

УДК 004.925.86

О ПРИВЕДЕННЫХ ПОГРЕШНОСТЯХ ИНТЕРПОЛЯЦИИ НЕАНАЛИТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Ю. Н. Косников, д.т.н., профессор, профессор кафедры ИВС ПГУ, Пенза, Россия;
orcid.org/0000-0003-4717-7682, e-mail: kosnikov@gmail.com

Д. Р. Абубекеров, аспирант ПГУ, Пенза, Россия;
orcid.org/0009-0005-5364-3258, e-mail: ofjordan@yandex.ru

Многие прикладные задачи оцифровки и визуализации плоских контуров требуют для своего решения применять интерполяционные методы. Известные методы интерполяции зачастую имеют ограничения, сдерживающие их применение в системах визуализации. Предлагаются математические выражения для оценки погрешности интерполяции плоских контуров по множеству опорных точек с применением геометрического примитива нового вида. Геометрический примитив представляет собой отсек составной кривой, соединяющий несколько опорных точек. Математически он описывается двумя параметрически связанными уравнениями, состоящими из нескольких слагаемых. Их число соответствует числу опорных точек, соединяемых примитивом. Слагаемые являются взвешенными значениями смешивающих функций. Множества опорных точек соседних отсеков пересекаются на нескольких точках для достижения гладкости сопряжения отсеков. Для оценки погрешности интерполяции с применением предложенного примитива используется мера расхождения кривой-интерполанта и тестовой кривой. Расхождение определяется декартовыми расстояниями между точками примитива и точками тестовой кривой. Используются нормализованное среднее квадратическое отклонение и нормализованное дискретное расстояние Хаусдорфа, приведенные к диагонали области определения тестовой кривой. Эксперимент, проведенный на нескольких разных смешивающих функциях и разных длинах отсеков интерполанта, подтвердил корректность предложенных оценок.

Ключевые слова: интерполяция, смешивающая функция, составная кривая, отсек кривой, приведенное нормализованное среднее квадратическое отклонение, приведенное дискретное расстояние Хаусдорфа.

DOI: 10.21667/1995-4565-2025-93-156-167

Введение

При решении многих прикладных задач визуализации возникает необходимость оцифровки неаналитических контуров, заданных наборами характерных точек. Примерами могут служить сохранение в электронном виде и визуальное представление контуров земельных участков, распределения высот рельефа местности, строения геологических пластов, трасс прокладки коммуникаций, границ распространения видов почв в пределах региона или зон покрытия радиосвязи и многое другое. Исходными данными для оцифровки в подобных случаях служат чертежи, результаты топографических замеров или пробного бурения, информация с датчиков. При этом исходные данные могут быть представлены в двух формах: в виде уже существующего контура, например на бумажном носителе, и в виде координат характерных (опорных) точек, по которым нужно построить контур. Результат оцифровки предпочтительно получить в векторной форме, которая по сравнению с растровой формой является более компактной и проще редактируется. В обоих случаях задания исходных данных следует представить в электронной форме, например с помощью сканирования, и применить аппарат компьютерной интерполяции. В первом случае нужно каким-то образом получить на кривой узлы интерполяции. Это отдельная задача, которую может решить человек-исследователь или компьютерный алгоритм. Во втором случае приходится использовать уже имеющиеся опорные точки. Интерполируемый контур может быть весьма протяженным, то-

гда он составляется из набора отсеков. В качестве отсеков применяются самые разнообразные геометрические примитивы – отрезки прямых, дуги, степенные кривые и другие. Методов интерполяции много, а это означает, что при решении конкретной прикладной задачи встает вопрос выбора подходящего метода, подходящего геометрического примитива.

Постановка задачи

Испытанным средством интерполяции плоских контуров являются геометрические примитивы на основе сплайнов. Как отмечается в монографии [1], аппарат сплайнов развивается более ста лет и широко применяется в компьютерной графике. Однако применительно к объектам визуализации сплайновая интерполяция имеет ограничения. Для визуализации обычно применяются сплайновые отсеки третьей степени. Тогда ограничением является формирование визуальной части сплайнового отсека между двумя опорными точками. Это означает, что для визуализации непрерывной составной кривой, описанной набором из n опорных точек, требуется сформировать около $(n-1)$ отсеков.

В работе [2] предложен геометрический примитив, визуальная часть которого соединяет несколько опорных точек. Примитив записан в параметрической форме и позволяет формировать контуры, описываемые многозначными функциями. Примитив задается набором опорных точек, в которых размещены узлы интерполяции, и точно проходит через них. Промежуточные (текущие) значения декартовых координат x , y примитива представляют собой суммы взвешенных значений смешивающих функций (СФ), действующих вдоль параметрической координатной линии (криволинейной координатной оси). Такую СФ можно назвать координатно-линейной смешивающей функцией (КЛСФ). В узлах интерполяции смешивающие функции принимают экстремальные значения, по мере удаления от узлов значения изменяются. Закон изменения зависит от вида КЛСФ. Нахождение координат промежуточной точки кривой с применением КЛСФ иллюстрирует рисунок 1. На рисунке 1, а показано прохождение параметрической координатной оси t для случая трех опорных точек (reference points) $RP1$, $RP2$, $RP3$. Их параметрические координаты обозначены как t_i , а декартовы координаты – x_i , y_i ($i = 1, 2, 3$). Текущая точка CP (current point) задается значением t_{CP} в процессе сканирования области определения параметра. Декартовы координаты точки CP определяются в процессе интерполяции. Для одной координаты, например y_{CP} , на рисунке 1, б показано поведение трех локально определенных смешивающих функций, привязанных к указанным опорным точкам, при удалении от их центров по оси параметра. Для наглядности ось t параметрической системы координат изображена в виде прямой.

