УДК 681.515:004.942

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ЦИФРОВОГО ПИД-РЕГУЛЯТОРА НА ОСНОВЕ АНАЛИТИКО-ГРАФИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

С. В. Скворцов, д.т.н., профессор РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0001-9495-4953, e-mail: s.v.skvor@gmail.com
В. И. Хрюкин, к.т.н., доцент РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0002-7736-115X, e-mail: vi_x@mail.ru
Т. С. Скворцова, к.т.н., доцент Академии ФСИН России, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0001-7504-5973, e-mail: t.s.skvortsova@yandex.ru

Рассмотрена задача определения числовых значений параметров алгоритма функционирования цифрового микроконтроллера, реализующего пропорционально-интегрально-дифференциальный закон управления. ***Целью работы*** *является получение расчетных формул и методики параметрического синтеза алгоритма управления, обеспечивающего выполнение заданных требований по точности, быстродействию и качеству процесса регулирования. Для решения данной задачи дополнительно к аналитическому описанию системы управления используется графический метод построения желаемой логарифмической амплитудно-частотной характеристики. Используемая аналитико-графическая модель адаптирована к особенностям дискретного представления сигналов и функционирования элементов цифровой системы управления. В экспериментальной части работы показан пример расчета параметров алгоритма управления цифрового микроконтроллера.*

Ключевые слова*: пропорционально-интегрально-дифференциальный закон управления, цифровой микроконтроллер, алгоритм управления, параметры ПИД-регулятора, аналитико-графическая модель системы управления.*

DOI*:* 10.21667/1995-4565-2025-91-220-232

Введение

В статье [1] рассмотрена задача нахождения числовых характеристик пропорционально-интегрально-дифференциального регулятора (ПИД-регулятора), для реализации функций которого в настоящее время используются цифровые микроконтроллеры [2]. Эффективная работа таких систем достигается выбором коэффициентов K_P, K_I, K_D при пропорциональной, интегральной и дифференциальной составляющих в законе управления.

Для получения значений указанных коэффициентов, обеспечивающих выполнение заданных требований по точности, быстродействию и качеству процесса регулирования, в работе [1] применяется аналитико-графическая модель, которая сочетает аналитическое описание на основе исходной частотной характеристики объекта и графическое представление требуемой частотной характеристики системы в целом.

В данной статье рассматриваются вопросы практического применения аналитико-графической модели [1] для определения числовых значений параметров алгоритма функционирования цифрового микроконтроллера, реализующего функции ПИД-регулятора.

Целью работы являются получение расчетных формул и разработка методики нахождения параметров алгоритма управления, обеспечивающего выполнение требований по точности, быстродействию и качеству процесса регулирования, на основе аналитико-графической модели, которая адаптирована к особенностям дискретного представления сигналов и функционирования элементов цифровой системы управления.

Теоретическая часть

Пусть функционирование рассматриваемой системы управления [1] задается уравнениями

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\,\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t)\,;\; y(t) = \mathbf{C}\,\boldsymbol{x}(t), \tag{1}$$

где $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$ – координаты, определяющие текущее состояние объекта управления;

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}$ – матрица, описывающая объект управления;

$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{n-1} \\ \vdots \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}$ – матрица входа; $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$ – матрица выхода; $u(t)$ – сигнал управления; $y(t)$ – выходная величина.

В цифровых системах сигнал управления формируется микроконтроллером с периодом дискретизации T в моменты времени $t = kT\ (k = 0, 1, 2, \dots)$, т.е. при $u(k) = u(t)\big|_{t=kT}$. Тогда модель, представленная в переменных состояния [4], записывается как

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}'\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}'u(k)\,; \tag{2}$$

$$y(k) = \mathbf{C}\,\mathbf{x}(k), \tag{3}$$

где $\mathbf{x}(k) = \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \vdots \\ x_n(k) \end{bmatrix}$ – координаты, определяющие состояние объекта в дискретные моменты времени $t = kT\ (k = 0, 1, 2, \dots)$; $x_i(k) = x(t)\big|_{t=kT}$; $i = 1, n$; $y(k) = y(t)\big|_{t=kT}$ – выходная величина в дискретные моменты времени;

$$\mathbf{A}' = \mathrm{e}^{\mathbf{A}T}\,; \mathbf{B}' = \left[\int_0^T \mathrm{e}^{\mathbf{A}\tau} d\tau\right]\mathbf{B}\,.$$

Если $g(t)$ – функция, задающая характер изменения выходной величины, то при реализации пропорционально-интегрально-дифференциального закона управления

$$u(k) = K_P e(k) + K_I\left[u(k-1) + Te(k)\right] + \frac{K_D\left[e(k) - e(k-1)\right]}{T} \tag{4}$$

цель параметрического синтеза заключается в нахождении K_P, K_I, K_D, таких, что для всех значений $t = kT$ выполняется условие $y(t) \approx g(t)$. В соотношении (4) величина $e(k) = e(t)\big|_{t=kT}$ – входной сигнал регулятора (сигнал ошибки).

Параметры цифрового устройства управления, реализуемого на базе микроконтроллера, должны удовлетворять требованиям по точности, быстродействию и качеству процесса регулирования соответственно:

– ошибка в установившемся режиме не больше $e_{\max}$;

– запас устойчивости по фазе не менее φ_m;

– время переходного процесса не более $t_п$.

