

УДК 621.397

## АНАЛИЗ МЕТОДОВ ДВУХКАНАЛЬНОЙ ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ НА ОСНОВЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ХУРГИНА – ЯКОВЛЕВА И ВЕСОВОГО ПРОСТРАНСТВА СОБОЛЕВА

**В. Т. Дмитриев**, д.т.н., доцент, заведующий кафедрой РУС РГРТУ, Рязань, Россия;  
[orcid.org/0000-0001-5521-6886](http://orcid.org/0000-0001-5521-6886), e-mail: vol77@rambler.ru

**Е. С. Черентаева**, аспирант РГРТУ, Рязань, Россия;  
[orcid.org/0000-0002-5580-3033](http://orcid.org/0000-0002-5580-3033), e-mail: culikoa4199@yandex.ru

**М. А. Черентаев**, аспирант РГРТУ, Рязань, Россия;  
[orcid.org/0000-0002-0282-7250](http://orcid.org/0000-0002-0282-7250), e-mail: cherentaev.mikhail@gmail.com

*Проведен сравнительный анализ двух методов двухканальной обработки изображений, основанных на использовании представления Хургина – Яковleva и алгоритма в весовом пространстве Соболева, использующие не только информацию о сигнале, но и о его производных. Целью работы является выявление преимуществ и ограничений каждого метода при обработке и передаче изображений. Произведен расчёт характеристики синтезирующих фильтров. В результате экспериментальных исследований по восстановлению изображения для рассматриваемых методов осуществлена оценка качества восстановления изображений различных типов. Произведен анализ помехоустойчивости рассмотренных алгоритмов к воздействию шумов квантования и аддитивных помех в канале связи. Показано, что метод обработки на основе весового пространства Соболева, использующий восстанавливющие фильтры с экспоненциальным затуханием, обладает значительно лучшей реализуемостью, хотя и несколько уступает в точности представлению Хургина – Яковleva с идеальными фильтрами. В результате экспериментальных исследований установлено, что оба метода обеспечивают существенное сокращение избыточности передаваемой информации без значительного ухудшения визуального качества.*

**Ключевые слова:** двухканальная обработка изображений, представление Хургина – Яковleva, весовое пространство Соболева, синтезирующие фильтры, восстановление изображений, градиентные методы, обработка с использованием производных, помехоустойчивость, сжатие изображений.

**DOI:** 10.21667/1995-4565-2025-94-46-58

### Введение

Современные задачи обработки и анализа изображений предъявляют высокие требования к эффективности и точности методов их обработки. Одними из ключевых проблем при разработке данных систем являются оптимальное сжатие и восстановление сигналов при ограниченном объеме передаваемых данных, что особенно актуально в таких областях, как обработка изображений, многоканальная передача данных и подавление шумов. Классический подход, основанный на теореме В.А. Котельникова (известной так же, как теорема Найквиста – Шеннона), предполагает равномерную дискретизацию сигнала с частотой, превышающей его удвоенную верхнюю частоту [1]. Согласно данной теореме для восстановления сигналов используется практически нереализуемый фильтр с импульсной характеристикой вида  $\sin(t)/t$ , а также в связи с вынужденным ограничением верхней частоты возникают искажения из-за «наложений» спектра.

Все это послужило стимулом для развития методов с менее жесткими требованиями к практической реализации интерполирующих фильтров и к развитию алгоритмов спектральной обработки, имеющих низкую чувствительность к шумам в канале связи. Перспективным направлением является параллельная обработка, при которой по одному каналу передаются отсчеты самого сигнала, а по другим – отсчеты его производной. Такой подход позволяет

повысить информативность дискретного представления сигнала и улучшить качество его последующего восстановления.

В данной статье проводится сравнительный анализ двух современных математических аппаратов для двухканальной обработки изображений при использовании отсчетов сигнала и его первой производной. Первый метод основан на представлении Хургина – Яковleva [2], которое использует интерполяционную формулу Лагранжа для неравномерной последовательности отсчетов и позволяет синтезировать интерполирующие фильтры для восстановления как самого сигнала, так и его производной. Второй метод опирается на теорию весовых пространств Соболева, предоставляющую строгий функциональный анализ для обобщения теоремы В.А. Котельникова и обоснования использования производных в процессе интерполяции.

**Целью работы** являются теоретическое обоснование и экспериментальное сравнение эффективности этих двух подходов в задачах восстановления изображений. В рамках исследования проанализирована реализация синтезирующих фильтров, их амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики, а также оцениваются такие ключевые показатели, как помехоустойчивость и степень сжатия передаваемой информации.

### **Обработка сигналов в двухканальной системе на основе представления Хургина-Яковleva с использованием интерполяционной формулы Лагранжа**

В соответствии с теоремой Котельникова отсчеты значений функции берутся через одинаковые интервалы длительности  $\Delta \leq \frac{1}{2F}$  с, но в некоторых случаях, например при много-канальной передаче с временным разделением каналов и одновременном использовании методов импульсной модуляции, возникает необходимость обобщения теоремы В.А. Котельникова на случай отсчетов, следующих неравномерно друг за другом. На практике рассматривают не произвольно расположенные моменты отсчетов, а распределенные некоторым регулярным образом – группами по  $N$  точек, которые периодически повторяются [3]. Последовательность моментов отсчета можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} t_{ns} &= Nn\Delta + \tau_s (s = 0, 1, \dots, N-1; n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \\ \tau_0 &= 0; \quad \tau_s < N\Delta; \quad \Delta = \frac{1}{2F}, \end{aligned} \tag{1}$$

где  $s$  – некоторое число точек в группе;  $\tau_s$  – величина интервала между точками в группе. При фиксированном значении  $s$  последовательность  $\{t_{ns}\}$  имеет период  $T_N = N\Delta$ .