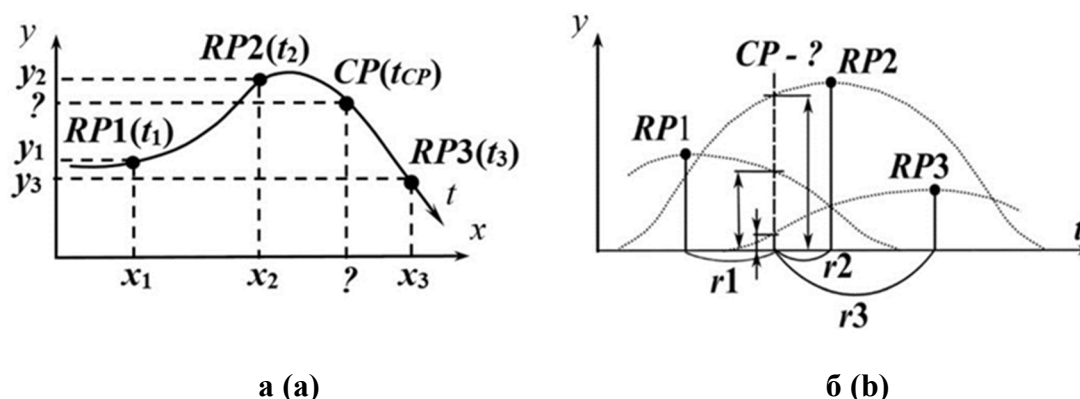


Рисунок 1 – Иллюстрация нахождения координат промежуточной точки кривой с применением координатно-линейных смешивающих функций: прохождение координатной оси через опорные точки (а) и действие смешивающих функций (б)

Figure 1 – Illustration of finding the coordinates of curve intermediate point using blending functions along a coordinate line: passing coordinate axis through reference points (a) and the action of blending functions (b)

По мере удаления от опорной точки значение ее КЛСФ уменьшается, например, так, как показано точечными линиями. Если на оси t задана проекция промежуточной точки CP , то на рисунке 1, б эта точка будет лежать где-то на штриховой линии. Чтобы определить координату высоты точки CP , требуется найти доли координат, которые дают точке CP опорные точки. Эти доли зависят от расстояний r_1, r_2, r_3 , на которые точка CP удалена от RP_1, RP_2, RP_3 . Чем ближе проекция текущей точки к проекции опорной точки, тем большую долю своей координаты дает эта опорная точка. Доли координат опорных точек на рисунке 1, б показаны двунаправленными стрелками. Если сложить эти доли, суммарная координата будет слишком большой для ожидаемого положения промежуточной точки, поэтому доля каждой опорной точки умножается на индивидуальный масштабный (весовой) коэффициент. Он называется коэффициентом влияния КЛСФ (или коэффициентом влияния опорной точки). Коэффициент влияния каждой КЛСФ определяется при настройке интерполянта на конкретную геометрическую форму.

Как и всякая интерполяция, КЛСФ-интерполяция имеет погрешность. На нее влияют вид смешивающих функций, расстановка их центров и их количество в отсеке. Зависимость погрешности интерполяции от каждого из названных факторов нуждается в исследовании. Статья посвящена выбору средств количественной оценки точности интерполяции, основанной на применении КЛСФ.

Теоретические исследования

По характеру построения КЛСФ сходны с радиальными базисными функциями (РБФ), приведенными к зависимости от одного параметра. В литературе описано несколько десятков разновидностей РБФ, которые имеют свои особенности математического описания, подходят для решения различных прикладных задач и различаются точностью интерполяции. По тематике РБФ существует обширная библиография разных лет, например [3-7]. Обобщенная математическая запись предлагаемого геометрического примитива имеет вид:

$$x = \sum_{i=1}^N \lambda_{xi} \Phi(r_i), \quad (1)$$

$$y = \sum_{i=1}^N \lambda_{yi} \Phi(r_i), \quad (2)$$

$$r_i = |t - t_i|,$$

где t – значение параметрической координаты текущей точки; t_i – значение параметрической координаты i -й опорной точки; r_i – параметрическое расстояние между текущей и i -й опорной точками; $\Phi(r_i)$ – значение КЛСФ i -й опорной точки; $\lambda_{xi}, \lambda_{yi}$ – коэффициенты влияния КЛСФ i -й опорной точки на декартовы координаты текущей точки, иначе – весовые коэффициенты i -й КЛСФ; N – количество опорных точек, на которых строится геометрический примитив.

Для нахождения коэффициентов $\lambda_{xi}, \lambda_{yi}$ составляется условие точного прохождения отсека кривой через опорные точки. Оно представляется в виде двух систем из N линейных алгебраических уравнений (СЛАУ):

$$\sum_{i=1}^N \lambda_{xi} \Phi(r_{ij}) = x_j, \\ \sum_{i=1}^N \lambda_{yi} \Phi(r_{ij}) = y_j, j = 1 \dots N,$$

где r_{ij} – параметрическое расстояние между i -й и j -й опорными точками.

