

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ, УПРАВЛЕНИЕ И ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

УДК 681.515:004.942

РАЗРАБОТКА МОДЕЛИ ЦИФРОВОЙ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ С УЧЕТОМ ОСОБЕННОСТЕЙ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

С. В. Скворцов, д.т.н., профессор РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0001-9495-4953, e-mail: s.v.skvor@gmail.com

В. И. Хрюкин, к.т.н., доцент РГРТУ, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0002-7736-115X, e-mail: vi_x@mail.ru

Т. С. Скворцова, к.т.н., доцент Академии ФСИН России, Рязань, Россия;
orcid.org/0000-0001-7504-5973, e-mail: t.s.skvortsova@yandex.ru

Рассмотрена задача разработки модели цифровой системы с переменной структурой, учитывающей особенности определения состояния объекта управления. Целью работы является анализ влияния дискретизации сигнала ошибки и способа получения информации о координатах объекта на устойчивость системы управления. Предложено исследовать динамику цифровой системы с переменной структурой в фазовом пространстве состояния непрерывной системы, что дает возможность использовать ее математическую модель для описания динамики объекта управления с цифровым контроллером. Получены аналитические выражения для определения положений гиперплоскостей переключения в фазовом пространстве, позволяющие обосновать выбор допустимой области устойчивого движения системы в квазискользящем режиме. В экспериментальной части показан пример расчета параметров цифрового устройства управления объектом, описываемым дифференциальным уравнением второго порядка, подтверждающий возможность практического использования разработанной модели.

Ключевые слова: система с переменной структурой, объект управления, гиперплоскость переключения структуры, пространство состояния, вектор фазовых координат, скользящий режим, конечные разности, непрерывные разности, цифровой контроллер.

DOI: 10.21667/1995-4565-2026-95-158-170

Введение

Создание высококачественных систем управления значительно затрудняется, если объект управления (ОУ) подвергается непредсказуемым и неконтролируемым воздействиям. Такие воздействия вызывают отклонение регулируемых координат от требуемых значений, и, если их не учитывать при проектировании, то они могут стать причиной неудовлетворительной работы систем управления. Значительные трудности возникают также при разработке систем в случае, когда характеристики ОУ существенно изменяются в процессе функционирования.

Очевидно, что повышение качества системы управления невозможно без учета этих факторов и требует использования нелинейных законов управления, к числу которых относятся методы с разрывным управлением [1]. Использование такого управления, при котором осуществляется скользящий режим вдоль многообразия поверхностей переключения, позволяет при определенных условиях добиться инвариантности системы как к внешним воздействиям и возмущениям, так и к изменению параметров ОУ [2].

Задача синтеза в системах с разрывными воздействиями обычно сводится к выбору поверхностей в фазовом пространстве состояния, на которых функция переключения претерпевает разрывы. При выполнении определенных соотношений в таких системах с переменной структурой (СПС) может возникнуть специфический вид движений – так называемый скользящий режим. Причем, как показано в [2], если функция управления формируется из регулируемой величины и ее производных, то движение в скользящем режиме не зависит от параметров ОУ и внешних воздействий и определяется только коэффициентами уравнений гиперплоскости переключения. Этот факт и используется при построении систем, которые обеспечивают с некоторого момента, движение в скользящем режиме с желаемыми динамическими свойствами.

Существенно, что, хотя для формирования функции управления не требуется информация о параметрах объекта и возмущениях, возникает необходимость в использовании, помимо координаты ошибки, ее производных, число которых определяется порядком системы. С практической точки зрения применение такого подхода наталкивается на существенные технические трудности, связанные с вычислением производных высоких порядков.

Традиционный подход в исследовании таких систем, т.е. в определении уровней воздействий по координате ошибки и ее производным, при которых в СПС существует скользящий режим, основывается на приближенных методах, например гармонического баланса или статистической линеаризации [2], и последующем анализе полученной системы частотными методами.

Однако реализация таких систем с переменной структурой приводит к существенному усложнению законов управления и диктует необходимость использования цифровых устройств управления (микроконтроллеров). В связи с этим приходится учитывать влияние на динамику системы ряда особенностей, присущих программной реализации законов управления: амплитудного квантования сигналов и их дискретизации по времени, способов формирования приближенных значений производных и т.д. Нелинейный характер законов управления еще более усложняет анализ таких систем. Кроме того, жесткие ограничения на параметры микроконтроллера и работа в реальном масштабе времени требуют наиболее эффективного использования аппаратных средств микропроцессорного устройства и расчета его производительности при выполнении задач управления.

Использование цифровых способов получения этой информации приводит к изменению динамики системы по сравнению с СПС с полной информацией о фазовых координатах. Так, существенное влияние на поведение системы оказывает запаздывание, вносимое микропроцессорным регулятором. Кроме того, в цифровой СПС вместо производных от измеряемого сигнала используются их приближенные значения, определяемые через конечные разности. Время τ задержки сигнала ошибки для вычисления конечных разностей определяет помехозащищенность системы. Чем больше эта величина, тем выше помехозащищенность. С другой стороны, увеличение запаздывания приводит к потере качества переходного процесса (появление квазискользящего режима) и даже устойчивости СПС. В связи с этим определение допустимого времени задержки при формировании приближенных значений производных от измеряемой координаты является одной из важнейших задач при проектировании СПС с цифровыми устройствами.