Базисная функция для каждой периодической последовательности  $\{t_{ns}\}$  при фиксированном  $s$  имеет следующий вид:

$$\varphi_s(z) = \sin \frac{\pi}{N\Delta}(z - \tau_s). \tag{2}$$

Выражение (2) равно нулю при  $z = t_{ns}$ , при этом производная функции (2) не равна нулю, других нулей функция не имеет. Поэтому для множества задаваемого выражением (1), базисная функция может быть записана следующим образом:

$$\varphi(z) = \prod_{s=0}^{N-1} \sin \frac{\pi}{N\Delta}(z - \tau_s). \tag{3}$$

Для отсчетов функции  $f(t)$  в моменты времени (1) интерполяционная формула Лагранжа имеет вид:

$$\psi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^{N-1} \frac{f(t_{ns}) \prod_{p=0}^{N-1} \sin \frac{\pi}{N\Delta}(z - \tau_p)}{(-1)^n \frac{\pi}{N\Delta} (z - t_{ns}) \prod_{p=0, p \neq s}^{N-1} \sin \frac{\pi}{N\Delta} (\tau_s - \tau_p)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{s=0}^{N-1} \frac{f(t_{ns}) \prod_{p=0}^{N-1} \sin \frac{\pi}{N\Delta}(z - t_{np})}{\frac{\pi}{N\Delta} (z - t_{ns}) \prod_{p=0, p \neq s}^{N-1} \sin \frac{\pi}{N\Delta} (\tau_s - \tau_p)}. \tag{4}$$

Важно отметить, что хотя интервалы между отсчетами не равные, за время  $N\Delta$  берется также  $N$  отсчетов, и при ограничении спектра до интервала  $(-2\pi F, 2\pi F)$  выражение (4) будет представлять функцию  $f(t)$  единственным образом.

При представлении последовательности отсчетов в виде (1) возникает идея о возможности использовать в качестве 1-го, 2-го и т.д. отсчетов отсчеты не самой функции, а отсчеты ее  $N-1$  производных [4, 5, 6, 7]. Рассмотрим данную возможность при  $N=2$ , то есть  $t_n = 2n\Delta$ , при этом в выражении (4)  $t_{n0} = 2n\Delta$ ,  $t_{n1} = 2n\Delta + \tau$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2\dots$ ). Если значение функции  $f(t)$  в точке  $t_{n0} = 2n\Delta$  известно, то при малом  $\tau$  ее значение равно

$$f(t_{n1}) = f(2n\Delta + \tau) = f(2n\Delta) + f'(2n\Delta)\tau + O(\tau^2), \quad (5)$$

где  $O(\tau^2)$  – члены более высокого порядка малости. С учетом выражения (5) формула (4) примет вид:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{f(t_{n0}) \sin \frac{\pi}{2\Delta} (z - t_{n0}) \sin \frac{\pi}{2\Delta} (z - t_{n1})}{\frac{\pi}{2\Delta} (z - t_{n0}) \sin \frac{\pi}{2\Delta} (\tau_0 - \tau_1)} + \frac{f(t_{n1}) \sin \frac{\pi}{2\Delta} (z - t_{n0}) \sin \frac{\pi}{2\Delta} (z - t_{n1})}{\frac{\pi}{2\Delta} (z - t_{n1}) \sin \frac{\pi}{2\Delta} (\tau_1 - \tau_0)} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi}{2\Delta} (z - 2n\Delta) \sin \frac{\pi}{2\Delta} (z - 2n\Delta - \tau)}{\frac{\pi}{2\Delta} \sin \frac{\pi}{2\Delta} \tau} \left( \frac{f(2n\Delta) + f'(2n\Delta)\tau + O(\tau^2)}{z - 2n\Delta} - \frac{f(2n\Delta)}{z - 2n\Delta - \tau} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

При переходе к пределу при  $\tau \rightarrow 0$  и с использованием очевидных преобразований выражение (6) примет следующий вид:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\sin \frac{\pi}{2\Delta} (z - 2n\Delta)}{\frac{\pi}{2\Delta} (z - 2n\Delta)} \right]^2 (f(2n\Delta) + (z - 2n\Delta)f'(2n\Delta)). \quad (7)$$

Композиционную функцию такого ряда можно записать следующим образом:

$$\theta_{nk}(t) = (t - 2n\Delta)^k \left[ \frac{\sin \frac{\pi}{2\Delta} (t - 2n\Delta)}{\frac{\pi}{2\Delta} (t - 2n\Delta)} \right]^2. \quad (8)$$

В соответствии с выражением (8) импульсные переходные функции синтезирующих фильтров для двухканальной системы при передаче по первому каналу сигнала, а по второму его первой производной определяются выражениями:

$$\theta_{n0}(t) = \left[ \frac{\sin \frac{\pi}{2\Delta} (t - 2n\Delta)}{\frac{\pi}{2\Delta} (t - 2n\Delta)} \right]^2, \quad (9)$$

$$\theta_{n1}(t) = (t - 2n\Delta) \left[ \frac{\sin \frac{\pi}{2\Delta} (t - 2n\Delta)}{\frac{\pi}{2\Delta} (t - 2n\Delta)} \right]^2. \quad (10)$$

Соответственно, (9) – импульсная характеристика синтезирующего фильтра сигнала, (10) – импульсная характеристика синтезирующего фильтра для первой производной.

