trudy RRTI*, vol. 28, Ryazan', 1971. (in Russian).
48. **Yeshukov L.N.** Funktsional'nyye zadachi dlya obyknovennykh uravneniy s upravleniyem. *Trudy RRTI*, vol. 20, Ryazan', 1969, pp. 10-14. (in Russian).
49. **Yeshukov L.N.** O nesimmetrichnosti optimal'nykh upravleniy. *Trudy RRTI*, vol. 28, Ryazan', 1971, pp. 29-39. (in Russian).
50. **Yeshukov L.N.** O stroenii oblasti upravlyayemosti lineynykh sistem optimal'nogo upravleniya. *Trudy RRTI*, vol. 20, Ryazan', 1969, pp. 20-29.
51. **Yeshukov L.N.** Ob odnoy zadache optimal'nogo upravleniya. *Trudy RRTI*, vol. 20, Ryazan', 1969, pp. 20-29. (in Russian).
52. **Yeshukov L.N., Karasov I.P.** O dostizhimosti «v malom» sistem optimal'nogo regulirovaniya vtorogo por-yadka. *Trudy RRTI*, vol. 8, Ryazan', 1968, pp. 1-10. (in Russian).
53. **Karasev I.P., Mitrokhin YU.S.** Ob upravlyayemosti sistem trekh nelineynykh differentsial'nykh uravneniy. *Trudy RRTI*, vol. 42, Ryazan', 1972, pp. 39-52. (in Russian).
54. **Karasev I.P., Mitrokhin YU.S.** O dostizhimosti v malom nelineynykh sistem// Vsesoyuznaya konferentsiya po kachestvennoy teorii differentsial'nykh uravneniy i izucheniyu differentsial'nykh uravneniy v pedagogicheskikh institutakh, Ryazan' 1971. (in Russian).
55. **Mitrokhin YU.S., Stepanov A.N.** Ob upravlyayemosti v malom odnoy nelineynoy sistemy. *3-ya Vsesoyuznaya konferentsiya po kachestvennoy teorii differentsial'nykh uravneniy v vysshikh uchebnykh zavedeniyakh*. Samarkand, 1973. (in Russian).
56. **Mitrokhin YU.S.** Zadachi o vstreche dvizheniy na ploskosti dlya nelineynykh system. *Trudy RRTI*, vol. 42, Ryazan', 1972, pp. 53-70. (in Russian).
57. **Mitrokhin YU.S.** Zadachi o vstreche dvizheniy na ploskosti dlya sistem, dopuskayushchikh lineari-zatsiyu. *Trudy RRTI*, vol. 42, Ryazan', 1972, pp. 71-78. (in Russian).
58. **Mitrokhin YU. S.** Ob upravlyayemosti nelineynykh sistem optimal'nogo regulirovaniya: *Diss. na soisk. uch. stepeni kand. fiz.-mat. nauk*. Ryazan': RRTI, 1974 (in Russian).
59. **Nemytskiy V.V., Stepanov V.V.** *Kachestvennaya teoriya differentsial'nykh uravneniy*. M.: Gostekhizdat, 1949. (in Russian).
60. **Rozenfel'd B.A.** *Mnogomernyye prostranstva*. M.: Nauka, 1966. (in Russian).
61. **Yefimov N.V., Rozendorn E.R.** *Lineynaya algebra i mnogomernaya geometriya*. M.: Nauka, 1970. (in Russian).
62. **Norden A.P.** *Differentsial'naya geometriya*. M.: Uchpedgiz, 1948. (in Russian).
63. **Puankare A.** *Novyye metody nebesnoy mekhaniki*, vol. 1-3. V kn.: Izbr. trudy, vol. 1-2. M.: Mir, 1965. (in Russian).
64. **Kozlov V.V.** Integriruyemost' i neintegriruyemost' v gamil'tonovoy mekhanike. *Uspekhi mat. nauk*, 1983, vol. 38, pp. 3-67. (in Russian).
65. **Klingenberk V.** *Lektsii o zamknutykh geodezicheskikh*. M.: Mir, 1982. (in Russian).
66. **Anosov D.V.** Zamknutyye geodezicheskiye. V sb.: *Kachestvennyye metody issledovaniya nelineynykh differentsial'nykh uravneniy i nelineynykh kolebaniy*. Kiyev. 1981, pp. 5-24. (in Russian).
67. **Novikov S.P.** Gamil'tonov formalizm i mnogoznachnyy analog teorii Morsa. *Uspekhi mat. nauk*, 1982, vol. 37, pp. 3-49. (in Russian).