Решение СЛАУ дает два набора коэффициентов $\lambda_{xi}, \lambda_{yi}$, которые подставляются в (1), (2). Формирование составной кривой из отсеков ставит задачу их сопряжения. В случае сплайн-интерполяции для этого применяются различные приемы. Для отсеков Эрмита задаются направления касательных в концевых точках каждого отсека, для отсеков Безье эти касательные задаются дополнительными опорными точками, отсеки В-сплайна, бета-сплайна и сплайна Кэтмулла – Рома сопрягаются «автоматически», благодаря смешивающим функциям

специального вида, в отсеках сплайна Кочанек – Бартельса настраиваются изменяемые параметры математического описания. КЛСФ-интерполяция требует для сопряжения отсеков применять частичное наложение соседних отсеков. Это означает, что для формирования текущего отсека, кроме его опорных точек, используются некоторые точки предыдущего и последующего отсеков. Во избежание двойного рисования общих участков не все опорные точки текущего примитива соединяются кривой, представляемой визуально, а только точки, лежащие в средней части отсека. Возникает схема расчета-визуализации вида $N \rightarrow M$, где N – количество опорных точек, участвующих в вычислениях, а M – количество опорных точек, соединяемых в визуальном фрагменте.

Для визуализации кривой между ее исходными опорными точками находятся промежуточные точки. Их координаты вычисляются по выражениям (1), (2) в процессе изменения параметра t с некоторым шагом. Процедура визуализации соединяет промежуточные точки прямолинейными отрезками, последовательность которых образует видимый фрагмент. Число промежуточных точек определяется желаемой степенью гладкости нарисованной кривой. При использовании КЛСФ-интерполяции визуальный образ кривой составляется из видимых частей отсеков, то есть из участков, соединяющих M опорных точек в соответствии с выбранной схемой расчета-визуализации. Тогда в вычислении погрешности интерполяции должны участвовать для каждого отсека эти M точек и промежуточные точки, лежащие между ними.

Если исходными данными для интерполяции является набор опорных точек, то определить погрешность интерполяции невозможно, так как не с чем сравнить положение найденных промежуточных точек. В этом случае какую-то уверенность в корректной интерполяции можно получить, если использовать для нее КЛСФ и схемы расчета-визуализации, хорошо зарекомендовавшие себя на тестовых множествах опорных точек. В качестве тестовых можно использовать множества опорных точек, взятых на аналитических тестовых кривых, форма которых примерно соответствует ожидаемой форме результата интерполяции. Ясно, что для такого поиска подходящих параметров интерполяции необходимо иметь библиотеку различных КЛСФ и тестовых кривых.

Если исходными данными для интерполяции является неаналитический контур, например контур земельного участка, то предварительно на нем требуется расставить опорные точки. Определение закона их расстановки является отдельной задачей и в данной работе не рассматривается. Интерполяция на созданном множестве опорных точек может быть более или менее успешной. Ее можно оценить визуально, но, чтобы найти численное значение погрешности интерполяции, нужно применить какой-то специальный прием. Например, можно выделить и подсчитать количество пикселей, попавших между исходным контуром и кривой-интерполянтом. Другим вариантом является такой же подход, как и в предыдущем случае: подбор подходящих КЛСФ и схем расчета-визуализации с применением тестовых кривых. Если применить такой подход, то погрешность интерполяции логично оценивать по декартовым расстояниям между точками тестовой кривой и точками кривой-интерполянта. Следовательно, нужно определить расчетные выражения и порядок нахождения точек, используемых для расчетов.

Для оценки близости двух точечных множеств предлагается использовать две известные метрики: среднеквадратическое (стандартное) отклонение (root mean square deviation – RMSD) и расстояние Хаусдорфа (Hausdorff distance – d_H). Обе основаны на вычислении декартовых расстояний между точками множеств. Различие между метриками в том, что среднеквадратическое отклонение находится по точкам двух множеств, образующих пары, то есть одной точке первого множества соответствует одна определенная точка второго множества. Расстояние Хаусдорфа может определяться для точек, расположенных в двух множествах произвольно, в том числе и упорядоченно. Следовательно, обе метрики подходят для оценки отклонения точек интерполянта от точек тестовой кривой.

Применительно к оценке погрешности интерполяции известное выражение для определения RMSD [8, 9] имеет вид

$$RMSD = \sqrt{\frac{1}{PN} \sum_{i=1}^{PN} ((x_{Ti} - x_{Ii})^2 + (y_{Ti} - y_{Ii})^2)}, \quad (3)$$

где PN – число пар сравниваемых точек; $x_{Ti}, y_{Ti}, x_{Ii}, y_{Ii}$ – декартовы координаты сравниваемых точек с номером i , причем индекс Т относится к точкам тестовой кривой, а индекс И относится к точкам интерполированной кривой.