## Синтез синтезирующих фильтров для двухканальной системы обработки изображений на основе представления Хургина – Яковлева

Приведенным выше импульсным характеристикам синтезирующих фильтров (9) и (10) соответствуют частотные характеристики:

$$H_{n0}(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\sin \frac{\pi}{2\Delta} (t - 2n\Delta)}{\frac{\pi}{2\Delta} (t - 2n\Delta)} \right]^2 e^{-jw t} dt, \quad (11)$$

$$H_{n1}(jw) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - 2n\Delta) \left[ \frac{\sin \frac{\pi}{2\Delta} (t - 2n\Delta)}{\frac{\pi}{2\Delta} (t - 2n\Delta)} \right]^2 e^{-jw t} dt. \quad (12)$$

В выражениях (11), (12) проведем замену  $a = \frac{\pi}{2\Delta}$ ,  $t_0 = 2n\Delta$ , и пусть  $\tau = t - t_0$ , тогда  $dt = d\tau$ ,  $t = \tau + t_0$ . С учетом замены, предложенных условий и в соответствии с теоремой о свертке из выражения (11) получим следующую запись для частотной характеристики:

$$\begin{aligned} H_0(jw) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\sin a\tau}{a\tau} \right]^2 e^{-jw(\tau+t_0)} d\tau = e^{-jwt_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\sin a\tau}{a\tau} \right]^2 e^{-jw\tau} d\tau = \\ &= e^{-jwt_0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\sin a\tau}{a\tau} \right] e^{-jw\tau} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\sin a\tau}{a\tau} \right] e^{-jw\tau} d\tau. \end{aligned}, \quad (13)$$

Известно, что выражение  $\int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\sin a\tau}{a\tau} \right] e^{-jw\tau} d\tau$  – определяет частотную характеристику прямоугольного импульса, и, произведя свертку частотных характеристик двух прямоугольных импульсов, получим частотную характеристику треугольной функции:

$$H_0(jw) = \begin{cases} e^{-j\omega t_0} \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\pi}{a} \right)^2 (2a - |\omega|), & |\omega| \leq 2a \\ 0, & |\omega| > 2a. \end{cases}, \quad (14)$$

Проведем подстановку  $a = \frac{\pi}{2\Delta}$  для выражения (14):

$$H_0(jw) = \begin{cases} \frac{2\Delta^2}{\pi} \left( \frac{\pi}{\Delta} - |\omega| \right) e^{-j\omega 2n\Delta}, & |\omega| \leq \frac{\pi}{\Delta} \\ 0, & |\omega| > \frac{\pi}{\Delta} \end{cases}$$

или

$$(15)$$

$$H_0(jw) = \begin{cases} 2\Delta \left( 1 - \frac{\Delta}{\pi} |\omega| \right) e^{-j\omega 2n\Delta}, & |\omega| \leq \frac{\pi}{\Delta} \\ 0, & |\omega| > \frac{\pi}{\Delta} \end{cases}.$$

Для выражения (12), с учетом замены предложенных условий, получим следующее выражение:

$$\begin{aligned}
 H_1(jw) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \tau \left[ \frac{\sin a\tau}{a\tau} \right]^2 e^{-jw(\tau+t_0)} d\tau = e^{-jwt_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \tau \left[ \frac{\sin a\tau}{a\tau} \right]^2 e^{-jw\tau} d\tau = \\
 &= e^{-jwt_0} j \frac{d}{d\omega} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \frac{\sin a\tau}{a\tau} \right]^2 e^{-jw\tau} d\tau \right\}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

С учетом выражения (14), после вычисления производной, формула (16) примет следующий вид:

$$H_1(jw) = \begin{cases} -j \frac{1}{2a^2} sign(\omega) e^{-j\omega t_0}, & |\omega| < 2a \\ 0, & |\omega| > 2a. \end{cases} \tag{17}$$

при  $\omega = \pm 2a$  производная данной функции не существует. Проведем обратную подстановку для формулы (17):

$$H_1(jw) = \begin{cases} -j \frac{2\Delta^2}{\pi} sign(\omega) e^{-j\omega 2n\Delta}, & |\omega| < \frac{\pi}{\Delta} \\ 0, & |\omega| > \frac{\pi}{\Delta}. \end{cases} \tag{18}$$

Для получения амплитудно-частотной характеристики (АЧХ) и фазо-частотной характеристики (ФЧХ) синтезирующих фильтров определим модуль и аргумент функций (15) и (18):

$$|H_0(w)| = \begin{cases} 2\Delta \left( 1 - \frac{\Delta}{\pi} |\omega| \right), & |\omega| \leq \frac{\pi}{\Delta} \\ 0, & |\omega| > \frac{\pi}{\Delta} \end{cases}, \quad \arg H_0(w) = \begin{cases} -2n\Delta\omega, & |\omega| < \frac{\pi}{\Delta} \\ 0, & |\omega| > \frac{\pi}{\Delta} \end{cases}. \tag{19}$$

$$|H_1(w)| = \begin{cases} \frac{2\Delta^2}{\pi}, & |\omega| < \frac{\pi}{\Delta} \\ 0, & |\omega| > \frac{\pi}{\Delta} \end{cases}, \quad \arg H_1(w) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} sign(\omega) - 2n\Delta\omega, & |\omega| < \frac{\pi}{\Delta} \\ 0, & |\omega| > \frac{\pi}{\Delta} \end{cases}. \tag{20}$$

Для проведения экспериментальных исследований зададим  $n = 0$ ,  $\Delta = 1/2F_{ep}$ , где  $F_{ep}$  – верхняя граничная частота синтезирующих фильтров, выбранная в соответствии со стеоремой В.А. Котельникова. Выражения (19) и (20) могут быть преобразованы к следующему виду:

$$\begin{aligned}
 |H_0(w)| &= \begin{cases} \frac{2}{2F_{ep}} \left( 1 - \frac{1}{2\pi F_{ep}} \omega \right), & 0 < \omega \leq 2\pi F_{ep} \\ 0, & \omega > 2\pi F_{ep} \end{cases}, \quad \arg H_0(w) = 0, \\
 |H_1(w)| &= \begin{cases} \frac{2}{(2F_{ep})^2 \pi}, & 0 < \omega < 2\pi F_{ep} \\ 0, & \omega > 2\pi F_{ep} \end{cases}, \quad \arg H_1(w) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & 0 < \omega < 2\pi F_{ep} \\ 0, & \omega > 2\pi F_{ep} \end{cases}.
 \end{aligned}$$