68. **Kozlov V.V.** Variatsionnoye ischisleniye v tselom i klassicheskaya mekhanika. *Uspekhi mat. nauk*, 1985, vol. 40, pp. 33-60. (in Russian).
69. **Treshchev D.V.** Geometricheskiye metody issledovaniya periodicheskikh trayektoriy dinamicheskikh sistem: *Diss. na soiskaniye uch. step. kand. fiz.-mat. Nauk*. M.: MGU im. M. V. Lomonosova, 1987. (in Russian).
70. **Pliss V.A.** Nekotoryye problemy teorii ustoychivosti dvizheniya. L.: Izd-vo LGU, 1958. 183 p. (in Russian).
71. **Noldus E.** On the sharpness of Popov's theorem. *Internat. J.* 1970. Control 12, no. 4.
72. **Leonov G.A.** O neobkhodimosti chastotnogo usloviya absolyutnoy ustoychivosti statsionarnykh sistem v kriticheskom sluchaye pary chisto mmykh korney. *Dokl. AN SSSR*. 1970, vol. 193, no 4, pp. 756-759. (in Russian).
73. **Leonov G.A., Burkin I.M., Shepelyavyi A.I.** *Frequency methods in oscillation theory*. -Dordrecht: Kluwer, 1993.
74. **Leonov G.A., Ponomarenko D.V., Smirnova V.B.** Frequency methods for nonlinear analysis. *Theory and applications*. Singapore: World Scientific, 1996.
75. **Leonov G.A.** Effektivnyye metody poiska periodicheskikh kolebaniy v dinamicheskikh sistemakh. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2010, vol. 74, no. 1, pp. 37-73.
76. **Leonov G.A., Kuznetsov N.V., Bragin V.O.** O problemakh Ayzermana i Kalmana. *Vestnik SPbGU*. 2010, vol. 1, no. 3. (in Russian).
77. **Mironov V.V., Mitrokhin YU.S.** Novyy podkhod k issledovaniyu ustoychivosti i upravlyayemosti dinamicheskikh system. *Trudy mezhdunarodnoy konferentsii «Algebraicheskiye i analiticheskiye metody v teorii differentsial'nykh uravneniy»*. Orel, 1996, pp. 127-129. (in Russian).
78. **Mironov V.V., Mitrokhin YU.S.** Metody issledovaniya ustoychivosti i upravlyayemosti v zadachakh o dvizhenii kosmicheskikh apparatov. *Tezisy dokladov 2-y mezhdunarodnoy konferentsii «Kosmonavtika. Radioelektronika. Geoinformatika»*. Ryazan', 1998, pp. 108-109. (in Russian).
79. **Mironov V.V., Mitrohin Yu.S.** Ustoychivost' sistem avtomaticheskogo upravleniya s V rabote. *Vestnik Ryazanskoj gosudarstvennoj radiotekhnicheskoy akademii*. Ryazan', 1999, vol. 6, pp. 37-40. (in Russian).
80. **Mironov V.V., Mitrokhin YU.S.** Zadacha ob upravlyayemosti sistem optimal'nogo regulirovaniya i metody yeye resheniya. *Vestnik Ryazanskoj gosudarstvennoj radiotekhnicheskoy akademii*. Ryazan', 2000, vol. 7, pp. 22-25. (in Russian).
81. **Mironov V.V.** Yedinyy konstruktivnyy podkhod k postroyeniyu funktsiy lyapunovskogo tipa. *Izvestiya RAYEN. Differents. uravn.* 2000, no. 4, pp. 52-64. (in Russian).
82. **Mironov V.V.** Issledovaniye ustoychivosti resheniy raznostnykh uravneniy Vol'terra. *Izvestiya RAYEN. Differents. uravn.* 2001, no. 5, pp. 112-113. (in Russian).
83. **Mironov V.V., Mitrokhin YU.S.** Konstruktivnoye issledovaniye ustoychivosti resheniy raznostnykh sistem uravneniy. *Izvestiya RAYEN. Differents. uravn.* 2001, no. 5, pp. 114-115. (in Russian).
84. **Mironov V.V., Mitrokhin YU.S.** Global'naya ustoychivost' tekhnicheskikh sistem s peremennoy strukturoy. *Kosmonavtika i raketostroyeniye*. 2001, vol. 24, pp. 75-82. (in Russian).
85. **Mironov V.V., Severtsev N.A.** Metody analiza ustoychivosti sistem i upravlyayemosti dvizheniyem: Monografiya. *VTS RAN im. A. A. Dorodnitsyna*. M.: Izd-vo RUDN, 2002. 165 p. (in Russian).
86. *Matematiki zemli Ryazanskoy: mater. issledovaniya po ryazanskomu krayevedeniyu*: vol. 69: bibliografich. spravochnik. Pod obshch. red. **A. A. Kashayeva**. Ryazan', 2019. 367 p. (in Russian).
87. **Mironova K.V.** Ustoychivoye upravleniye lineynymi sistemami peremennoy struktury. *Mezhvuz. sb. nauch. tr. «Informatsionnyye tekhnologii»*. Ryazan', 2011, pp.110-114. (in Russian).
88. **Mironova K.V.** Razrabotka algoritmov perekhoda k standartnomu upravleniyu ob'yektami. *Mater. 59-y nauch.-tekhn. konf. «Vseross. festival' nauki»*. Ryazan', RGRTU, 2012, pp. 116-117. (in Russian).
89. **Mironova K.V.** Sistema proyektirovaniya kusochno-postoyannogo upravleniya malymi iskusstvennymi sputnikami Zemli. *6-ya mezhdunarodnaya nauchno-tekhnicheskaya konferentsiya «Kosmonavtika. Radioelektronika. Geoinformatika»*. Ryazan', 2013, pp. 105-107. (in Russian).
90. **Mironova K.V.** Blochnyy metod Gaussa v zadachakh proyektirovaniya lineynogo upravleniya. *6-ya mezhdunarodnaya nauchno-tekhnicheskaya konferentsiya «Kosmonavtika. Radioelektronika. Geoinformatika»*. Ryazan', 2013, pp. 107-108. (in Russian).