Когда период дискретизации или квантования Т, являющийся также шагом численного дифференцирования и интегрирования, выбран достаточно малым, такие операции будут выполняться с высокой точностью [3]. В этом случае можно использовать метод проектирования [1], предназначенный для непрерывных систем вида (1). Тогда параметры цифрового устройства управления будут определяться следующим образом.

Коэффициент пропорциональности вычисляется по формуле

$$K_P = \frac{\cos\theta}{\left|W_н(j\omega_c)\right|}, \tag{5}$$

где $\theta = -180^0 + \varphi_m - \arg W_н(j\omega_c)$ – фазовый сдвиг; $W_н(j\omega_c)$ – значение частотной передаточной функций (ПФ) объекта на частоте среза ω_c. Такая ПФ определяется путем преобразования Лапласа уравнений (1) при нулевых начальных условиях

$$W_н(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + b_{n-2}s^{n-2} + \ldots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0} \tag{6}$$

и подстановкой значения $s = j\omega_c$, где ω_c – частота, на которой определяется запас устойчивости по фазе φ_m.

Коэффициент при интегральной составляющей вычисляется как

$$K_I = K_P\,\omega_0, \tag{7}$$

где ω_0 – частота, определяемая графически по виду ЛАЧХ системы с объектом и ПИ-регулятором, который обеспечивает заданную точность [1].

Коэффициент при дифференциальной составляющей рассчитывается по формуле

$$K_D = \frac{K_I}{\omega_c^2} + \frac{\sin\theta}{\omega_c\left|W_н(j\omega_c)\right|}. \tag{8}$$

При исследовании дискретных автоматических систем (ДАС), к которым относятся и цифровые системы управления, весьма полная аналогия с непрерывными системами возникает, когда период дискретизации T мал по сравнению с основными постоянными времени непрерывной части системы или частота квантования значительно больше частоты входных сигналов.

Если же указанные ограничения не выполняются, то при анализе и расчете параметров ДАС необходимо учитывать эффект квантования сигналов по времени и цифровую обработку сигналов. Это означает, что следует учитывать наличие в ДАС элементов цифрового регулятора, таких как импульсный элемент (ИЭ), дискретный фильтр (ДФ) и экстраполятор. В этом случае динамика ДАС описывается выражениями (2), (3), а все величины, характеризующие ее состояние, следует рассматривать в дискретные моменты времени $t = kT\ (k = 0, 1, 2, \ldots)$, что требует определения ПФ указанных элементов.

Предлагаемое решение

Получим необходимые ПФ, включая дискретные ПФ объекта и цифрового ПИД-регулятора, которые описываются уравнениями (2) – (4). Для этого воспользуемся дискретным преобразованием Лапласа (z-преобразованием) [4].

Импульсный элемент. Будем рассматривать ИЭ, реализующий амплитудно-импульсную модуляцию первого рода. В этом случае форма выходных импульсов $e(t)$ может быть разнообразной: прямоугольной, треугольной, экспоненциальной, синусоидальной и т.д. Обозначим через $w_ф(t)$ функцию, характеризующую форму выходных импульсов ИЭ (функция формы). Амплитуда таких сигналов соответствует значениям входного сигнала $x(t)$ в моменты времени $t = kT$.

Для удобства описания ДАС реальный импульсный элемент может быть заменен эквивалентной ему схемой из последовательного соединения идеального импульсного элемента (ИИЭ) и формирующего звена (ФЗ) [5]. Тогда структурную схему ИЭ можно представить в виде эквивалентного соединения, изображенного на рисунке 1.

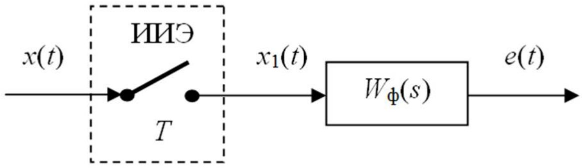

Рисунок 1 – Структурная схема импульсного элемента
Figure 1 - Block diagram of pulse element

Здесь $x_1(t)$ – выходная величина ИИЭ; $W_ф(s)$ – передаточная функция формирующего звена.

В работе [5] определена зависимость передаточной функции формирующего звена $W_ф(s)$ от функции формы $w_ф(t)$. ИИЭ представляет собой звено, которое преобразует входную функцию $x(t)$ в обобщенную решетчатую функцию

$$x_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t)\delta(t-kT), \tag{9}$$

где $\delta(t - kT)$ – значения единичной импульсной функции (δ-функции), задержанные на kT моменты времени ($k = 0, 1, 2, \ldots$).