Для практического применения в обработке изображений целесообразно перейти к безразмерным нормированным частотным характеристикам, тогда получим [6,8]:

$$|H_0(w)| = \begin{cases} 2 \left( 1 - \frac{1}{2\pi F_{ep}} \omega \right), & 0 < \omega \leq 2\pi F_{ep} \\ 0, & \omega > 2\pi F_{ep} \end{cases}, \quad \arg H_0(w) = 0, \tag{21}$$

$$|H_1(w)| = \begin{cases} \frac{2}{\pi}, & 0 < \omega < 2\pi F_{ep}, \\ 0, & \omega > 2\pi F_{ep} \end{cases}, \quad \arg H_1(w) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2}, & 0 < \omega < 2\pi F_{ep}, \\ 0, & \omega > 2\pi F_{ep}. \end{cases} \quad (22)$$

Для двумерного случая изображения  $f(x, y)$  строгий подход требует использования векторного поля градиента  $\nabla f(x, y) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right]$ . Однако при практической реализации использовался упрощенный подход, который использует скалярное поле производных, определяемое в следующем виде:

$$f_d(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (23)$$

Выражение (23) эквивалентно вычислению производной по направлению вектора  $\vec{v} = (1, 1)$ :

$$f_d(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot 1.$$

В частотной области оператор вычисления скалярного поля производных соответствует фильтру с передаточной функцией:

$$H_d(u, v) = j(u + v), \quad (24)$$

где  $u, v$  – пространственные частоты. Данный фильтр выделяет компоненты градиента в направлении  $45^\circ$  в пространственно-частотной области [9, 10].

Восстановление изображения для представления Хургина-Яковleva осуществляется по формуле:

$$f(x, y) = \sum_{m, n} \left[ f(mT_x, nT_y) \cdot \varphi_0(x + mT_x, y - nT_y) + f_d(mT_x, nT_y) \cdot \varphi_1(x - mT_x, y - nT_y) \right],$$

где  $T_x, T_y$  – интервалы дискретизации по горизонтальной ( $x$ ) и вертикальной ( $y$ ) осям соответственно, а синтезирующие функции определяются по формулам:

$$\varphi_0(x, y) = \frac{1}{T_x T_y} \cdot \text{sinc}\left(\frac{x}{T_x}\right) \text{sinc}\left(\frac{y}{T_y}\right) \cdot \left[ 1 + \frac{\pi x}{T_x} \cot\left(\frac{\pi x}{T_x}\right) \right],$$

$$\varphi_1(x, y) = \frac{1}{\pi} \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{x}{T_x}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{y}{T_y}\right).$$

Эффективность скалярного подхода обусловлена следующими факторами:

1. Сохранение контурной информации: для большинства естественных изображений градиенты в направлениях  $0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$  и  $135^\circ$  сильно коррелированы. Скалярное поле  $f_d(x, y)$  сохраняет существенную часть контурной информации.

2. Энергетические соображения: спектр формулы (24) равномерно взвешивает горизонтальные и вертикальные частотные компоненты, обеспечивая сбалансированное представление градиентов.

3. Упрощение реализации: использование одного канала производных вместо двух сокращает объем вычислений и упрощает архитектуру системы.

Экспериментальные исследования показывают, что для широкого класса тестовых изображений данный подход обеспечивает пиковое отношение сигнал-шум (англ. Peak signal-to-noise ratio – PSNR), показывающее отношение между максимальным значением сигнала и мощностью шума, в диапазоне 26...30 дБ, что подтверждает его практическую эффективность [11, 12]. Качество восстановления изображений обусловлено тем, что скалярное поле производных адекватно представляет информацию о его высокочастотных компонентах, необходимую для точной интерполяции.

## Обработка сигналов в весовом пространстве Соболева $W_2^1$ .

### Обобщение теоремы В.А. Котельникова на весовое пространство Соболева $W_2^1$

Второй перспективный подход к двухканальной обработке сигналов основан на функциональном анализе и использует аппарат весовых пространств Соболева. В то время как классическая теорема В.А. Котельникова формулируется для пространства  $L_2$  функций с конечной энергией, данный подход позволяет строго математически обосновать целесообразность использования производной, введя дополнительное ограничение на «гладкость» сигнала, что отражает свойства многих реальных сигналов и изображений, которые не только имеют ограниченный спектр, но и являются достаточно гладкими.  $W_2^1$ . Пространство Соболева  $W_2^1$  задается нормой [13]:

$$\|f\|_W = \left[ \int_T |f(t)|^2 dt + \int_T \left| \frac{df(t)}{dt} \right|^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

То есть на класс функций в пространстве  $W_2^1$ , кроме условия  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt < \infty$ , накладывается дополнительное условие:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{df(t)}{dt} \right)^2 dt < \infty.$$

Пусть функция  $f(t)$  удовлетворяет условиям Дирихле (конечное число максимумов, минимумов и точек разрыва на любом конечном отрезке и абсолютно интегрируема на всей числовой оси), тогда она может быть представлена в виде интеграла Фурье (25):

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(w) \exp(jwt) dw, \quad (25)$$

где её спектр  $S(w)$  принадлежит весовому пространству  $W_2^1$ , а его выражение имеет следующий вид:

$$S(w) = \frac{1}{2\pi((1-\alpha)+\alpha w^2)} \int_{-\infty}^{\infty} [(1-\alpha)f(t) - j\alpha w \frac{df(t)}{dt}] \exp(-jwt) dt,$$

где  $\alpha$  – весовой коэффициент, который может изменяться от 0 до 1 и определяет баланс между вкладом энергии исходного сигнала и энергии его производной в процесс восстановления. Физически это означает, что при большем  $\alpha$  алгоритм «доверяет» более гладким (медленно меняющимся) решениям, эффективно подавляя высокочастотные шумы. При  $\alpha \rightarrow 0$  данный метод вырождается в классический случай, не учитывающий гладкость.