Выражение (3) дает RMSD в абсолютных единицах. Для оценки погрешности интерполяции это неудобно. Дело в том, что погрешность интерполяции конкретного контура нужно сравнить с каким-то эталонным значением, чтобы принять решение о большей или меньшей успешности интерполяции, а это эталонное значение может быть получено для контура со значительными отличиями количественных характеристик. В технике для сравнения поведения параметров, сильно различающихся своими диапазонами, применяют нормализацию, то есть приведение к одной шкале, одному диапазону. В литературе нет согласованных средств нормализации. Обычно для приведения к одному диапазону текущие значения параметров делят на их максимальные значения или размахи. Этот прием можно применить для получения нормализованной RMSD (NRMSD), но нужно учесть своеобразие функций, заданных параметрически. Их графические образы могут располагаться на плоскости как угодно. Например, график одной тестовой функции может быть ориентирован по горизонтали, а график другой – по вертикали. Максимальные значения таких функций, найденные обычным способом, будут сильно различаться и при нормализации ими NRMSD дадут большое различие оценок.

Можно предложить нормализовать среднеквадратическое отклонение значением диагонали декартовой области определения интерполянта. Это максимальное расстояние в области графических построений интерполянта. Диагональ D легко находится, если известны точки контура с минимальными ($x_{\min}, y_{\min}$) и максимальными ($x_{\max}, y_{\max}$) значениями декартовых координат:

$$D = \sqrt{(x_{\max} - x_{\min})^2 + (y_{\max} - y_{\min})^2}. \quad (4)$$

Тогда погрешность интерполяции, представленная нормализованным среднеквадратическим отклонением и выраженная в процентах, имеет вид:

$$NRMSD = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{PN} ((x_{Ti} - x_{Ii})^2 + (y_{Ti} - y_{Ii})^2)}{PN((x_{\max} - x_{\min})^2 + (y_{\max} - y_{\min})^2)}} 100 \%.$$

Второй предлагаемой метрикой для оценки погрешности интерполяции является расстояние Хаусдорфа между множествами точек тестовой кривой и интерполянта [10], точнее его модификация – дискретное расстояние Хаусдорфа. Оно применяется, когда два множества являются конечными точечными [11], что имеет место в рассматриваемом случае. Применительно к оценке погрешности дискретное расстояние Хаусдорфа определяется следующим образом. Если $A = \{a\}$ и $B = \{b\}$ – множества точек тестовой кривой и интерполянта, а $d(a_i, b_j)$ – декартово расстояние между i -й точкой множества A и j -й точкой множества B , то дискретное расстояние Хаусдорфа $\vec{d}_H(A, B)$ между указанными множествами записывается как:

$$\vec{d}_H(A, B) = \max \{ \vec{d}_H(A, B), \vec{d}_H(B, A) \}, \quad (5)$$

где $\vec{d}_H$ – направленное расстояния Хаусдорфа:

$$\begin{aligned} \vec{d}_H(A, B) &= \max_{a_i \in A} d(a_i, B) = \max_{a_i \in A} \left(\min_{b_j \in B} (a_i, b_j) \right), \\ \vec{d}_H(B, A) &= \max_{b_j \in B} d(b_j, A) = \max_{b_j \in B} \left(\min_{a_i \in A} (b_j, a_i) \right). \end{aligned}$$

Для нахождения $\vec{d}_H(A, B)$ организуется перебор точек множества A . Рассматриваются расстояния от каждой точки до всех точек множества B . Среди этих расстояний находится минимальное. Из минимальных расстояний, найденных для точек множества A , находится максимальное. Это и есть направленное расстояние Хаусдорфа между множествами A и B . Для нахождения направленного расстояния Хаусдорфа между множествами B и A $\vec{d}_H(B, A)$ выполняются аналогичные действия, но находятся минимальные расстояния до точек множества A для каждой точки множества B . Из минимальных расстояний, найденных для точек множества B , находится максимальное. В итоге дискретное расстояние Хаусдорфа между точками множеств A и B определяется как максимальное значение из двух направленных расстояний Хаусдорфа. Говоря упрощенно, дискретное расстояние Хаусдорфа – это максимальное значение минимальных декартовых расстояний между точками двух множеств во всех их сочетаниях.

Как видно из выражения (5), расстояние $\vec{d}_H(A, B)$ измеряется в абсолютных единицах, в которых заданы декартовы координаты точек. Для оценки погрешности интерполяции это неудобно, причина указана при описании RMSD. Тогда предлагается перейти к нормализованному дискретному расстоянию Хаусдорфа и так же, как в предыдущем случае, использовать в качестве нормирующего делителя значение диагонали (4) декартовой области определения функции. Тогда погрешность интерполяции, представленная нормализованным дискретным расстоянием Хаусдорфа $\vec{d}_{HD}$ и выраженная в процентах, имеет вид:

$$\vec{d}_{HD} = \frac{\vec{d}_H(A, B)}{D} 100 \ %.$$

Экспериментальные исследования

Полученные выражения применены для оценки погрешности интерполяции разными КЛСФ и при разных схемах расчета-визуализации. В качестве тестовых использованы кривые разного вида. Для определения возможностей предложенных оценок проведено сравнение полученных с их помощью погрешностей КЛСФ-интерполяции с погрешностями сплайн-интерполяции.