Процедура проектирования таких систем управления на базе микропроцессоров включает этапы анализа задачи управления, выбора структуры системы автоматического управления и синтеза цифровых алгоритмов [3].

На этапе анализа строятся математические модели объекта управления и внешней среды (в виде задающих и возмущающих воздействий), формулируются цели управления как формализованные критерии качества.

Выбор структуры предусматривает определение основных функциональных элементов системы (уровней иерархии, алгоритмических модулей) и общего характера их взаимодействия. Структура зависит от класса решаемых системой задач, требований к процессу

управления, полноты априорной и текущей информации о переменных состояния, внешних воздействиях и параметрах объекта.

На последнем этапе синтеза осуществляется разработка алгоритмов управления, фильтрации, переключения структуры, решается задача оптимизации системы по локальным критериям качества. При проектировании этап синтеза алгоритмов управления считается наиболее ответственным и трудоемким. Его конечным результатом являются аналитические выражения, представленные в удобной для программирования форме.

Таким образом, сложность и трудоемкость проектирования микропроцессорных систем управления при жестких требованиях к эффективности их функционирования делают актуальной проблему разработки методов и средств исследования цифровых систем с переменной структурой. В статье решается задача разработки математической модели цифровой системы управления с переменной структурой, построенной на базе микропроцессоров (микроконтроллеров). Такая модель должна учитывать особенности функционирования микропроцессорной системы управления, связанные с дискретизацией сигнала ошибки и реализацией алгоритмов определения состояния ОУ.

Теоретическая часть

С развитием теории нелинейных систем управления и широким внедрением машинных методов проектирования получили распространение методы синтеза систем управления, в том числе и СПС, во временной области, в частности метод пространства состояний [1]. Этот метод использует дифференциальные векторно-матричные формы описания динамики системы и не накладывает ограничений на число входных и выходных переменных ОУ. Введение в рассмотрение вектора состояния позволяет наиболее полно учесть внутренние процессы системы, скрытые от описания объекта управления передаточной функцией.

Рассмотрим свободное движение цифровой СПС, динамика которой описывается векторно-разностными уравнениями вида:

$$\mathbf{x}[(m+1)T] = \mathbf{F}\mathbf{x}[mT] + \mathbf{H}u[mT], \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

$$u[mT] = \begin{cases} u^+[mT] & \text{при } s[mT] > 0; \\ u^-[mT] & \text{при } s[mT] < 0, \end{cases} \quad (2)$$

где T – время дискретизации (формирования микроконтроллером управляющего воздействия); $\mathbf{x}[mT]$ – n -мерный вектор состояния системы; $u[mT]$ – скалярное управление; $s[mT]$ – функция переключения. Матрицы \mathbf{F} , \mathbf{H} согласно [4, 5] определяются как:

$$\mathbf{F} = \exp(\mathbf{A}T),$$

$$\mathbf{H} = \left[\int_0^T \exp(\mathbf{A}v) dv \right] \mathbf{B},$$

где \mathbf{A} – матрица размером $n \times n$, описывающая неизменяемую часть СПС:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & \dots & -a_n \end{pmatrix},$$

a_1, a_2, \dots, a_n – коэффициенты линейного дифференциального уравнения, описывающего динамику ОУ [1]; \mathbf{B} – матрица коэффициентов управления размером $n \times 1$ вида:

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b \end{pmatrix}.$$

В соответствии с [3, 5, 6] для фиксированной структуры в дискретные моменты $t = mT$ фазовые характеристики линейной по управлению системы (1) будут соответствовать фазовым координатам СПС, описываемой векторным дифференциальным уравнением:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u, \tag{3}$$

$$u = \Psi \tilde{\mathbf{x}}, \tag{4}$$

где $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ – n -мерный вектор фазовых координат (вектор состояния в фазовом про-

странстве), определяемых через производные от сигнала ошибки системы $x(t) = x_1(t), \dots, x_i(t) = \dot{x}_{i-1}(t), i = \overline{2, n}$; $\Psi = \|\psi_1 \ \psi_2 \ \dots \ \psi_{n-1} \ 0\|$ – матрица коэффициентов размером $1 \times n$ с элементами

$$\psi_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{при } \tilde{x}_i s[mT] > 0; \\ \beta_i & \text{при } \tilde{x}_i s[mT] < 0, i = \overline{1, n-1} \end{cases}, \tag{5}$$

$\tilde{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$ – n -мерный вектор приближенных значений фазовых координат, определяемых че-

рез конечные разности, который можно представить как:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{QNM}\mathbf{x}_1, \tag{6}$$