Вместе с тем спектр  $S(w)$  может быть представлен в виде ряда Фурье в пространстве  $W_2^1$ . В комплексной форме и в пределах интервала существования спектра  $-2\pi F_{\max} < w < 2\pi F_{\max}$  этот ряд записывается в виде:

$$\begin{aligned} S(w) &= \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha w^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-2\pi F_{\max}}^{2\pi F_{\max}} S(w) \exp(jwn\Delta t) dw \right] \exp(-jwn\Delta t) - \\ &- \frac{jw\alpha}{1-\alpha+\alpha w^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-2\pi F_{\max}}^{2\pi F_{\max}} jwS(w) \exp(jwn\Delta t) dw \right] \exp(-jwn\Delta t) = \\ &= \frac{1-\alpha}{1-\alpha+\alpha w^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp(-jwn\Delta t) - \frac{jw\alpha}{1-\alpha+\alpha w^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f'_n \exp(-jwn\Delta t), \end{aligned} \quad (26)$$

где  $\Delta t \leq 1/F_{\max}$ .

Применяя преобразование Фурье к обеим частям равенства (26) и изменяя порядок интегрирования и суммирования, восстановленную функцию  $f_e(t)$  можно представить в следующем виде [14]:

$$\begin{aligned} f_e(t) = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \int_{-2\pi F_{\max}}^{2\pi F_{\max}} \frac{1-\alpha}{1-\alpha + \alpha w^2} \exp(jw(t-n\Delta t)) dw - \\ & - \sum_{n=-\infty}^{\infty} f'_n \int_{-2\pi F_{\max}}^{2\pi F_{\max}} \frac{jw\alpha}{1-\alpha + \alpha w^2} \exp(jw(t-n\Delta t)) dw. \end{aligned} \quad (27)$$

В случае, когда параметр  $\alpha = 0$ , выражение (27) переходит в известное [15] соотношение для восстановления функций в пространстве  $L_2$ . Анализ формулы (27) показывает, что для восстановления функции  $f(t)$  отсчёты  $f_n$  и  $f'_n$  должны быть обработаны интерполирующими фильтрами с передаточными характеристиками  $K_c(w) = (1-\alpha)/(1-\alpha + \alpha w^2)$  и  $K_{np}(w) = jw\alpha/(1-\alpha + \alpha w^2)$ . Передаточные характеристики этих фильтров обладают монотонно убывающим характером, что выгодно отличает их от идеального фильтра нижних частот, используемого в классической теореме В.А. Котельникова, и существенно упрощает их практическую реализацию.

Импульсные характеристики данных фильтров, в предельном случае при  $F_{\max} \rightarrow \infty$ , соответственно равны [16]:

$$k_c(t) = \frac{\pi\sqrt{1-\alpha}}{\sqrt{\alpha}} \exp\left(-\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}|t|\right), \quad (28)$$

$$k_{np}(t) = -\text{sign}(t)\pi \exp\left(-\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}|t|\right). \quad (29)$$

Подставляя (27) и (28) в (26), при  $0 \leq \alpha < 1$  получаем [17]:

$$f_e(t) = \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}} f_n + \text{sign}(t-n\Delta t) f'_n \right] \exp\left(-\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}|t-n\Delta t|\right), \quad (30)$$

где  $\Delta t$  – интервал дискретизации. Оптимальное значение весового коэффициента  $\alpha$  может быть выбрано на основе компромисса между точностью восстановления и устойчивостью к помехам, то есть предлагаемый алгоритм предоставляет механизм адаптации к характеристикам конкретного сигнала. Выражение (30) есть обобщение теоремы В.А. Котельникова на пространство  $W_2^1$ . Из формулы (30) следует, что предложенный алгоритм восстановления функции  $f(t)$  допускает распараллеливание операций обработки в каналах сигнала и его производной. При этом использование отсчётов производной не увеличивает общий объём передаваемой информации, поскольку позволяет вдвое снизить частоту дискретизации без потери точности восстановления [2].

### **Реализация метода интерполяции на основе обобщенной теоремы В.А.Котельникова в весовом пространстве Соболева**

Для обработки изображений в весовом пространстве Соболева применен подход, аналогичный подходу [17], описанному ранее для Хургина – Яковлева, который описывает скалярное поле производных. Основное отличие заключается в использовании синтезирующих фильтров, адаптированных к норме весового пространства Соболева [18].

Обработка начинается с подготовки исходного изображения, которое преобразуется в черно-белое представление и нормализуется. Для обеспечения корректности последующей децимации применяется предварительная антиалиасинг-фильтрация с использованием филь-

тра Гаусса, что позволяет подавить высокочастотные компоненты, способные вызвать наложения спектра при уменьшении разрешения [19, 20].

На следующем этапе формируется скалярное поле производных изображения. Для этого в частотной области строится фильтр, вычисляющий сумму частных производных по пространственным координатам. Данный подход, аналогичный использованному в методе Хургина – Яковлева, позволяет работать с единым скалярным представлением градиента, что упрощает вычислительную схему без существенной потери информативности.

После подготовки исходных данных выполняется децимация как самого изображения, так и вычисленного поля производных. Коэффициент децимации равен двум по каждому из измерений, что соответствует четырехкратному уменьшению объема передаваемых данных. Важно отметить, что децимация применяется после антиалиасинг-фильтрации, что обеспечивает выполнение условий обобщенной теоремы В.А. Котельникова.

Ключевым этапом метода является восстановление изображения с использованием синтезирующих фильтров, адаптированных для весового пространства Соболева. Частотные характеристики этих фильтров определяются через параметр  $\alpha$ , задающий баланс между вкладом энергии исходного сигнала и энергии его производной в процесс восстановления. АЧХ фильтра для восстановления яркости имеет плавно спадающий характер, в то время как фильтр для восстановления производной обладает характеристикой, обеспечивающей выделение высокочастотных компонент.

Процесс восстановления осуществляется путем фильтрации децимированных данных в частотной области с последующим обратным преобразованием Фурье. Для интерполяции изображения до исходного разрешения применяется процедура, аналогичная используемой в алгоритме Хургина – Яковлева, но с синтезирующими функциями, соответствующими весовому пространству Соболева. Финальное изображение формируется как сумма восстановленных компонент яркости и производной с последующей нормализацией.