В случае амплитудно-импульсной модуляции значение выходного сигнала $e(t)$ будет получаться как произведение входного сигнала $x(t)$ в моменты $t = kT$ и амплитуды сигнала, определяемого функцией $w_ф(t)$. В результате получим:

$$e(t) = \sum_{k=0}^{l} x[kT]w_ф(t-kT), \tag{10}$$

где l – целая часть дроби t / kT. Но так как при $t < kT$

$$w_ф(t-kT) = 0, \tag{11}$$

равенство (10) можно записать в виде

$$e(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x[kT]w_ф(t-kT) \tag{12}$$

В [5] предполагается, что $w_ф(t)$ является функцией веса формирующего звена. Тогда на его выходе согласно интегралу Дюамеля – Карсона сигнал будет определяться как

$$e_1(t) = \int_0^{\infty} w_ф(t-\tau)x_1(\tau)d\tau$$

или с учетом (9)

$$e_1(t) = \int_0^{\infty} w_ф(t-\tau)\sum_{k=0}^{\infty} x(t)\delta(t-kT).$$

Поменяв порядок интегрирования и суммирования, произведем интегрирование. В результате в соответствии с [5] будем иметь:

$$e_1(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x[kT]w_ф(t-kT). \tag{13}$$

В формулах (12) и (13) правые части выражений равны, следовательно, $e_1(t) = e(t)$. Это подтверждает справедливость предположения, что функция $w_ф(t)$ является функцией веса. Тогда передаточную функцию формирующего звена можно определить как преобразование Лапласа по формуле:

$$W_{ф}(s)=\int_0^\infty w_{ф}(t)e^{-st}dt \qquad (14)$$

или в символическом виде:

$$W_{ф}(s)=L[w_{ф}(t)],$$

где L – символ преобразования Лапласа.

Из выражений (12) и (13) видно, что их равенство, а следовательно предположение, что функция $w_ф(t)$ является функцией веса, будет справедливо только при условии, что $t \to \infty$. Покажем, что функция формы тождественна функции веса при любых значениях t. Для этого выразим через функцию формы $w_ф(t)$ выходную величину ИЭ $e(t)$ в моменты времени $kT \le t < (k+1)T$, где $k = 0, 1, 2, \dots$. В этом случае ее можно представить в виде

$$e(t)=x[kT]w_{ф}(t-kT). \qquad (15)$$

В работе [5] показано, что для идеального импульсного элемента функция формы представляет собой δ-функцию, т.е.

$$w_{ф}(t)=\delta(t).$$

Тогда можно записать, что выходная величина ИИЭ $x_1(t)$ для моментов времени $kT \le t < (k+1)T$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, будет иметь вид

$$x_1(t)=x[kT]\delta(t-kT). \qquad (16)$$

В этом случае для эквивалентного соединения (рисунок 1) на вход формирующего звена с передаточной функцией $W_ф(s)$ поступают последовательности модулированных δ-функций вида (16), а на выходе будет сигнал $e(t)$, описываемый выражением (15).

Найдем соотношение, связывающее функцию формы $w_ф(t)$ с передаточной функцией $W_ф(s)$. По определению передаточная функция есть отношение изображений выходной и входной величин. Для формирующего звена она будет выглядеть следующим образом:

$$W_{ф}(s)=\frac{E(s)}{X_1(s)}, \qquad (17)$$

где $E(s) = L[e(t)]$ и $X_1(s) = L[x_1(t)]$ – изображения по Лапласу выходной и входной величин рассматриваемого звена соответственно.

С другой стороны, передаточная функция в общем виде определяется выражением

$$W_{ф}(s)=\frac{b(s)}{c(s)}, \qquad (18)$$

в котором $b(s)$ и $c(s)$ – некоторые выражения от комплексной переменной s. Решая совместно уравнения (17) и (18), получаем:

$$c(s)L\{e(t)\}=b(s)L\{x_1(t)\}.$$

Подставляя в последнее выражение формулы (15) и (16), будем иметь:

$$c(s)L\{x[kT]w_{ф}(t-kT)\}=b(s)L\{x[kT]\delta(t-kT)\}.$$

Для моментов времени $kT \le t < (k+1)T$, где $k = 0, 1, 2, \dots$, амплитуда $x[kT]$ является фиксированной величиной. Тогда в соответствии со свойством линейности [4] получим:

$$c(s)x[kT]L\{w_{ф}(t-kT)\}=b(s)x[kT]L\{\delta(t-kT)\}.$$

Сокращая подобные члены и используя теорему о запаздывании аргумента [5], будем иметь:

$$c(s)e^{-kTs}L\{w_{ф}(t)\}=b(s)e^{-kTs}L\{\delta(t)\}.$$

С учетом того, что изображение δ-функции в соответствии с [4] равно единице, получим:

$$c(s)L\{w_{ф}(t)\}=b(s).$$

Отсюда на основании формулы (18) итоговое выражение будет иметь вид

$$W_{ф}(s)=L\{w_{ф}(t)\},$$

т.е. передаточная функция формирующего элемента есть прямое преобразование Лапласа от функции формы $w_ф(t)$, что соответствует уравнению (14).

Экстраполятор. Для цифровой автоматической системы экстраполятор представляет собой звено, фиксирующего на время T значения модулированной импульсной функции (экстраполятор нулевого порядка). В этом случае функция формы экстраполятора будет иметь вид

$$w_{\text{ф}}(t) = 1(t) - 1(t - T_0),$$

где $1(t)$ – единичная ступенчатая функция.