Тестовые кривые выбраны с учетом разнообразия формы и кривизны их фрагментов. Тестовая кривая 1 описывается многозначной функцией параметра s :

$$x(s) = s - 2\sin(s) - 2,$$

$$y(s) = 1 - 2\cos(s) + 0.1s^2 - 5, \quad s = 1, 1.1, 1.2, \dots, 11.$$

Тестовая кривая 2 описывается однозначной функцией и для приведения к параметрической форме записи ее параметр s сопоставляется с аргументом x :

$$x(s) = s,$$

$$y(s) = 2\sin(2\pi s) + \cos(6\pi s), \quad s = 0, 0.01, \dots, 1.$$

Для интерполяции выбраны КЛСФ, принципиально отличающиеся друг от друга структурой и компонентами. Они получены приведением к однопараметрической форме записи следующих функций:

– РБФ Вендланда [12] $\phi_W(r_i) = (1 - r_i)^4(4r_i + 1)$;

– бигармоническая функция Треффца [13] $\phi_T(r_i) = 2r_i^2 \ln(r_i) + (1 - r_i^2)$;

– обратная функция Менандро [14] $\phi_M(r_i) = -\frac{4}{1 + r_i^3} + \frac{6}{1 + r_i^2} - 1$.

Во всех выражениях r_i – расстояние между i -й опорной точкой и текущей точкой. Коэффициенты влияния опорных точек $\lambda_{xi}, \lambda_{yi}$ в интерполанте (1), (2) находятся из решения двух СЛАУ. Для улучшения обусловленности матриц коэффициентов СЛАУ применяют смешивающие функции, локализованные в пространстве [7]. Используемые для оценки погрешно-

сти КЛСФ также приведены к такой форме. Для этого расстояние r_i находится в параметрических координатах и вычисляется по формуле:

$$r_i = \frac{|t - t_i|}{t_{\max}},$$

где $t_{\max}$ – половина зоны влияния опорной точки – в одном направлении оси t (рисунок 1, б). Тогда КЛСФ определяется выражением:

$$\phi(r_i) = \begin{cases} \phi(r_i) & \text{при } r_i \leq 1, \\ 0 & \text{при } r_i > 1. \end{cases}$$

Для доказательства работоспособности предложенных оценок интерполяции они проверены не только на трех указанных КЛСФ, но и на сплайне Кэтмулла – Рома, который характеризуется хорошими интерполяционными возможностями [15, 16]. Отсек этого сплайна задается на плоскости декартовыми координатами четырех опорных точек $(x_{i-1}, y_{i-1}), (x_i, y_i), (x_{i+1}, y_{i+1}), (x_{i+2}, y_{i+2})$. Математическое описание отсека имеет вид:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \left((-t^3 + 2t^2 - t)x_{i-1} + (3t^3 - 5t^2 + 2)x_i + (-3t^3 + 4t^2 + t)x_{i+1} + (t^3 - t^2)x_{i+2} \right), \\ y &= \frac{1}{2} \left((-t^3 + 2t^2 - t)y_{i-1} + (3t^3 - 5t^2 + 2)y_i + (-3t^3 + 4t^2 + t)y_{i+1} + (t^3 - t^2)y_{i+2} \right), \end{aligned}$$

где t – параметр, изменяющийся в интервале от 0 до 1. При этом кривая отсека соединяет две средние опорные точки.

Для КЛСФ-интерполяции применена целочисленная последовательная параметризация, которая упрощает решение СЛАУ при нахождении коэффициентов влияния КЛСФ. На тестовых кривых расставлены 11 опорных точек. Закон их расстановки в данном случае не очень важен: они использованы для сравнительной оценки погрешности для всех четырех названных видов интерполяции. Параметрические координаты опорных точек в системе координат интерполянта лежат в закрытом интервале: $t \in [0; 10]$ с единичным шагом. Поскольку каждая тестовая кривая имеет свой интервал изменения параметра s , а для применения NRMSD нужно выделить пары соответствующих друг другу опорных точек тестовой кривой и интерполянта, следует установить соответствие между значениями параметров s и t .

Участок тестовой кривой между двумя соседними опорными точками лежит на отрезке параметра от s_j до s_{j+1} , где j – номер начальной опорной точки участка. Участок кривой-интерполянта между теми же опорными точками лежит на отрезке параметра от t_j до t_{j+1} . Соответствие между параметрами s и t для участка получается из соотношения

$$\frac{s - s_i}{s_{i+1} - s_i} = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}.$$

Разность между параметрическими координатами соседних опорных точек интерполянта равна единице ($t_{i+1} - t_i = 1$). Тогда выражение для пересчета параметров принимает вид:

$$s = (t - t_i)(s_{i+1} - s_i) + s_i. \quad (6)$$

Легко видеть, что для каждого значения t по выражению (6) находится соответствующее значение s .

В таблицах 1, 2 приведены некоторые результаты интерполяции тестовых кривых с помощью разных КЛСФ и сплайна Кэтмулла – Рома. Используются различные схемы расчета-визуализации и области влияния КЛСФ. В графах с результатами сплайн-интерполяции тоже указаны схемы расчета-визуализации, которые относятся к КЛСФ-интерполянту. Они объясняют разные значения погрешности для интерполяции сплайном Кэтмулла – Рома. Дело в том, что разные схемы расчета-визуализации дают отсеки КЛСФ-интерполяции разной длины, и им соответствует разное количество отсеков сплайна, а погрешность интерполяции вычисляется для визуально представленных отсеков.