Особенностью предложенного подхода является возможность регулировки весового коэффициента  $\alpha$ , что позволяет адаптировать алгоритм к характеристикам конкретного изображения и требованиям к точности восстановления. Экспериментально установлено, что оптимальное значение параметра  $\alpha$  находится вблизи 0,5; что обеспечивает компромисс между точностью восстановления и устойчивостью к помехам. Но также стоит учитывать характер обрабатываемых изображений, для разных типов изображений  $\alpha$  может существенно изменяться, поэтому в некоторых случаях необходимо сделать алгоритм адаптивным по данному параметру.

### **Сравнение алгоритмов обработки изображений в весовом пространстве Соболева и с использованием представления Хургина – Яковлева**

Результаты экспериментальных исследований, продемонстрированные на рисунке 1, показывают значительные различия в эффективности рассматриваемых алгоритмов: 1 – весовое пространство Соболева  $\alpha = 0,5$ , 2 – весовое пространство Соболева  $\alpha = 0,3$ , 3 – представление Хургина – Яковлева. Метод на основе представления Хургина – Яковлева обеспечивает качество восстановления на уровне 26...28 дБ PSNR для стандартных тестовых изображений. Такой результат обусловлен использованием синтезирующих фильтров с различными частотными характеристиками, что обеспечивает точное восстановление в идеальных условиях, но снижает устойчивость к реальным искажениям.

В отличие от этого алгоритм в весовом пространстве Соболева демонстрирует более высокие показатели эффективности – 30...34 дБ PSNR. Улучшение на 4...6 дБ достигается за счет адаптивных характеристик синтезирующих фильтров, регулируемых параметром  $\alpha$ . Оптимальное значение  $\alpha \approx 0,5$  обеспечивает баланс между учетом информации о яркости и производных, что особенно эффективно для изображений с выраженной текстурной составляющей.

Анализ помехоустойчивости выявил принципиальные различия в поведении алгоритмов при наличии шумовых воздействий. Представление Хургина-Яковлева проявляет повышенную чувствительность к аддитивному гауссовскому шуму – при отношении сигнал-шум 20 дБ на входе качество восстановления снижается на 8...10 дБ. Данный эффект объясняется резкими частотными срезами треугольной и прямоугольной характеристик фильтров, которые усиливают высокочастотные шумовые компоненты.

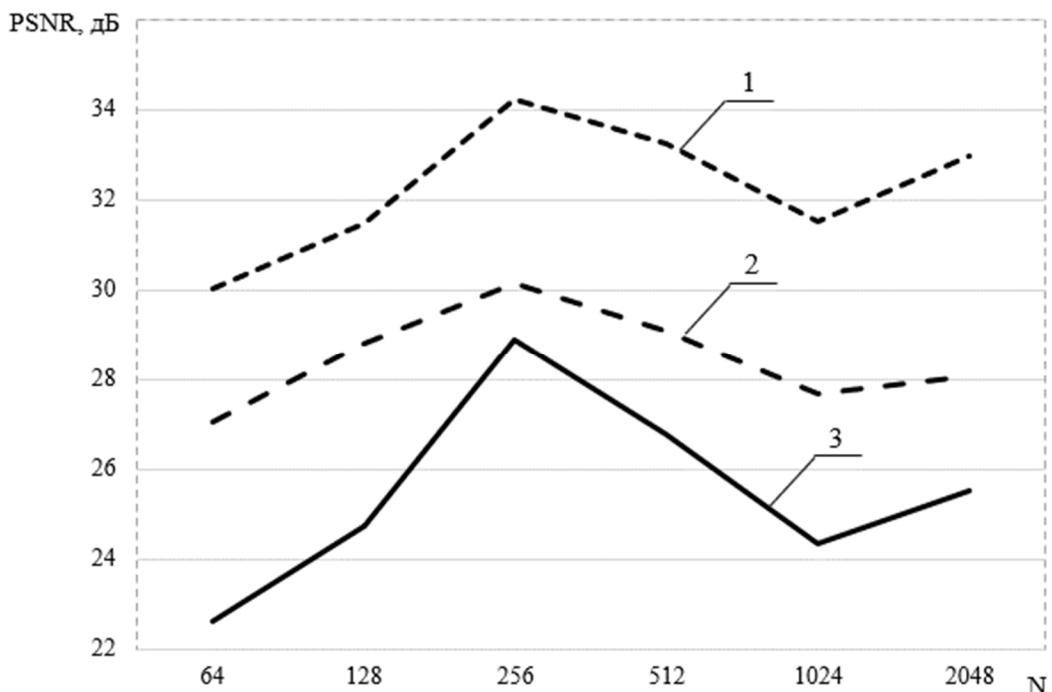


Рисунок 1 – График PSNR в зависимости от числа отсчётов  
Figure 1 – PSNR graph depending on the number of samples

Алгоритм обработки в пространстве Соболева демонстрирует существенно лучшую помехоустойчивость. При тех же условиях воздействия шума (20 дБ на входе) деградация качества восстановления не превышает 3...4 дБ. Плавные частотные характеристики фильтров с экспоненциальным затуханием обеспечивают естественное подавление высокочастотных шумовых составляющих. При этом параметр  $\alpha$  позволяет адаптировать степень сглаживания: уменьшение  $\alpha$  до 0,3 дополнительно повышает помехоустойчивость на 2...3 дБ ценой незначительного снижения четкости контуров.

Метод на основе представления Хургина – Яковлева наиболее эффективен в задачах, требующих максимального сохранения деталей изображения в условиях минимального уровня шумов. К таким областям относятся научная визуализация, обработка медицинских изображений высокого разрешения, а также системы сжатия с потерями, где допустимо применение дополнительных алгоритмов шумоподавления.