Используя свойство линейности и теорему о запаздывании аргумента [4], получаем ПФ экстраполятора нулевого порядка:

$$W_{\text{ф}}(s) = W_0(s) = L\{1(t)\} - L\{1(t - T_0)\}$$

вида:

$$W_0(s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-T_0 s}}{s} = \frac{1 - e^{-T_0 s}}{s}.$$

Дискретный фильтр. В рассматриваемой системе функцию ДФ выполняет ПИД-регулятор, реализующий закон управления (4). Используя дискретное преобразование Лапласа (z-преобразование) в соответствии с [4] получаем:

$$U(z) = \left[K_P + \frac{K_I}{z-1} + \frac{K_D(z-1)}{Tz}\right]E(z),$$

где $z = e^{-Ts}$.

Отсюда дискретная ПФ ДФ будет иметь вид:

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \left[K_P + \frac{K_I}{z-1} + \frac{K_D(z-1)}{Tz}\right].$$

В результате структурная схема разомкнутой цифровой системы может быть представлена как последовательное соединение двух импульсных звеньев (рисунок 2).

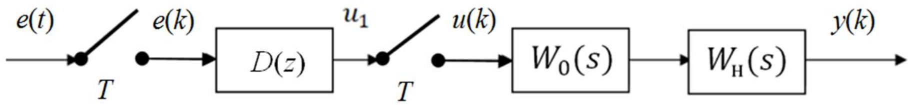

Рисунок 2 – Структурная схема системы управления на базе цифрового микроконтроллера
Figure 2 – Block diagram of a control system based on digital microcontroller

Отсюда видно, что дискретная ПФ такой системы представляется как

$$W(z) = D(z)W_{\text{п}}(z). \tag{19}$$

Здесь $W_{\text{п}}(z)$ – приведенная дискретная передаточная функция экстраполятора и объекта управления, описываемого уравнениями (2), (3), которая имеет вид

$$W_{\text{п}}(z) = Z\left[W_0(s)\,W_{\text{н}}(s)\right] = \frac{(z-1)}{z} Z\left[\frac{W_{\text{н}}(s)}{s}\right], \tag{20}$$

где Z – символ прямого z-преобразования.

Полученные ПФ позволяют построить аналитико-графическую модель цифровой автоматической системы. Используя эту модель, по заданным требованиям к качеству системы ($e_{\max}$, φ_m, $t_{\text{п}}$) и характеру внешних воздействий, описываемых предельными значениями задающего воздействия g_m и ее производных $g_m^{(i)}, i = 1, 2, ..., n$, можно определить параметры цифрового ПИД-регулятора.

Аналитическая модель строится по дискретной частотной ПФ $W_{\text{п}}(j\lambda)$, где λ – абсолютная псевдочастота, которая связана с частотой ω следующим соотношением

$$\lambda = \frac{2}{T}\text{tg}\frac{\omega T}{2}. \tag{21}$$

Такая ПФ получается переходом в выражении (20) к w-преобразованию $W_п(w)$ подстановкой $z = \dfrac{1+w}{1-w}$. Затем подстановкой $w = j\dfrac{T}{2}\lambda$ можно найти искомую ПФ $W_п(j\lambda)$.

Определив псевдочастоту среза $\lambda_с$, которая для частот $\lambda << 2/T$ в соответствии с [1] вычисляется как

$$\lambda_с \approx \omega_с = \frac{8}{t_п \operatorname{tg}\varphi_m}, \tag{22}$$

по выражениям, аналогичным (5) и (8) получим уравнения для расчета параметров цифрового ПИД-регулятора:

$$K_P = \frac{\cos\theta}{\left|W_п(j\lambda_с)\right|}; \tag{23}$$

$$K_D = \frac{K_I}{\lambda_с^2} + \frac{\sin\theta}{\lambda_с\left|W_п(j\lambda_с)\right|}, \tag{24}$$

где $\theta = -180^0 + \varphi_m - \arg W_п(j\lambda_с)$.

Графическая модель цифровой системы строится на основе желаемой ЛАЧХ $L_ж(\lambda)$. Такая частотная характеристика в низкочастотной области должна соответствовать ЛАЧХ цифровой системы с цифровым ПИ-регулятором, ПФ которой имеет вид:

$$W^*(z) = \left(K_P + \frac{K_I}{z-1}\right)W_п(z).$$

Расположение $L_ж(\lambda)$ должно быть таким, чтобы эта характеристика не заходила в запретную область для ЛАЧХ. Границы такой области состоят из отрезков прямых с наклонами 0, -20, -40, …, -20n дБ/дек. Причем участок частот с наклоном -20i дБ/дек соответствует интервалу псевдочастот [6]:

$$\frac{g_m^{(i)}}{g_m^{(i-1)}} \le \lambda \le \frac{g_m^{(i+1)}}{g_m^{(i)}}.$$

Построение такой области для произвольного входного сигнала с предельными значениями координат g_m и $g_m^{(i)}, i = 1, 2, ..., n$, показано на рисунке 3.