Таблица 1 – Результаты интерполяции кривой 1
Table 1 – Results of curve 1 interpolation

Смешивающая функция	КЛСФ на основе бигармонической функции Треффца		Сплайн Кэтмулла – Рома	
Схема	7→5	8→6	7→5	8→6
$t_{\max}$	5	5	4	4
NRMSD, %	0,18519	0,62742	0,23934	0,50569
$\bar{d}_{HN}$, %	0,42798	1,3015	0,28708	0,60883
Смешивающая функция	КЛСФ на основе обратной функции Менандро		Сплайн Кэтмулла – Рома	
Схема	8→4	8→6	8→4	8→6
$t_{\max}$	7	7	4	4
NRMSD, %	0,030785	0,15119	0,36189	0,50569
$\bar{d}_{HN}$, %	0,069509	0,47522	0,43487	0,60883
Смешивающая функция	КЛСФ на основе РБФ Вендланда		Сплайн Кэтмулла – Рома	
Схема	8→4	8→6	8→4	8→6
$t_{\max}$	9	9	4	4
NRMSD, %	0,060033	0,21377	0,36189	0,50569
$\bar{d}_{HN}$, %	0,1221	0,61342	0,43487	0,60883

Таблица 2 – Результаты интерполяции кривой 2
Table 2 – Results of curve 2 interpolation

Смешивающая функция	КЛСФ на основе бигармонической функции Треффца		Сплайн Кэтмулла – Рома	
Схема	6→4	7→3	6→4	7→3
$t_{\max}$	5	5	4	4
NRMSD, %	2,3	1,3939	2,9428	1,8944
$\bar{d}_{HN}$, %	4,0626	2,6812	4,9327	3,093
Смешивающая функция	КЛСФ на основе обратной функции Менандро		Сплайн Кэтмулла – Рома	
Схема	6→4	8→4	6→4	8→4
$t_{\max}$	7	7	4	4
NRMSD, %	1,5757	0,501	2,9428	1,8944
$\bar{d}_{HN}$, %	3,1134	1,0821	4,9327	3,093
Смешивающая функция	КЛСФ на основе РБФ Вендланда		Сплайн Кэтмулла – Рома	
Схема	6→4	8→4	6→4	8→4
$t_{\max}$	9	9	4	4
NRMSD, %	1,4619	0,50622	2,9428	1,8944
$\bar{d}_{HN}$, %	2,9043	1,1118	4,9327	3,093

Заключение

Приведенные в таблицах примеры соответствуют лучшим и худшим результатам интерполяции для тестовых кривых. Для наглядности эти результаты представлены на рисунках 2 – 5, где укрупненно показаны характерные фрагменты кривых. Цифрой 1 обозначена тестовая кривая, цифрой 2 – кривая-интерполянт.

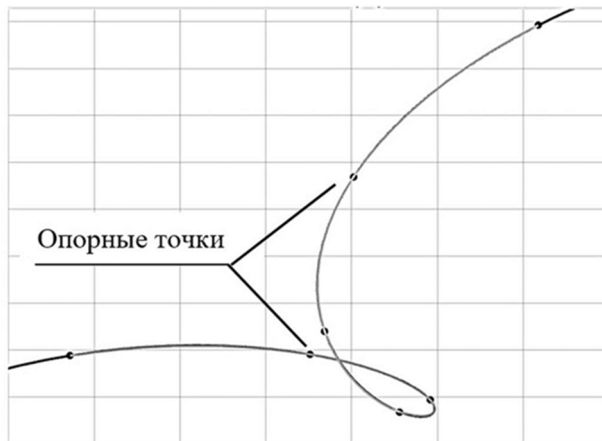


Рисунок 2 – Лучший результат интерполяции тестовой кривой 1. Применена обратная функция Менандро, схема 8→4

Figure 2 – Best result of test curve 1 interpolation. Inverse Menandro function is applied, scheme 8→4

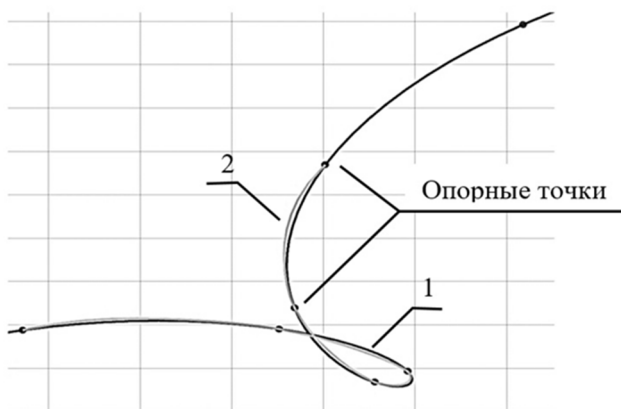


Рисунок 3 – Худший результат интерполяции тестовой кривой 1. Применена бигармоническая функция Треффца, схема 8→6

Figure 3 – Worst result of test curve 1 interpolation. Biharmonic Trefftz function is used, scheme 8→6

На рисунке 2 кривые визуально практически совпадают. Погрешности интерполяции в этом случае равны: $\text{NRMSD} = 0,030785 \%$, $\bar{d}_{HN} = 0,069509 \%$. Соответствующие погрешности сплайн-интерполяции равны $0,36189 \%$ и $0,43487 \%$. На рисунке 3 видны отклонения кривой-интерполянта от тестовой кривой. Погрешности: $\text{NRMSD} = 0,62742 \%$, $\bar{d}_{HN} = 1,3015 \%$, а для сплайн-интерполяции – $0,50569 \%$ и $0,60883 \%$ соответственно. Анализ данных таблицы 1 и рисунков 2, 3 показывает, что численные значения погрешности интерполяции на основе КЛСФ и сплайна имеют одинаковый порядок, при этом большие значения погрешности соответствуют большим отклонениям кривых-интерполянтов от тестовой кривой. То же можно увидеть из таблицы 2 и рисунков 4, 5.