$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & q_n \end{pmatrix}$ – диагональная матрица размером $n \times n$ с элементами $q_i = \frac{(-1)^{i-1}}{\tau^{i-1}}$,

$i = \overline{1, n}$, где $\tau = qT$ – время задержки сигнала ошибки для вычисления приближенных значений производных через конечные разности ($q = 1, 2, 3, \dots$); \mathbf{N} – верхняя треугольная матрица биномиальных коэффициентов размером $n \times n$;

$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & m_n \end{pmatrix}$ – диагональная матрица размером $n \times n$ с элементами $m_j = (-1)^{j+1}$,

$j = \overline{1, n}$,

$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} x_1[mT] \\ x_1[mT - \tau] \\ \vdots \\ x_1[mT - (n-1)\tau] \end{pmatrix}$ – n -мерный вектор задержанных значений сигнала ошибки $x_1[mT]$.

В (5) функция переключения определяется выражением:

$$s[mT] = \mathbf{C}\tilde{\mathbf{x}}, \tag{7}$$

где $\mathbf{C} = \|c_1 \ c_2 \ \dots \ c_{n-1} \ 1\|$ – матрица коэффициентов функции переключения размером $n \times 1$.

В соответствии с [7] при $\tau \rightarrow 0$ и выполнении условий существования скользящего режима в системе (3) на гиперплоскости S , задаваемой уравнением:

$$\mathbf{C} \mathbf{x}(t) = 0, \quad (8)$$

возникает движение в скользящем режиме. Использование вместо производных конечных разностей, формируемых в соответствии с (6), приводит к тому, что движение изображающей точки происходит не по S , а в некоторой ее окрестности Γ , величина которой зависит от τ , T и параметров системы (3). При этом, рассматривая движение вблизи S , можно пренебречь влиянием неточности формирования управляющего воздействия в целом и рассматривать только влияние неидеальности формирования функции переключения на динамику системы.

Покажем возможность такого подхода. Для этого, не теряя общности, положим $\alpha_i = |\beta_i|$ для всех $i = \overline{1, n}$. Тогда, решая совместно (4), (5), получим следующее выражение:

$$u = \text{sign}(s[mT]) \left| \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i(t) \right|. \quad (9)$$

Из (9) видно, что именно функция переключения определяет знак управляющего воздействия, а следовательно, наибольшим образом влияет на динамику СПС. Поэтому в дальнейшем будем полагать, что управление в системе (3) имеет вид:

$$u = \Psi \mathbf{x}(t). \quad (10)$$

Вначале рассмотрим случай, когда время дискретизации T имеет малую величину по сравнению со значением τ и поэтому не влияет на динамику СПС существенным образом. Тогда можно отметить, что значения функции $s[mT]$ в дискретные моменты времени $t = mT$ будут соответствовать значениям непрерывной функции

$$s(t) = \mathbf{C} \bar{\mathbf{x}}, \quad (11)$$

где $\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$ – n -мерный вектор приближенных значений фазовых координат, определяемых

через непрерывные разности, который можно по аналогии с (6) представить как:

$$\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{Q} \mathbf{N} \mathbf{M} \bar{\mathbf{x}}_1. \quad (12)$$

Здесь $\bar{\mathbf{x}}_1 = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_1(t-\tau) \\ \vdots \\ x_1[t-(n-1)\tau] \end{pmatrix}$ – n -мерный вектор задержанных значений сигнала ошибки $x_1(t)$.

Изменение структуры в системе, функция переключения которой формируется в виде (11), будет происходить не на идеальной гиперплоскости S , а на гиперплоскостях, положение которых в каноническом пространстве состояния (фазовом пространстве) определяется выражением:

$$s(t) = \mathbf{G} \mathbf{x}(t) = 0, \quad (13)$$

где $\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 & \dots & g_n \end{pmatrix}$ – матрица коэффициентов размером $1 \times n$.

Покажем возможность представления элементов матрицы \mathbf{G} через параметры системы (3), коэффициенты c_i , определяющие положение идеальной гиперплоскости S в фазовом пространстве, коэффициенты управляющих воздействий α_i , β_i ($i = \overline{1, n-1}$) и время задержки τ . Для этого рассмотрим движение изображающей точки, соответствующей одной из возможных структур СПС, в окрестности S . В этом случае координаты системы остаются непрерывными, что дает возможность произвести разложение элементов вектора $\bar{\mathbf{x}}_1$ в ряд Тейлора [4, 8]:

$$\bar{\mathbf{x}}_1 = \mathbf{P} \mathbf{Z} \mathbf{x}'. \quad (14)$$

Здесь \mathbf{P} и \mathbf{Z} матрицы с элементами

$$p_{ij} = [(i-1)\tau]^{j-1}, \quad i = \overline{1, n}; \quad j = \overline{1, \infty};$$

$$z_{jk} = \frac{(-1)^{j-1}}{(j-1)!} \delta_{jk}, \quad j, k = \overline{1, \infty},$$

где δ_{jk} – символ Кронекера, $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \\ \vdots \end{pmatrix}$ – вектор производных.