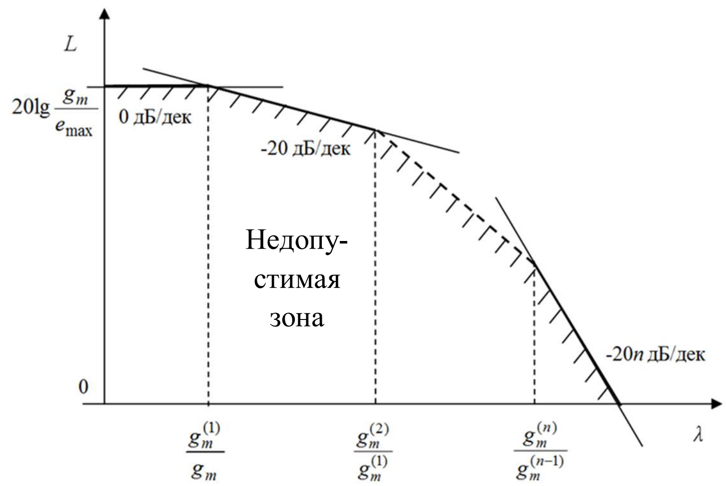

Рисунок 3 – Недопустимая зона для частотной характеристики системы
Figure 3 – Unacceptable zone for system frequency response

Для рассматриваемой системы значение K_I можно найти по формуле, подобной (6):

$$K_I = K_P\,\lambda_0, \tag{25}$$

где λ_0 – псевдочастота, на которой ЛАЧХ цифровой системы с цифровым пропорциональным регулятором (П-регулятором)

$$L(\lambda) = 20\lg\left|K_P W_{\text{п}}(j\lambda)\right| \tag{26}$$

пересекает запретную область. Вычислив величину K_I и подставив ее в формулу (24), получим искомое значение K_D.

Экспериментальные исследования

Покажем пример определения параметров цифрового ПИД-регулятора системы, для которой в соответствии с (1) объект управления описывается как

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{bmatrix}u, \tag{27}$$

где коэффициенты имеют следующие значения: $a_0 = 0$; $a_1 = 2$; $a_2 = 3$; $b_0 = 4$.

Пусть сигнал управления таким объектом формируется цифровым регулятором с законом управления (4) в дискретные моменты времени $t = kT\ (k = 0, 1, 2, ...)$, кратные периоду дискретизации $T = 0,1$ с. Тогда соответствующие разностные уравнения (2), (3) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0,7408 & -24,64 & 2,724 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 0,00062 \\ 0,00229 \\ 0,00053 \end{bmatrix}u(k); \\ y(k) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}(k). \end{aligned}\right\}. \tag{28}$$

Для таких разностных уравнений дискретная ПФ объекта с экстраполятором (рисунок 2) будет следующей:

$$W_{\text{п}}(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0,00062z^2 + 0,00229z + 0,00053}{z^3 - 2,724z^2 + 2,464z - 0,7408},$$

где $Y(z) = Z[y(k)], U(z) = Z[u(k)]$ – изображения соответствующих дискретных сигналов.

Определим устойчивость рассматриваемой системы, в которой цифровой регулятор используется только для определения ошибки управления, т.е. $u(k) = e(k)$. В соответствии с работой [4] запас устойчивости по фазе составляет 8°, а запас устойчивости по амплитуде равен 2,3 дБ. Это означает, что исходная система с таким регулятором является устойчивой, но не качественной [5]. Поэтому используемый регулятор дополнительно к вычислению сигнала ошибки должен выполнять алгоритм пропорционально-интегрально-дифферен-циального управления. Отсюда возникает задача определения параметров K_P, K_I, K_D, обеспечивающих выполнение требований по точности, быстродействию и качеству процесса регулирования: $e_{\max} = 1$; $\varphi_m \geq 50°$; $t_{\text{п}} \leq 4$ с. При этом характеристики входного сигнала не должны превышать следующих значений: $g_m = 1000$, $g_m^{(1)} = 2,2$ с$^{-1}$, $g_m^{(2)} = 0,03$ с$^{-2}$.

Используя методику [1], далее получаем значения коэффициентов K_P, K_I, K_D.

1. По формуле (22) определим псевдочастоту частоту $\lambda_с$, на которой обеспечивается запас по фазе

$$\lambda_{\text{с}} \approx \frac{8}{t_{\text{п}}\,\text{tg}\varphi_m} = \frac{8}{2\,\text{tg}\,50^{\circ}} = 1,68\,\text{с}^{-1}.$$

2. Рассчитаем коэффициент K_P.

2.1. Определим значение дискретной частотной ПФ на частоте среза:

$$W_{\text{п}}(j\lambda_{\text{с}}) = W_{\text{п}}(j1,68) = 0,45e^{-j189,9}.$$

2.2. Вычислим значение угла θ:

$$\theta = -180^0 + \varphi_m - \arg W_\text{п}(j\lambda_\text{c}) = -180^\circ + 50^\circ + 189{,}9^\circ = 59{,}9^\circ.$$

2.3. По формуле (23) окончательно получаем:

$$K_P = \frac{\cos\theta}{|W_\text{п}(j\lambda_\text{c})|} = \frac{\cos 59{,}9^\circ}{0{,}454} = 1{,}1.$$

3. Найдем коэффициент K_I.

3.1. Определим запретную область для желаемой ЛАЧХ синтезируемой цифровой системы управления. Для этого произведем построения, аналогичные показанным на рисунке 3.

Сначала получим координаты контрольных точек A_1, A_2 в соответствии с [6] по формулам:

$$A_1\left(\frac{g_m^{(1)}}{g_m}; 20\lg\frac{g_m}{e_\text{max}}\right); \quad A_2\left(\frac{g_m^{(2)}}{g_m^{(1)}}; 20\lg\frac{\left[g_m^{(1)}\right]^2}{g_m^{(2)}e_\text{max}}\right). \qquad (29)$$

После подстановки исходных данных в эти формулы значения координат будут следующие:

A_1(0,003 с$^{-1}$; 60 дБ); A_2 (0,014 с$^{-1}$; 45 дБ).