Алгоритм обработки изображений в весовом пространстве Соболева демонстрирует превосходство в практических приложениях, характеризующихся наличием шумов и необходимостью обработки в реальном времени. Наибольшая эффективность достигается в системах видеонаблюдения, мобильной фотографии, веб-приложениях и других сферах, где требуется баланс между качеством восстановления и вычислительной эффективностью. Возможность адаптивной настройки параметра  $\alpha$  делает данный метод особенно ценным для обработки разнородных изображений в автоматическом режиме.

### Заключение

В ходе проведенного исследования выполнено комплексное сравнение двух методов двухканальной обработки изображений: представления Хургина – Яковлева и алгоритма в

весовом пространстве Соболева. Экспериментально установлено, что оба метода позволяют снизить частоту дискретизации в 2 раза по каждому измерению без существенной потери информативности, однако демонстрируют различные характеристики на практике.

Алгоритм на основе весового пространства Соболева показал наилучшие результаты с PSNR 30...34 дБ, обеспечивая лучшую помехоустойчивость и практическую реализуемость за счет плавных частотных характеристик фильтров и адаптивного параметра  $\alpha$ . В то время как представление Хургина-Яковлева (PSNR 26...28 дБ) сохраняет преимущество для задач, требующих минимальной погрешности в идеальных условиях. Полученные результаты определяют целесообразность применения каждого метода в зависимости от конкретных требований к качеству восстановления и уровню шумов.

#### Библиографический список

1. Котельников В.А. О пропускной способности «эфира» и проволоки в электросвязи // Радиотехника. 1995. № 4-5. С. 42-55.
2. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике. М.: Физматгиз. 1962. 220 с.
3. Победоносцев В.А. Теорема о неравноотстоящих отсчетах // Зарубежная радиоэлектроника. 1996. № 8. С. 25-28.
4. Дмитриев В.Т., Лукьянов Д.И. Алгоритм маскирования на основе представления Хургина-Яковлева с использованием производных второго и третьего порядков // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2012. № 4. С. 13-17.
5. Дмитриев В.Т., Ву Хоанг Шон Применение трехканальной модификации алгоритма Хургина-Яковлева в алгоритмах первичного кодирования речевых сигналов // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2024. № 88. С. 3-14.
6. Илюшин М.В. Качество передачи речи и его оценка: учеб. пособие / Илюшин М.В., Дмитриев В.Т., Басов О.О., Тарусов В.А.; под общ. ред. Кириллова С.Н. Орел: Академия ФСО России. 2015. 104 с.
7. Хургин Я.И., Яковлев В.П. Финитные функции в физике и технике. М.: Наука, 1971. 408 с.
8. Андреев В.Г., Дмитриев В.Т. Алгоритм совместной реализации первичного кодека и маскиратора речевых сигналов с возможностью защиты фонограмм от фальсификаций // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2023. № 84. С. 66-76.
9. Кириллов С.Н., Дмитриев В.Т., Крысиев Д.Е., Попов С.С. Исследование качества передаваемой речевой информации при различном сочетании алгоритмов кодирования источника и канала связи в условиях действия помех // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2008. № 23. С. 53-56.
10. Дмитриев В.Т., Лантратов С.Ю. Адаптивный алгоритм кодирования на основе кодека CELP и модификации алгоритма Хургина – Яковлева // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2024. № 88. С.21-30.
11. Дмитриев В.Т., Харланова Е.А. Алгоритм кодирования речевых сигналов на основе представления Хургина – Яковлева и вейвлет-пакетного разложения в системах компьютерной телефонии // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2010. № 31. С. 98-101.
12. Дмитриев В.Т., Константинова Д.С. Алгоритм комплексной оценки качества речи в канале связи // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2016. № 56. С. 42-47.
13. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике: Монография. Изд. Ленингр. гос. универ. 1950 (1988). 336 с.
14. Кириллов С.Н., Бузыканов С.Н. Алгоритмы цифровой обработки сигналов в модифицированном пространстве Соболева // 3-я Международная конференция и выставка «Цифровая обработка сигналов и ее применение»: тез. докл. М., 2000. С. 167-169.
15. Котельников В.А. Теория потенциальной помехоустойчивости. М.: Госэнергоиздат, 1956. 152 с.
16. Прудников А.П. и др. Интегралы и ряды. М.: Наука, 1981. 800 с.
17. Кириллов С.Н., Бузыканов С.Н. Алгоритм распознавания телеметрических сигналов в модифицированном пространстве Соболева // Международная НТК «Проблемы передачи и обработки информации в сетях и системах телекоммуникаций»: материалы конф. – Рязань: РГРТА, 2001. С. 102-103.

18. Осипов Л.А. Коррекция дискретного спектра для восстановления образующего его сигнала // Радиотехника. 1999. № 12. С. 39-43.
19. Джерри А.Дж. Теорема отсчетов Шеннона, ее различные обобщения и приложения. Обзор // ТИИЭР. 1977. Т. 65. № 11. С. 53-89.
20. Солодовников А.И., Спиваковский А.М. Основы теории и методы спектральной обработки информации. 1986. 272 с.

UDC 621.397

## ANALYSIS OF TWO-CHANNEL IMAGE PROCESSING METHODS BASED ON THE KHURGIN-YAKOVLEV REPRESENTATION AND THE SOBOLEV WEIGHTED SPACE

**V. T. Dmitriev**, Dr. in technical sciences, associate professor, Head of the Department, RSREU, Ryazan, Russia;  
[orcid.org/0000-0001-5521-6886](http://orcid.org/0000-0001-5521-6886), e-mail: vol77@rambler.ru  
**E. S. Cherentaeva**, postgraduate student, RSREU, Ryazan, Russia;  
[orcid.org/0000-0002-5580-3033](http://orcid.org/0000-0002-5580-3033), e-mail: culikoa4199@yandex.ru  
**M. A. Cherentaev**, postgraduate student, RSREU, Ryazan, Russia;  
[orcid.org/0000-0002-0282-7250](http://orcid.org/0000-0002-0282-7250), e-mail: cherentaev.mikhail@gmail.com