Выделим элементы вектора \mathbf{x}' при $k > n$ в вектор высших производных:

$$\mathbf{x}^* = \begin{pmatrix} x_{n+1}(t) \\ \vdots \\ x_k(t) \\ \vdots \end{pmatrix}$$

и выразим его элементы через фазовые координаты системы $\mathbf{x}(t)$, а также параметры матриц \mathbf{A} , \mathbf{B} и коэффициенты $c_i, \Psi_i, i = \overline{1, n-1}$.

Решение системы (3) с одной из возможных структур управления из (10) в случае отсутствия кратных корней характеристического уравнения в соответствии с [4, 8] будет иметь вид:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{L} e^{\lambda t} \mathbf{W}, \tag{15}$$

где \mathbf{L} – матрица размером $n \times n$ вида:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix},$$

в которой $\lambda_i (i = \overline{1, n})$ – корни характеристического полинома, соответствующего системе (3) с одной из структур управления ψ_i ; $e^{\lambda t}$ – диагональная матрица размером $n \times n$ с элементами $e^{\lambda_i t}$; $\mathbf{W} = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ – n -мерный вектор произвольных постоянных, определяемых начальными условиями.

Представление высших производных через фазовые координаты и параметры системы

На основании (15) вектор высших производных \mathbf{x}^* можно представить в виде

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{\Lambda} e^{\lambda t} \mathbf{W}, \tag{16}$$

где

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & \lambda_1^{n+1} & \dots & \lambda_1^k & \dots \\ \lambda_2^n & \lambda_2^{n+1} & \dots & \lambda_2^k & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \lambda_n^n & \lambda_n^{n+1} & \dots & \lambda_n^k & \dots \end{pmatrix}.$$

Выразим вектор высших производных через фазовые координаты системы (3):

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{Y} \mathbf{x}(t), \tag{17}$$

или с учетом (15), (16):

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{Y}\mathbf{L}, \quad (18)$$

где \mathbf{Y} – матрица связности.

Элементы этой матрицы можно определить следующим образом. Так как матрица \mathbf{L} невырожденная ($\det \mathbf{L} \neq 0$), то умножив (18) справа на обратную матрицу \mathbf{L}^{-1} , получим:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{\Lambda}\mathbf{L}^{-1},$$

которая в соответствии с [4] может быть представлена в виде

$$\mathbf{Y} = \frac{\mathbf{\Lambda}\mathbf{L}^*}{\det \mathbf{L}}, \quad (19)$$

где $\mathbf{L}^* = \|L_{il}\|_{n \times n}$ – присоединенная матрица, составленная из алгебраических дополнений к матрице \mathbf{L} ; $\det \mathbf{L}$ – определитель Вандермонда. В соответствии с [9] элементы матрицы \mathbf{Y} будут определяться в виде:

$$y_{lk} = \frac{\lambda_1^k L_{1l} + \lambda_2^k L_{2l} + \dots + \lambda_n^k L_{nl}}{\det \mathbf{L}}. \quad (20)$$

Здесь можно заметить, что стоящее в числителе выражение подобно определителю Вандермонда [9], в котором заменены члены l -го столбца на элемент λ_i^k ($i = \overline{1, n}; k \geq n$), т. е.

$$y_{lk} = \Delta_{lk} / \det \mathbf{L},$$

(I)

$$\text{где } \Delta_{lk} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^k & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^k & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^k & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Выполним эквивалентные преобразования определителя Δ_{lk} . Сначала расположим его столбцы по возрастающим степеням λ_j :

$$\Delta_{lk} = (-1)^{n-l} \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{l-2} & \lambda_1^l & \lambda_1^{l+1} & \dots & \lambda_1^{n-1} & \lambda_1^k \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{l-2} & \lambda_2^l & \lambda_2^{l+1} & \dots & \lambda_2^{n-1} & \lambda_2^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{l-2} & \lambda_n^l & \lambda_n^{l+1} & \dots & \lambda_n^{n-1} & \lambda_n^k \end{vmatrix}.$$

Затем дополним полученный определитель так, чтобы первые n его строк были эквивалентны n первым строкам определителя Вандермонда порядка $k+1$:

$$\Delta_{lk} = (-1)^{n-l} \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1^{l-2} & \lambda_1^{l-1} & \lambda_1^l & \dots & \lambda_1^n & \lambda_1^{n+1} & \dots & \lambda_1^{k-1} & \lambda_1^k \\ 1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_2^{l-2} & \lambda_2^{l-1} & \lambda_2^l & \dots & \lambda_2^n & \lambda_2^{n+1} & \dots & \lambda_2^{k-1} & \lambda_2^k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \dots & \lambda_n^{l-2} & \lambda_n^{l-1} & \lambda_n^l & \dots & \lambda_n^n & \lambda_n^{n+1} & \dots & \lambda_n^{k-1} & \lambda_n^k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & (-1)^{n+l+1} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Чтобы вычислить полученный детерминант, воспользуемся приемом, примененным в [9] для вычисления определителя Вандермонда: из каждого последующего столбца вычитается предыдущий, умноженный на λ_1 . В результате все элементы первой строки, за исключением