Затем проведем через эти точки три прямые (рисунок 4). Прямая 1 имеет наклон 0 дБ/дек, прямая 2 – наклон -20 дБ/дек и прямая 3 – наклон -40 дБ/дек. Это позволит сформировать недопустимую зону для желаемой ЛАЧХ.

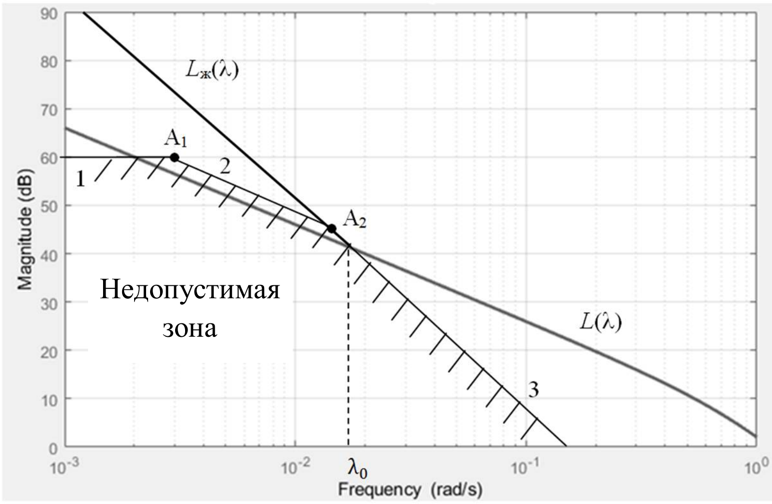

Рисунок 4 – Формирование недопустимой зоны для ЛАЧХ в области низких частот
Figure 4 – Formation of unacceptable zone for logarithmic amplitude-frequency response in low frequency range

3.2. По формуле (26) определим ЛАЧХ $L(\lambda)$ для случая, когда применяется цифровой пропорциональный регулятор. Далее найдем псевдочастоту λ_0, где $L(\lambda)$ пересекает недопустимую зону (рисунок 4). В соответствии с этим рисунком $\lambda_0 \approx 0{,}16$ с$^{-1}$.

3.3. По формуле (25) найдем:

$$K_I = K_P\,\lambda_0 = 1{,}1 \cdot 0{,}016 = 0{,}0176.$$

4. По формуле (24) вычислим:

$$K_D = \frac{K_I}{\lambda_c^2} + \frac{\sin\theta}{\lambda_c|W_\text{п}(j\lambda_c)|} = \frac{0{,}0176}{1{,}68^2} + \frac{\sin 59{,}9}{1{,}68\cdot 0{,}454} = 1{,}148.$$

Полученные результаты проверим посредством моделирования в среде Matlab/Simulink. Подставив значения коэффициентов K_P, K_I, K_D в (4), получим следующее разностное уравнение $u(k) = 12{,}58e(k) - 11{,}48e(k-1) + 0{,}0176u(k-1)$, в соответствии с которым ПФ цифрового регулятора принимает следующий вид:

$$D(z) = \frac{U(z)}{E(z)} = \frac{12{,}58z - 11{,}48}{z - 0{,}0176}.$$

Модель такой системы оценки для определения ее временных характеристик показана на рисунке 5.

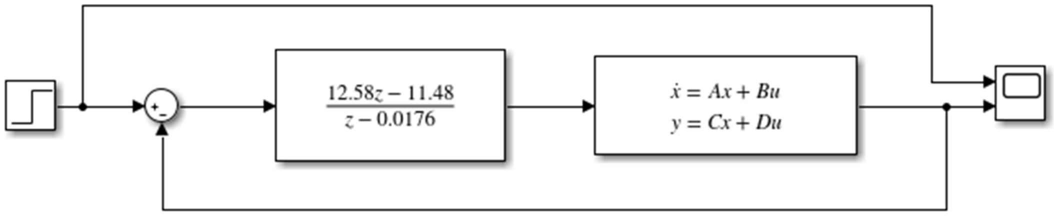

Рисунок 5 – Блок-схема системы с цифровым регулятором для определения ее временных характеристик
Figure 5 – Block diagram of a system with digital controller for determining its time characteristics

Выходной сигнал системы при ступенчатом задающем воздействии показан на рисунке 6. Выделенная область показывает, что на уровне 3 % от задающего воздействия $t_п \approx 3,7$ с, что не превышает заданного предельного значения 4 с. Запас устойчивости системы, составляющий около 28 %, также удовлетворяет заданным требованиям (10…30 %) и примерно соответствует запасу устойчивости по фазе $\varphi_m = 50°$ [7].