Это свидетельствует о том, что предложенные оценки погрешности интерполяции с применением КЛСФ верно отражают действительность и могут применяться на практике. С их помощью можно исследовать возможности смешивающих функций различного вида, схем расчета-визуализации, областей влияния смешивающих функций и выбирать подходящие средства для решения прикладных интерполяционных задач.



Рисунок 4 – Лучший результат интерполяции тестовой кривой 2. Применена обратная функция Менандро, схема 8→4

Figure 4 – Best result of test curve 2 interpolation. Inverse Menandro function is applied, scheme 8→4

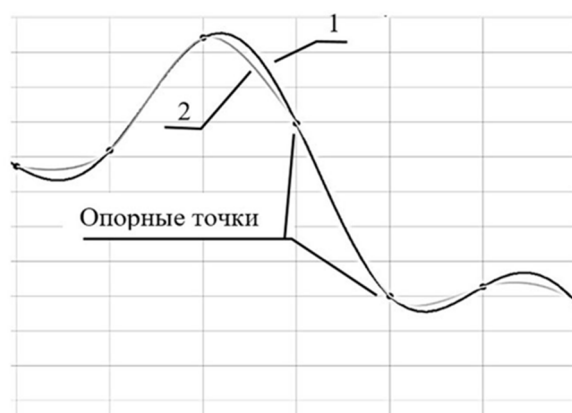


Рисунок 5 – Худший результат интерполяции тестовой кривой 2. Применена бигармоническая функция Треффца, схема 6→4

Figure 5 – Worst result of test curve 2 interpolation. The biharmonic Trefftz function is used, scheme 6→4

Библиографический список

1. Farin G. Curves and Surfaces for CAGD. A Practical Guide / Fifth Edition. Academic Press. 2002, 499 p.
2. Косников Ю.Н., Абубекеров Д.Р. Визуализация плоских кривых с использованием смешивающих функций, действующих вдоль оси параметрической системы координат: альтернатива сплайнам // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. 2024. Т.13. № 4(68). С. 12-19.
3. Wright G.B. Radial basis function interpolation: numerical and analytical developments. University of Colorado. 2000, 155 p. URL: https://works.bepress.com/grady_wright/8/download/.
4. Buhmann M.D. Radial Basis Functions: Theory and Implementations. Cambridge: Univ.Press. 2004, 271 p.
5. Sheng-Xin Zhu. Compactly supported radial basis functions: how and why? [Электронный ресурс]. OCCAM Preprint Number 12/57. 2012. URL: <https://scholar.google.co.uk/citations?user=S21pnk0AAAAJ&hl=en>
6. De Marchi S. Lectures on Radial Basis Functions [Электронный ресурс]. 2018. URL: <https://www.math.unipd.it/~demarchi/RBF/LectureNotes.pdf>.
7. Skala V., Mouryova E. Meshfree Interpolation of Multidimensional Time-Varying Scattered Data. Computers. 2023, vol. 12, no. 12, pp. 243-261. DOI: 10.3390/computers12120243.
8. Willmott C., Matsuura K. On the use of dimensioned measures of error to evaluate the performance of spatial interpolators. International Journal of Geographical Information Science. 2006, no. 20 (1), pp. 89-102. DOI:10.1080/13658810500286976.

9. **Pontius R., Thontteh O., Chen H.** Components of information for multiple resolution comparison between maps that share a real variable. *Environmental Ecological Statistics*. 2008, no. 15 (2), pp. 111-142. DOI:10.1007/s10651-007-0043-y.
10. **Hausdorff metric.** [Электронный ресурс]. *Encyclopedia of Mathematics*. URL: http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Hausdorff_metric&oldid=38917.
11. **Ik-Sung Kim, McLean W.** Computing the Hausdorff distance between two sets of parametric curves. *Communications of The Korean Mathematical Society*. 2013, vol. 28, pp. 833-850. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:55134429>.
12. **Wendland H.** Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree. *Advances in Computational Mathematics*. 1995, vol. 4, pp. 389-396. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:36452865>.
13. **Piltner R.** Exploring New Options for Data Interpolation with Radial Basis Functions. *Workshop on Environmental Health and Air Pollution*. 2018, pp. 1-4. DOI: 10.4108/eai.21-6-2018.276666.
14. **Menandro F.C.M.** Two new classes of compactly supported radial basis functions for approximation of discrete and continuous data. *Engineering Reports*. 2019, vol. 1, pp. 1 – 30. doi: 10.1002/eng2.12028.
15. **Catmull E., Rom R.A.** Class of Local Interpolating Splines. *Computer Aided Geometric Design / R.E. Barnhill and R.F. Reisenfeld, Editors, Academic Press. NY. 1974, pp. 317-326. DOI: 10.1016/B978-0-12-079050-0.50020-5.*
16. **Yuksel C., Schaefer S., Keyser J.** Parameterization and applications of Catmull–Rom curves. *Computer-Aided Design*. 2011, no. 43(7), pp. 747-755. DOI: 10.1016/j.cad.2010.08.008.