«1», замещаются нулями, а $(\lambda_i - \lambda_1)$, $i = \overline{2, n}$, выносятся за знак определителя. Это позволяет записать:

$$\Delta_{lk} = \begin{vmatrix} 1 & \dots & \lambda_2^{l-3} & \lambda_2^{l-2} & \lambda_2^{l-1} & \dots & \lambda_2^{n-1} & \lambda_2^n & \lambda_1^{n+1} & \dots & \lambda_2^{k-2} & \lambda_2^{k-1} \\ 1 & \dots & \lambda_3^{l-3} & \lambda_3^{l-2} & \lambda_3^{l-1} & \dots & \lambda_3^{n-1} & \lambda_3^n & \lambda_2^{n+1} & \dots & \lambda_3^{k-2} & \lambda_3^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & \lambda^{l-3} & \lambda^{l-2} & \lambda^{l-1} & \dots & \lambda^{n-1} & \lambda^n & \lambda^{n+1} & \dots & \lambda^{k-2} & \lambda^{k-1} \\ 0 & \dots & 0 & (-1)^{n+l+1} & -\lambda_1(-1)^{n+l+1} & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \lambda_1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & \lambda_1 \end{vmatrix} \times$$

$$\times (-1)^{n-l} \prod_{i=2}^n (\lambda_i - \lambda_1).$$

Выполняя подобную операцию n раз, получаем детерминант $(k - n + 1)$ -го порядка, а выражение для вычисления Δ_{lk} преобразуется к виду:

$$\Delta_{lk} = \begin{vmatrix} \sigma_{n-l+1} & \sigma_{n-l+2} & \sigma_{n-l+3} & \sigma_{n-l+4} & \dots & \pm\sigma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & \sigma_1 & -\sigma_2 & \sigma_3 & \dots & \dots & \pm\sigma_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & -\sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \dots & \pm\sigma_{n-1} & \pm\sigma_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & -1 & \sigma_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \pm\sigma_n \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -\sigma_1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \pm\sigma_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & \sigma_1 \end{vmatrix} \times$$

$$\times (-1)^{n-l} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

Учитывая, что в соответствии с [4, 9]

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i) = \det \mathbf{L},$$

а элементы определителей вычисляются как:

$$\sigma_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = -a_n = -d_n; \sigma_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \dots + \lambda_{n-1}\lambda_n = -a_{n-1} + \psi_{n-1} = d_{n-1}; \dots;$$

$$\sigma_n = \lambda_1\lambda_2 \dots \lambda_n = (-1)^n (a_1 + \psi_1) = (-1)^n d_1,$$

получаем:

$$\Delta_{lk} = \det \mathbf{L} (-1)^{k-n+1} \Delta_d(l, k - n + 1), \tag{21}$$

где

$$\Delta_d(l, k - n + 1) = \begin{vmatrix} d_l & d_{l-1} & d_{l-2} & \dots & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & d_n & d_{n-1} & \dots & d_3 & d_2 & d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & d_n & d_{n-1} & \dots & d_3 & d_2 & d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & d_n & d_{n-1} & d_{n-2} & \dots & \dots & \dots & d_2 & d_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & d_n & d_{n-1} & d_{n-2} & \dots & \dots & d_3 & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & d_n \end{vmatrix}.$$

Детерминант $\Delta_d(l, k - n + 1)$ зависит от индекса l , величина которого определяет вид первой строки. Порядок этого определителя равен $k - n + 1$. Используя (21) для нахождения (20), получаем:

$$y_{lk} = (-1)^{k-n+1} \Delta_d(l, n - k + 1).$$

Тогда в соответствии с (17) высшие производные будут определяться выражением

$$x_{k+1} = (-1)^{k-n+1} \sum_{l=1}^n \Delta_d(l, k - n + 1) x_l, \quad k = \overline{n, \infty}. \quad (22)$$

Полученное соотношение (22) совместно с (13), (14) позволяет найти элементы матрицы \mathbf{G} , при которых в цифровой системе, описываемой векторным дифференциальным уравнением (3) с управлением (4), существует квазискользящий режим. В соответствии с [10] значения этих элементов определяются как:

$$g_l = c_l + \delta c_l, \quad l = \overline{1, n}. \quad (23)$$

Здесь

$$\delta c_l = \sum_{i=2}^{l-1} (-1)^{l-1} \frac{c_i \tau^{l-i}}{(l-i)!} \sum_{v=1}^{i-1} (-1)^v N_{i-1}^v v^{l-1} + \sum_{k=n}^{\infty} \Delta(l, k - n + 1) \sum_{i=2}^n (-1)^i \frac{c_i \tau^{k+i+1}}{k!} \sum_{v=1}^{i-1} (-1)^v N_{i-1}^v v^k, \quad (24)$$

где N_{i-1}^v – биномиальные коэффициенты (элементы матрицы \mathbf{N}).