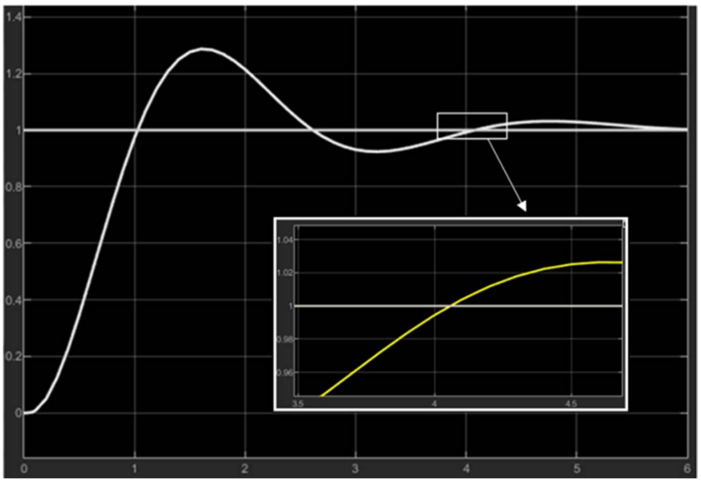

Рисунок 6 – Выходной сигнал системы при ступенчатом задающем воздействии
Figure 6 – Output signal of the system with stepwise control action

Чтобы оценить точность работы системы при произвольных входных воздействиях, необходимо определить такое эквивалентное гармоническое воздействие $g(t) = g_{\max} \sin \omega_g t$, которое соответствует предельным значениям скорости $g_m^{(1)} = 2{,}2$ с$^{-1}$ и ускорения $g_m^{(2)} = 0{,}03$ с$^{-2}$. Значения ω_g и $g_{\max}$ можно найти из (29):

$$\omega_g = \frac{g_m^{(1)}}{g_m} = 0{,}014; \quad g_{\max} = 20\lg \frac{\left[g_m^{(1)}\right]^2}{g_m^{(2)} e_{\max}} = 160.$$

Блок-схема системы с цифровым регулятором для определения точности при гармоническом воздействии показана на рисунке 7.

Сигнал ошибки регулирования при синусоидальном задающем воздействии в установившемся режиме также изменяется по гармоническому закону и не превышает значения $e_{\max} = 1$ (рисунок 8).

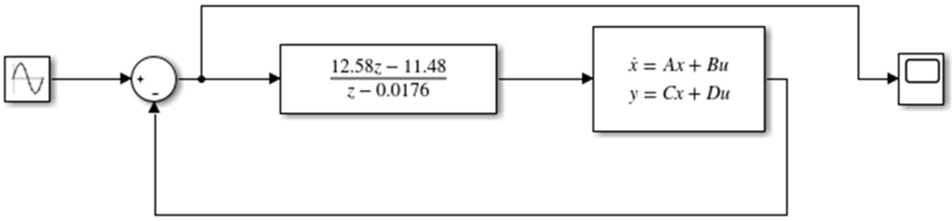

Рисунок 7 – Блок-схема системы с цифровым регулятором для определения ее точности при гармоническом воздействии
Figure 7 – Block diagram of a system with digital controller for determining its accuracy under harmonic influence

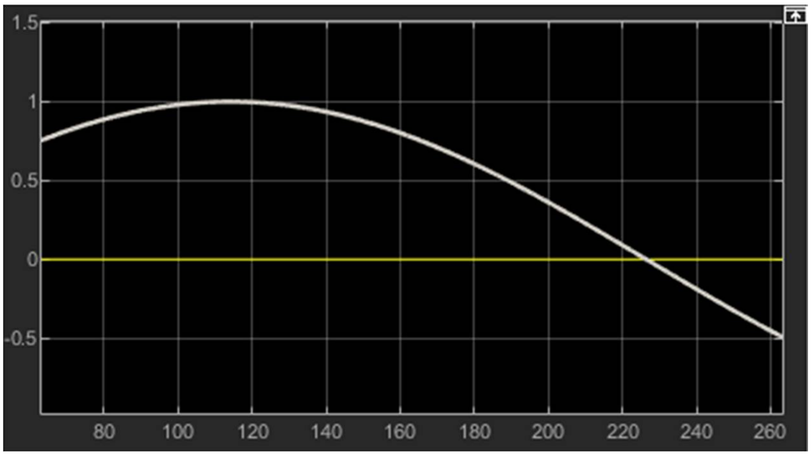

Рисунок 8 – Сигнал ошибки регулирования при синусоидальном задающем воздействии
Figure 8 – Control error signal with sinusoidal driving action

Заключение

Получены расчетные формулы, и на примере показана методика их использования для определения параметров ПИД-регулятора, реализуемого на базе цифрового микроконтроллера. В основе методики лежит аналитико-графическая модель системы управления [1], адаптированная к особенностям дискретного представления сигналов и дополнительно учитывающая наличие элементов цифрового регулятора (импульсный элемент, дискретный фильтр, экстраполятор). Для перечисленных элементов получены ПФ, описывающие их функционирование в дискретные моменты времени. Моделирование средствами системы MatLab/Simulink подтверждает возможность применения предложенной методики для расчета параметров. Возможным направлением развития полученных результатов представляется разработка средств автоматизации проектирования алгоритмов пропорционально-интегрально-дифференциального управления, реализуемых на базе цифровых микроконтроллеров, с использованием полученных результатов в рамках перспективного функционально ориентированного подхода к разработке сложных технических систем [8, 9] и многосвязных объектов [10].

Библиографический список

1. **Скворцов С.В., Хрюкин В.И., Скворцова Т.С.** Аналитико-графическое моделирование систем управления на основе ПИД-регуляторов // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2024. № 87. С. 78-88.