91. **Mironova K.V.** Chislennoye modelirovaniye upravleniya kosmicheskim nanospudnikom na osnove dvukhetapnogo OMNK. *Mezhvuz. sb. nauch. tr. «Matematicheskiye metody v nauchnykh issledovaniyakh»*. Ryazan'. 2014, RGRU, pp. 43-53. (in Russian).

92. **Mironova K.V., Koryachko V.P.** Proyektirovaniye variantov upravleniya nanospudnikom na osnove trayektornykh izmereniy. *Informatizatsiya obrazovaniya i nauki*. 2015, no. 26, pp. 75-87. (in Russian).

93. **Mironova K.V., Koryachko V.P.** Dostizhimost' tseli «v malom» dlya ploskogo upravlyayemogo dvizheniya kosmicheskogo apparata. *Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2015, no. 51, pp. 89-95. (in Russian).

94. **Mironova K.V., Rozanov A.K.** Programma «Poisk momentov pereklyucheniya upravleniya malogo kosmicheskogo apparata». M.: Ob'yedinennyy fond elektronnykh resursov «Nauka i obrazovaniye» Mino-brnauki RF. *Svidetel'stvo № 20974 ot 16.06.2015*. (in Russian).

95. **Vu K.M.** Problema nablyudayemosti «v malom» dlya neavtonomnykh lineynykh sistem i yeye prilozheniye k analizu dvizheniya malogo kosmicheskogo apparata [Tekst]. K. M. Vu. *Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2019, no. 1, pp. 73-80. (in Russian).

96. **Vu K. M.** Zadacha optimal'nogo upravleniya «v malom» i yeye realizatsiya dlya malykh kosmicheskikh sistem [Tekst]. K.M. Vu, I.P. Karasev. *Informatizatsiya obrazovaniya i nauki*. 2019, no. 42, pp. 56-64. (in Russian).

97. **Vu K.M.** Printsip dvoystvennosti «v malom» dlya lineynykh sistem i yego prilozheniye k analizu dvizheniya subspudnika v okrestnosti bazovogo kosmicheskogo apparata [Tekst]. K.M. Vu, V.V. Mironov. *Informatizatsiya obrazovaniya i nauki*. 2019. № 3 (43). (in Russian).

98. **Vu K.M.** Nablyudayemost' «v malom» malykh kosmicheskikh apparatov dlya radiotekhnicheskikh sistem [Tekst]. K.M. Vu, V.V. Mironov. *Sovremennyye tekhnologii v nauke i obrazovanii – STNO-2019: sb. tr. II mezhdunar. nauch.-tekhn. foruma: v 10 t. vol.5*. Ryazan': Ryazan. gos. radiotekhn. un-t, 2019. pp. 133-135. (in Russian).

99. **Vu K.M.** Upravlyayemost' «v malom» dlya lineynykh neavtonomnykh sistem vtorogo poryadka [Tekst]. K.M. Vu. *Mezhvuz. sb. nauch. tr. «Informatsionnyye tekhnologii»*. Ryazan', 2019, pp. 55-57. (in Russian).

100. **Vu K.M.** Svyaz' prednachal'nykh i nachal'nykh usloviy v zadachakh upravleniya [Tekst]. K.M. Vu. *Mezhvuz. sb. nauch. tr. «Informatsionnyye tekhnologii»*. Ryazan', 2019, pp. 57-60. (in Russian).

101. **Vu K.M., Mironov V.V.** Programmnyy kompleks po upravleniyu i nablyudeniyu «v malom» malykh kosmicheskikh apparatov dlya ploskogo avtonomnogo sluchaya. K.M. Vu, V.V. Mironov. M.: *Rospatent. Svidetel'stvo no. 20196153212 ot 12.04.2019*. (in Russian).