Выражение (24) представляет собой бесконечный ряд, члены которого выражаются через параметры системы (3), а также зависят от коэффициентов c_i , определяющих положение идеальной гиперплоскости S в фазовом пространстве, коэффициентов ψ_i и времени τ . Учитывая быструю сходимость ряда, при практическом применении (24) достаточно воспользоваться несколькими его первыми членами для получения значений δc_l .

По известным значениям g_i определяются уравнения 2^{n-1} гиперплоскостей, которые образуют область Γ , внутри которой будет происходить движение изображающей точки в квазискользящем режиме. Для СПС, описываемой соотношением (3) с управлением (10), уравнения (23), (24) примут вид:

$$\mathbf{C}^* \mathbf{x}(t) = 0, \quad (25)$$

где $\mathbf{C}^* = \left\| c_1^* \quad c_2^* \quad \dots \quad c_{n-1}^* \quad 1 \right\|$ – матрица коэффициентов размера $1 \times n$ с элементами $c_i^* = g_i / g_n$, $i = \overline{1, n-1}$.

Для того, чтобы изображающая точка после попадания в область Γ не покинула ее, на основании [7] достаточно выполнения следующих условий, где $c_0^* = 0$:

$$\begin{cases} b\alpha_i > \max_{a_i, a_n, c_i} (c_{i-1}^* - a_i - c_{n-1}^* c_i^* + a_n c_i^*); \\ b\beta_i > \max_{a_i, a_n, c_i} (c_{i-1}^* - a_i - c_{n-1}^* c_i^* + a_n c_i^*), \quad i = \overline{1, n-1}. \end{cases} \quad (26)$$

Выражения (26) в соответствии с (22) - (24) накладывают ограничения на величину τ и позволяют определить допустимые ее значения, при которых в системе существует квазискользящий режим, либо при фиксированной величине τ найти диапазон возможных значений c_i .

Практическая часть

Покажем возможность использования полученных соотношений на практическом примере. Пусть имеется цифровая система с переменной структурой, линейная часть (объект управления) которой описывается дифференциальным уравнением второго порядка с характеристическим уравнением вида:

$$\lambda^2 + b_2 \lambda + b_1 = 0,$$

где $b_2 = a_2$, $b_1 = a_1 + \psi_1$. Объект управления является двойным интегрирующим устройством (т.е. параметры $a_1 = a_2 = 0$). Характеристики алгоритма управления, реализуемые микроконтроллером, имеют следующие значения: коэффициенты $b = 1$, $\alpha_1 = 100$, $\beta_1 = -100$; постоянные времени $\tau = 0,05$ с, $T = 0,0005$ с. Требуется определить область допустимых значений коэффициентов функции переключения, при которых в системе существует квазискользкий режим.

При заданных параметрах ОУ корни характеристического уравнения $\lambda_1 = \lambda_2 = 10$. Учитывая, что $\tau \gg T$, при определении границ области существования квазискользкого режима можно воспользоваться изложенной выше методикой. В соответствии с (23) имеем:

$$g_1 = c_1 + \delta c_1; g_2 = 1 + \delta c_2.$$

Используя (24), определяем:

$$\delta c_1 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\tau^{k-1}}{k!} \Delta_d(1, k-1); \delta c_2 = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\tau^{k-1}}{k!} \Delta_d(2, k-1),$$

где

$$\Delta_d(1,1) = b_1; \quad \Delta_d(1,2) = \begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ 1 & b_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_d(1,3) = \begin{vmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 1 & b_2 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \end{vmatrix}; \dots;$$

$$\Delta_d(2,1) = b_2; \quad \Delta_d(2,2) = \begin{vmatrix} b_2 & b_1 \\ 1 & b_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_d(2,3) = \begin{vmatrix} b_2 & b_1 & 0 \\ 1 & b_2 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2 \end{vmatrix}; \dots$$

В итоге будем иметь:

$$c_1^* = \frac{g_1}{g_2} = \frac{c_1 + \frac{(a_1 + \psi_1)\tau}{2} \left\{ 1 + \frac{a_2\tau}{3} + \frac{[a_2 - (a_1 + \psi_1)]\tau^2}{12} + \dots \right\}}{1 + \frac{\tau}{2} \left\{ a_2 + \frac{a_2^2 - (a_1 + \psi_1)\tau}{3} + \frac{[a_2^3 - 2a_2(a_1 + \psi_1)\tau^2]}{12} + \dots \right\}}, \quad (27)$$

а соотношения (26) примут вид

$$\begin{cases} \alpha_1 > -a_1 - [c_1^*(\alpha_1)]^2 + a_2 c_1^*(\alpha_1); \\ \beta_1 < -a_1 - [c_1^*(\beta_1)]^2 + a_2 c_1^*(\beta_1). \end{cases} \quad (28)$$

Ограничиваясь первыми тремя членами ряда (27), получаем область возможных значений коэффициента c_1 , обеспечивающих переходный процесс без перерегулирования, которые будут изменяться в пределах $2,55 < c_1 < 7,133$. Для сравнения проводились вычисления по точным соотношениям, приведенным в [7] для системы второго порядка, где производная определялась через непрерывные разности. Результаты для рассматриваемого примера дают достаточно близкие к полученным выше ограничения: $2,552 < c_1 < 7, 14$.