*A comparative analysis of two methods of two-channel image processing based on the application of the Khurgin-Yakovlev representation and Sobolev weight space algorithm, using not only information about the signal, but also about its derivatives, is carried out. The aim of the work is to identify the advantages and limitations of each method in image processing and transmission. The characteristics of synthesizing filters are calculated. As a result of experimental studies on image restoration for the considered methods, the quality of image restoration of various types was assessed. Noise immunity of the considered algorithms to the effects of quantization noise and additive interference in communication channel is analyzed. The authors show that the method of processing based on Sobolev weight space, using regenerating filters with exponential attenuation, has significantly better feasibility, although it is somewhat inferior in accuracy to the Khurgin-Yakovlev representation with ideal filters. As a result of experimental studies, it has been established that both methods provide a significant reduction in the redundancy of transmitted information without significant deterioration in visual quality.*

**Keywords:** two-channel image processing, Khurgin-Yakovlev representation, Sobolev weight space, synthesizing filters, image reconstruction, gradient methods, processing using derivatives, noise immunity, image compression.

**DOI:** 10.21667/1995-4565-2025-94-46-58

### References

1. Котельников В.А. О пропускной способности «гифры» и проволоки в радиосвязи. *Radiotekhnika*. 1995, no. 4-5, pp. 42-55 (in Russian).
2. Хургин Я.И., Яковлев В.П. *Методы теории целых функций в радиофизике, теории связи и оптике*. Moscow: Fizmatgiz. 1962, 220 p. (in Russian).
3. Победонесцев В.А. Теорема о неравнотождественных оценках. *Zarubezhnaja radioelektronika*. 1996, no. 8, pp. 25-28. (in Russian).
4. Дмитриев В.Т., Лук'янов Д.И. Алгоритм маскирования на основе представления Хургина-Яковлева с использованием производных второго и третьего порядка. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radio-tehnicheskogo universiteta*. 2012, no. 4, pp. 13-17. (in Russian).
5. Дмитриев В.Т., Vu Hoang Shon. Применение трехканальной модификации алгоритма Хургина-Яковлева в алгоритмах первичного кодирования речевых сигналов. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radio-tehnicheskogo universiteta*. 2024, no. 88, pp. 3-14. (in Russian).

6. **Iljushin M.V.** *Kachestvo peredachi rechi i ego ocenka: uchebnoe posobie* / Iljushin M.V., Dmitriev V.T., Basov O.O., Tarusov V.A.; pod obshh. red. Kirillova S.N. Orel: Akademija FSO Rossii. 2015, 104 p. (in Russian).
7. **Hurgin Ja.I., Jakovlev V.P.** *Finitnye funktsii v fizike i tehnike*. Moscow: Nauka. 1971, 408 p. (in Russian).
8. **Andreev V.G., Dmitriev V.T.** Algoritm sovmestnoj realizacii pervichnogo kodeka i maskiratora rechevyh signalov s vozmozhnost'ju zashhity fonogramm ot fal'sifikacij. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2023, no. 84, pp. 66-76. (in Russian).
9. **Kirillov S.N., Dmitriyev V.T., Krysyayev D.Ye., Popov S.S.** Issledovaniye kachestva pere-davayemoy rechevoy informatsii pri razlichnom sochetanii algoritmov kodirovaniya istochnika i kanala svyazi v usloviyakh deystviya pomekh. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2008, no. 23, pp. 53-56. (in Russian).
10. **Dmitriyev V.T., Lantratov S.Yu.** Adaptivnyy algoritm kodirovaniya na osnove kodeka CELP i modifikatsii algoritma Khurgina-Yakovleva. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2024, no. 88, pp. 21-30. (in Russian).
11. **Dmitriyev V.T., Kharlanova Ye.A.** Algoritm kodirovaniya rechevykh signalov na osnove pred-stavleniya Khurgina – Yakovleva i veyvlet-paketenogo razlozheniya v sistemakh komp'yuternoy telefonii. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2010, no. 31, pp. 98-101. (in Russian).
12. **Dmitriev V.T., Konstantinova D.S.** Algoritm kompleksnoj ocenki kachestva rechi v kanale svjazi. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2016, no. 56, pp. 42-47. (in Russian).
13. **Sobolev S.L.** *Nekotorye primenenija funkcional'nogo analiza v matematicheskoj fizike*. Monografija, izd. Leningr. Gos. univer. 1950 (1988). 336 p. (in Russian).
14. **Kirillov S.N., Buzykanov S.N.** Algoritmy cifrovoj obrabotki signalov v modificirovannom pros-transtve Soboleva. 3-ja Mezhdunarodnaja konferencija i vystavka «Cifrovaja obrabotka signalov i ee prime-nenie»: tez. dokl. Moscow. 2000, pp. 167-169. (in Russian).
15. **Kotel'nikov V.A.** *Teorija potencial'noj pomehoustojchivosti*. Moscow: Gosjenergoizdat. 1956, 152 p. (in Russian).
16. **Prudnikov A.P. i dr.** *Integraly i rjady*. Moscow: Nauka. 1981, 800 p. (in Russian).
17. **Kirillov S.N., Buzykanov S.N.** Algoritm raspoznavaniya telemetricheskikh signalov v modificirovan-nom prostranstve Soboleva. Mezhdunarodnaja NTK «Problemy peredachi i obrabotki informacii v setjah i sistemah telekommunikacij»: materialy konf. – Rjazan': RGRTA. 2001, pp. 102-103. (in Russian).
18. **Osipov L.A.** Korrekcija diskretnogo spektra dlja vosstanovlenija obrazujushhego ego signala. *Radio-tehnika*. 1999, no. 12, pp. 39-43. (in Russian).
19. **Dzherri A.Dzh.** Teorema otschetov Shennona, ee razlichnye obobshchenija i prilozhenija. Obzor. *TIIJeR*. 1977, vol. 65, no. 11, pp. 53-89. (in Russian).
20. **Solodovnikov A.I., Spivakovskij A.M.** *Osnovy teorii i metody spektral'noj obrabotki informacii*. 1986. 272 p. (in Russian).