UDC 004.925.86

ABOUT THE REDUCED INTERPOLATION ERRORS OF NON-ANALYTICAL CURVES

Yu. N. Kosnikov, Dr. in technical sciences, full professor, full professor, PSU, Penza, Russia;
orcid.org/0000-0003-4717-7682, e-mail: kosnikov@gmail.com

D. R. Abubekеров, postgraduate student, PSU, Penza, Russia;
orcid.org/0009-0005-5364-3258, e-mail: ofjordan@yandex.ru

Many applied problems of digitizing and visualizing flat contours require the use of interpolation methods. Known interpolation methods often have limitations that hinder their use in visualization systems. Mathematical expressions to estimate the error in interpolating planar contours based on a set of control points using a new type of geometric primitive are proposed. The geometric primitive is a section of a composite curve connecting several control points. Mathematically, it is described by two parametrically related equations consisting of several terms. Their number corresponds to the number of control points connected by a primitive. The terms are weighted values of mixing functions. The sets of control points of adjacent sections intersect at several points to achieve smooth transition between the sections. To estimate the interpolation error using the primitive proposed a measure of divergence between interpolant curve and test curve is used. The divergence is determined by the Cartesian distances between primitive currents and test curve points. Normalized root-mean-square deviation and normalized discrete Hausdorff distance reduced to the diagonal of test curve domain are used. The experiment conducted on several different mixing functions and different lengths of interpolant sections confirmed the correctness of the estimates proposed.

Keywords: interpolation, mixing function, composite curve, curve compartment, reduced normalized standard deviation, reduced discrete Hausdorff distance.

DOI: 10.21667/1995-4565-2025-93-156-167

References

1. **Farin G.** Curves and Surfaces for CAGD. A Practical Guide. Fifth Edition. *Academic Press*. 2002, 499 p.
2. **Kosnikov Yu.N., Abubekеров D.R.** Vizualizaciya ploskih krivyh s ispol'zovaniem smeshivayushchih funkciy, dejstvuyushchih vdol' osi parametricheskoj sistemy koordinat: al'ternativa splajnam. (Visualiza-

tion of flat curves using blending functions operating along the a parametric coordinate system axis: an alternative to splines). *XXI vek: itogi proshlogo i problemy nastoyashchego plyus*. 2024, vol. 13, no. 4(68), pp. 12-19. (in Russian).

4. **Wright G.B.** Radial basis function interpolation: numerical and analytical developments. University of Colorado. 2000, 155 p. URL: https://works.bepress.com/grady_wright/8/download/.

5. **Buhmann M.D.** Radial Basis Functions: Theory and Implementations. Cambridge: *Univ.Press*. 2004, 271 p.

6. **Sheng-Xin Zhu.** Compactly supported radial basis functions: how and why? [Электронный ресурс]. OCCAM Preprint Number 12/57. 2012. URL: <https://scholar.google.co.uk/citations?user=S21pnk0AAAAJ&hl=en>

7. **De Marchi S.** Lectures on Radial Basis Functions [Электронный ресурс]. 2018. URL: <https://www.math.unipd.it/~demarchi/RBF/LectureNotes.pdf>.

8. **Skala V., Mourycova E.** Meshfree Interpolation of Multidimensional Time-Varying Scattered Data. *Computers*. 2023, vol. 12, no.12, pp. 243-261. DOI: 10.3390/computers12120243.

9. **Willmott C., Matsuura K.** On the use of dimensioned measures of error to evaluate the performance of spatial interpolators. *International Journal of Geographical Information Science*. 2006, no. 20 (1), pp. 89-102. DOI: 10.1080/13658810500286976.

10. **Pontius R., Thontteh O., Chen H.** Components of information for multiple resolution comparison between maps that share a real variable. *Environmental Ecological Statistics*. 2008, no. 15 (2), pp. 111-142. DOI:10.1007/s10651-007-0043-y.

11. **Hausdorff metric.** [Электронный ресурс]. Encyclopedia of Mathematics. URL: http://encyclopediaofmath.org/index.php?title=Hausdorff_metric&oldid=38917.

12. **Ik-Sung Kim, McLean W.** Computing the Hausdorff distance between two sets of parametric curves. *Communications of The Korean Mathematical Society*. 2013, vol. 28, pp. 833-850. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:55134429>.

13. **Wendland H.** Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree. *Advances in Computational Mathematics*. 1995, vol. 4, pp. 389-396. URL: <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:36452865>.

14. **Piltner R.** Exploring New Options for Data Interpolation with Radial Basis Functions. Workshop on Environmental Health and Air Pollution. 2018, pp. 1-4. DOI: 10.4108/eai.21-6-2018.276666.

15. **Menandro F.C.M.** Two new classes of compactly supported radial basis functions for approximation of discrete and continuous data. *Engineering Reports*. 2019, vol. 1, pp. 1-30. DOI: 10.1002/eng2.12028.

16. **Catmull E., Rom R.A.** Class of Local Interpolating Splines. *Computer Aided Geometric Design* / R.E. Barnhill and R.F. Reisenfeld, Editors, Academic Press. NY. 1974, pp. 317-326. DOI: 10.1016/B978-0-12-079050-0.50020-5.

17. **Yuksel C., Schaefer S., Keyser J.** Parameterization and applications of Catmull–Rom curves. *Computer-Aided Design*. 2011, no. 43(7), pp. 747-755. DOI: 10.1016/j.cad.2010.08.008.