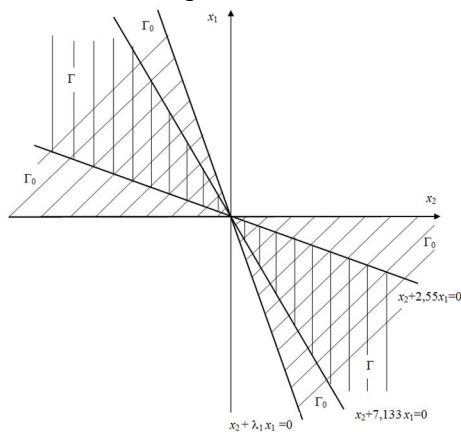


Рисунок 1 – Области существования устойчивого движения системы
 Figure 1 – Areas of system stable movement existence

На рисунке 1 показаны допустимые положения идеальной линии переключения на фазовой плоскости, определяющие области существования устойчивого движения системы: Γ_0 – скользящего режима для СПС с полной информацией о фазовых координатах; Γ – квазискользкого режима для цифровой СПС, в которой $T \ll \tau$.

Заключение

Получено формализованное описание динамики цифровой системы управления в фазовом пространстве состояний непрерывной системы, реализующей заданный закон управления с переменной структурой. Для вычисления производных предложено использовать разностные методы, что в конечном итоге позволяет представить динамику системы в пространстве состояний ОУ с учетом особенностей цифровой обработки информации. Анализ устойчивости движения такой непрерывной системы позволяет определить параметры цифрового контроллера, обеспечивающие существование квазискользкого режима. В то же время при увеличении сложности технических систем разработка модели цифровой системы управления связана с возрастанием размерности пространства состояний, которым описывается динамика ОУ. Это приводит к необходимости нахождения приближенных значений высших производных. Отсюда возникает задача синтеза эффективного управления без определения всех значений координат этого пространства. Поэтому дальнейшим направлением развития полученных результатов представляется разработка средств адаптивного интеллектуального управления [11, 12], например, с использованием генетических алгоритмов [13] или нечеткой логики [14].

Библиографический список

1. **Ким Д.П.** Теория автоматического управления. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. М.: Издательство Юрайт, 2025. 331 с.
2. **Utkin V.I.** Sliding modes in control and optimization. New York, Springer-Verlag. 1991. 286 p.
3. **Дроздов В.Н., Мирошник И.В., Скородубский В.И.** Системы автоматического управления с микроЭВМ. Л. Машиностроение, 1989. 284 с.
4. **Гантмахер Ф.Р.** Теория матриц. М. Физматлит, 2010. 560 с.
5. **Скворцов С.В., Хрюкин В.И., Скворцова Т.С.** Параметрический синтез цифрового ПИД-регулятора на основе аналитико-графической модели системы управления // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2025. № 91. С. 220-232.
6. **Скворцов С.В., Хрюкин В.И., Скворцова Т.С.** Аналитико-графическое моделирование систем управления на основе ПИД-регуляторов // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2024. № 87. С. 78-88.
7. Теория систем с переменной структурой. Под ред. Емельянова С. В. М. Наука, 1970. 592 с.
8. **Эльсгольц Л.Э.** Дифференциальные уравнения. М, Издательство МГУ, 2024. 296 с.
9. **Курош А.Г.** Курс высшей алгебры. Санкт-Петербург: Лань, 2024. 310 с.
10. **Виноградов Ю.Л., Таран Ю.А., Хрюкин В. И.** Влияние дискретизации измеряемого сигнала на свободное движение систем с переменной структурой // Автоматизация испытаний и измерений: межвуз. сб. научн. тр. Рязань: РГРТУ, 1995. С. 67-71.
11. **Бобиков А. И., Фоломеева Е.И.** Адаптивное нечеткое управление со скользящим режимом. Рязань, Рязан. гос. радиотехн. ун-т. 2021. 100 с.
12. **Бобиков А.И., Корниенко М.Д.** Оптимальное нестационарное управление многосвязными объектами // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2023. № 84. С. 176-186.
13. **Wong C.C., Huang B.C., Lai H.R.** Genetic-based sliding mode fuzzy controller design, Tamkang Journal of Science and Engineering. Vol. 4. № 3 (2001). Pp. 165-172.
14. **Tao C.W., Chan M.L., Lee T.T.** Adaptive fuzzy sliding mode controller for linear systems with mismatched time-varying uncertainties, IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics). Vol. 33. № 2 (2003). Pp. 283-294.