2. **Денисенко В.** ПИД-регуляторы: вопросы реализации // Современные технологии автоматизации. 2008. № 1. С. 86-99.

3. **Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В.** Вычислительные методы. М.: Лань, 2023. 672 с.

4. **Филлипс Ч., Харбор Р.** Системы управления с обратной связью. М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. 616 с.

5. **Ким Д.П.** Теория автоматического управления. Линейные системы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2016. 312 с.

6. Микропроцессорные системы автоматического управления / под ред. **В.А. Бесекерского.** Л.: Машиностроение, 1988. 365 с.

7. **Бесекерский В.А., Попов Е.П.** Теория систем автоматического управления. М.: Наука, 2003. 567 с.

8. **Бочаров В.А., Волосатова Т.М., Филиппов М.В., Чичаева Л.В., Продан С.А.** Декомпозиция и агрегация функциональных моделей систем // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2024. № 89. С. 85-93.

9. **Бочаров В.А.** Принципы и методы функционально-ролевого моделирования // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2024. № 90. С. 91-100.

10. **Бобиков А.И., Корниенко М.Д.** Оптимальное нестационарное управление многосвязными объектами // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2023. № 84. С. 176-186.

UDC 681.515:004.942

PARAMETRIC SYNTHESIS OF A DIGITAL PID CONTROLLER BASED ON ANALYTICAL AND GRAPHICAL MODEL OF CONTROL SYSTEM

S. V. Skvortsov, Dr. Sc. (Tech.), full professor, RSREU, Ryazan, Russia;
orcid.org/0000-0001-9495-4953, e-mail: s.v.skvor@gmail.com
V. I. Khryukin, Ph.D. (Tech.), associate professor, RSREU, Ryazan, Russia;
orcid.org/0000-0002-7736-115X, e-mail: vi_x@mail.ru
T. S. Skvortsova, Ph.D. (Tech.), associate professor, Academy of the FPS of Russia, Ryazan, Russia;
orcid.org/0000-0001-7504-5973, e-mail: t.s.skvortsova@yandex.ru

The problem of determining parameters numerical values of the algorithm for the functioning of digital microcontroller implementing proportional-integral-differential control law is considered. ***The aim of the work*** *is to obtain calculation formulas and methods for parametric synthesis of a control algorithm that ensures the fulfillment of specified requirements for accuracy, speed and quality of control process. To solve this problem, in addition to analytical description of control system, a graphical method is used to construct the desired logarithmic amplitude-frequency response. The analytical and graphical model used is adapted to the features of discrete representation of signals and the functioning of digital control system elements. The experimental part of the work shows an example of calculating the parameters of digital microcontroller control algorithm.*

Keywords: *proportional-integral-differential law of control, parametric synthesis, digital microcontroller, control algorithm, parameters of PID controller, analytical and graphical model of control system.*

DOI*:* 10.21667/1995-4565-2025-91-220-232

References

1. **Skvortsov S.V., Khryukin V.I., Skvortsova T.S.** Analitiko-graficheskoe modelirovanie sistem upravlenija na osnove PID-reguljatorov. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radiotehnicheskogo universiteta.* 2024, no. 87, pp. 78-88 (in Russian).

2. **Denisenko V.** PID-reguljatory: voprosy realizacii. *Sovremennye tehnologii avtomatizacii*. 2008, no. 1, pp. 86-99 (in Russian).

3. **Amosov A.A., Dubinskij Ju.A., Kopchenova N.V.** *Vychislitel'nye metody.* (Computational methods), Moscow, Lan', 2023, 672 p. (in Russian).

4. **Fillips Ch., Harbor R.** *Sistemy upravlenija s obratnoj svjaz'ju*. (Feedback Control Systems), Moscow, Laboratorija bazovyh znanij, 2001, 616 p. (in Russian).

5. **Kim D.P.** *Teorija avtomaticheskogo upravlenija. Linejnye sistemy.* (Theory of automatic control. Linear systems), Moscow, FIZMATLIT, 2016, 312 p. (in Russian).

6. *Mikroprocessornye sistemy avtomaticheskogo upravlenija* (Microprocessor-based automatic control systems), ed. by **V.A. Besekerskij.** Leningrad, Mashinostroenie, 1988, 365 p. (in Russian).

7. **Besekerskij V.A., Popov E.P.** *Teorija sistem avtomaticheskogo upravlenija*. (Theory of Automatic Control Systems), Moscow, Nauka, 2003, 567 p. (in Russian).

8. **Bocharov V.A., Volosatova T.M., Filippov M.V., Chichaeva L.V., Prodan S.A.** Dekompozicija i agregacija funkcional'nyh modelej system. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radiotehnicheskogo universiteta.* 2024, no. 89, pp. 85-93 (in Russian).

9. **Bocharov V.A.** Principy i metody funkcional'no-rolevogo modelirovanija. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radiotehnicheskogo universiteta.* 2024, no. 90, pp. 91-100. (in Russian).

10. **Bobikov A.I., Kornienko M.D.** Optimal'noe nestacionarnoe upravlenie mnogosvjaznymi ob#ektami. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radiotehnicheskogo universiteta.* 2023, no. 84, pp. 176-186. (in Russian).