UDC 681.515:004.942

MODEL DEVELOPMENT OF DIGITAL VARIABLE STRUCTURE SYSTEM TAKING INTO ACCOUNT CONTROL OBJECT STATE DETERMINATION FEATURES

S. V. Skvortsov, Dr. in technical sciences, full professor, RSREU, Ryazan, Russia;
orcid.org/0000-0001-9495-4953, e-mail: s.v.skvor@gmail.com

V. I. Khryukin, Ph. D. (technical sciences), associate professor, RSREU, Ryazan, Russia;
orcid.org/0000-0002-7736-115X, e-mail: vi_x@mail.ru

T. S. Skvortsova, Ph. D. (technical sciences), associate professor, Academy of the FPS of Russia, Ryazan, Russia;
orcid.org/0000-0001-7504-5973, e-mail: t.s.skvortsova@yandex.ru

The problem of developing a model of a digital variable structure system that takes into account the specifics of determining the state of the control object is considered. The aim of the work is to analyze the impact of error signal discretization and the method of obtaining information about the object's coordinates on the stability of the control system. It is proposed to investigate the dynamics of a digital variable structure system in the phase space of a continuous system, which makes it possible to use its mathematical model to describe the dynamics of a control object with a digital controller. Analytical expressions are obtained for determining the positions of the switching hyperplanes in the phase space, which allow for the justification of the choice of the allowable area of stable motion of the system in the quasi-sliding mode. The experimental part of the work shows an example of calculating the parameters of digital control device for the object described by second-order differential equation which confirms the possibility of practical use of the developed model.

Keywords: variable structure system, control object, structure switching hyperplane, state space, phase coordinates vector, sliding mode, finite differences, continuous differences, digital controller.

DOI: 10.21667/1995-4565-2026-95-158-170

References

1. **Kim D.P.** Teorija avtomaticheskogo upravlenija. Mnogomernye, nelinejnye, optimal'nye i adaptivnye sistemy. (Theory of automatic control. Multidimensional, nonlinear, optimal and adaptive systems), Moscow, *Izdatel'stvo Jurajt*, 2025, 331 p. (in Russian).
2. **Utkin V.I.** Sliding modes in control and optimization. New York, *Springer-Verlag*. 1991. 286 p.
3. **Drozdov V.N., Miroshnik I.V., Skorodubskij V.I.** Sistemy avtomaticheskogo upravlenija s mikro-JeVM. (Microcomputer automatic control systems), Leningrad, *Mashinostroenie*, 1989, 284 p. (in Russian).
4. **Gantmaher F.R.** Teorija matric. (Matrix theory), Moscow, *Fizmatlit*, 2010, 560 p. (in Russian).
5. **Skvortsov S.V., Khryukin V.I., Skvortsova T.S.** Parametricheskij sintez cifrovogo PID-reguljatora na osnove analitiko-graficheskoj modeli sistemy upravlenija. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radio-tehnicheskogo universiteta*. 2025, no. 91, pp. 220-232 (in Russian).
6. **Skvortsov S.V., Khryukin V.I., Skvortsova T.S.** Analitiko-graficheskoe modelirovanie sistem upravlenija na osnove PID-reguljatorov. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radio-tehnicheskogo universiteta*. 2024, no. 87, pp. 78-88 (in Russian).
7. Teorija sistem s peremenoj strukturoj (Theory of variable structure systems), ed. by **S.V. Emel'janov**. Moscow, *Nauka*, 1970. 592 p. (in Russian).
8. **Jel'sgol'c L. Je.** Differencial'nye uravnenija. (Differential equations), Moscow, *Izdatel'stvo MGU*, 2024, 296 p. (in Russian).
9. **Kurosh A.G.** Kurs vysshej algebry. (Higher Algebra Course), Saint-Petersburg, *Lan'*, 2024, 310 p. (in Russian).
10. **Vinogradov Ju.L., Taran Ju. A., Hrjukin V.I.** Vlijanie diskretizacii izmerjaemogo signala na svobodnoe dvizhenie sistem s peremenoj strukturoj. *Avtomatizacija ispytanij i izmerenij: mezhvuz. sb. nauchn. tr.* Ryazan, RGRU, 1995, pp. 67-71 (in Russian).
11. **Bobikov A.I., Folomeeva E.I.** Adaptivnoe nechetkoe upravlenie so skol'zjashhim rezhimom. (Adaptive fuzzy control with sliding mode), Ryazan, *Rjazan. gos. radiotehn. un-t*, 2021, 100 p. (in Russian).

12. **Bobikov A.I., Kornienko M.D.** Optimal'noe nestacionarnoe upravlenie mnogosvjaznymi ob#ektami. *Vestnik Rjazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*. 2023, no. 84, pp. 176-186 (in Russian).
13. **Wong C.C., Huang B.C., Lai H.R.** Genetic-based sliding mode fuzzy controller design, *Tamkang Journal of Science and Engineering*. Vol. 4, no. 3 (2001), pp. 165-172.
14. **Tao C.W., Chan M.L., Lee T.T.** Adaptive fuzzy sliding mode controller for linear systems with mismatched time-varying uncertainties, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B (Cybernetics)*. Vol. 33, no. 2 (2003), pp. 283-294.